Intresseväckande matematik:

Utveckling av laboration inom topologi vid Vetenskapens Hus

Interesting mathematics:

Design of laboratory exercise in topology at the House of Science

Emil Jansson
Jesper Jansson

Examensarbete på programmet Civilingenjör och lärare

Stockholm 2015-2016

Abstract

This master thesis includes a study on how laboratory work in topology at the House of Science (Vetenskapens Hus) in Stockholm can be adapted for high school students in such a way that catches and increases their interest and motivation towards mathematic studies.
The study consists of three parts. The first part consists of a study of literature and previous research regarding education and increases in interest and motivation in relation to mathematics.

The second part consists of a summary and adaptation of the educational theory and research to fit the context of the House of Science (Vetenskapens Hus) in Stockholm including target audience, technical and physical limitations. The conclusion of this work is summarized in the design of a visit leader tutorial.
The third part evaluates whether participants in the student visit and laboratory work at the House of Science recognized an increase in interest and motivation towards math and mathematic studies and concludes to which extent the result and analysis is valid.

Results show that the students who tested the laboratory exercise found it to be interesting and motivating and that a laboratory way of working with mathematics with a basis in problem based learning can have good impact on students interest and motivation towards the subject.

Keywords: mathematics, education, motivation, interest, topology, manipulatives, problem based learning

Sammanfattning

Detta examensarbete innefattar en studie om hur laborativt arbete inom topologi vid Vetenskapens Hus i Stockholm kan bli anpassad för gymnasieelever på ett sätt så att det fångar och ökar deras intresse och motivation gentemot matematikämnet.
Studien består av tre delar. Den första delen består av en litteraturstudie och en studie av tidigare forskning beträffande utbildning och ökande av intresse och motivation i relation till matematik.

Den andra delen består av en sammanfattning och anpassning av den utbildningsteoretiska bakgrunden och tidigare forskningen för att passa miljön vid Vetenskapens Hus i Stockholm, inklusive målgruppen samt tekniska och fysiska begränsningar. Slutsatsen av detta arbete sammanfattas i utformandet av en besöksledarhandledning.
Den tredje delen undersöker om deltagare vid elevbesöket och det laborativa arbetet med topologi vid Vetenskapens Hus kände av en ökning i intresse och motivation för matematik och studier i matematik och drar slutsatser gällande till vilken utsträckning resultatet och analysen är validerad.

Resultatet visar att de elever som testade laborationen fann den intresseväckande samt motiverande och att ett laborativt sätt att arbeta med matematik med grund i problembaserat lärande således kan ha god inverkan på elevers intresse och motivation gentemot ämnet.

Nyckelord: matematik, utbildning, motivation, intresse, topologi, laborativ matematik, problembaserat lärande

Tack till

Vi vill tacka vår handledare Lena Gumaelius som hjälpte oss att utveckla målet med examensarbetet samt genomförandet av enkätundersökningar och intervjuer.

Vi vill också tacka vår biträdande handledare Torbjörn Tambour för att alltid ge snabb och insiktsfull återkoppling på uppsatsen.

Vi vill tacka Elin Ottergren och alla andra på Vetenskapens Hus som ställt upp och hjälpt oss med allting rörande kontaktandet av testklasser och införskaffande av laborativt material. Vi kände oss alltid varmt välkomna.

Slutligen vill vi tacka alla de elever och lärare som ställde upp på testbesöken och svarade på enkäten samt deltog i intervjuerna.

Innehållsförteckning

Tack till 4
Innehållsförteckning 5
1. Inledning 7
1.1 Introduktion 7
1.2 Bakgrund 7
1.3 Syfte 8
1.4 Mål 8
1.5 Frågeställningar 9
2. Metod 10
2.1 Kvalitativ och kvantitativ forskning 10
2.2 Fallstudie 10
2.2.1 Varför valdes en fallstudie? 10
2.3 Studiedesign 10
2.4 Litteraturstudie 11
2.5 Val av utvärderingsmetoder 11
2.6 Begränsningar vid en fallstudie 12
2.7 Avgränsningar 12
3. Teoretisk referensram 13
3.1 Intresse & Motivation 13
3.2 Undervisning inom matematik 14
3.2.1 Forskningsbaserat lärande 15
3.2.2 Problembaserat lärande 15
3.2.3 Laborativ matematikundervisning 17
3.2.4 Det sociokulturella perspektivet på lärande 19
3.2.5 Olika inlärningsnivåer i matematik 22
3.3 Sammanfattning samt resultat från tidigare forskning 23
4. Matematisk bakgrund 25
4.1 Topologi 25
4.2 Lösning till tavelproblemet 30
5. Laborationen 34
6. Resultat 37
6.1 Enkätundersökningen 37

6.2 Fokusgrupperna 41
6.2.1 Fokusgrupp 1 41
6.2.1 Fokusgrupp 2 41
6.2.1 Fokusgrupp 3 42
7. Analys och Diskussion 43
7.1 Sammanfattande diskussion och svar till forskningsfrågor 46
7.1.1 Svar till frågeställningar 47
7.2 Förslag på vidare forskning 48
8. Referenser 49
Elektroniska källor 51
9. Bilagor 52
9.1 Elevenkät 52
9.2 Besöksledarhandledning 56

1. Inledning

I detta avsnitt presenteras bakgrunden till examensarbetet tillsammans med en problembeskrivning samt syftet och målen med arbetet och även en precisering av frågeställningar samt vilka avgränsningar som har gjorts.

1.1 Introduktion

Detta examensarbete avslutar våra studier på Civilinjengör & Lärare programmet vid Kungliga Tekniska Högskolan (KTH) och Stockholms Universitet (SU) och utfördes i samarbete med Vetenskapens Hus.

Vetenskapens Hus är en verksamhet som erbjuder intressanta experiment och hands-on aktiviteter för elever på grundskolan såväl som på gymnasiet med det övergripande målet att öka ungdomars intresse för naturvetenskap och teknik[1].

1.2 Bakgrund

Internationella undersökningar har under en tid nu visat att svenska elevers resultat och kunskaper inom matematikämnet dalar.
Programme for International Student Assessment, PISA, är en internationell undersökning initierad av OECD som vart tredje år undersöker elevers förmågor inom bland annat matematik. Skolverkets rapport från senaste utförda undersökningen, 2012, visar på att inom matematik så presterar 25 av 34 OECD-länder bättre än Sverige samt att svenska elevers resultat inom matematik har sjunkit ända sedan 2003.[2]
Trends in International Mathematics and Science Study, TIMSS, är en annan internationell undersökning som utförs av *International Association for the Evaluation of Educational Achievement,* IEA, vilken undersöker elever i årskurs fyra samt åttas kunskaper inom matematik och naturvetenskapliga ämnen men även attityder gentemot de berörda ämnesområdena.[3]
Även i denna undersökning så presterar Sverige främst elever i årskurs åtta sämre än majoriteten av andra OECD-länder och resultaten visar en dalande trend gentemot tidigare undersökningar[4]. Anmärkningsvärt är även att undersökningen visar på att för svenska elever i årskurs åtta så har endast 13% en positiv inställning gentemot att lära sig matematik, medan 42% har en ganska positiv inställning och 44% en negativ inställning.[5]
Detta resultat visar på en parallell mellan intresse och inställning till matematik och anammad kunskap, vilket också har undersökts av Singh et al. vilka i sin studie kom fram till att det

---

[1] URL: http://www.vetenskapenshus.se/vision-och-mål (hämtad 2015-09-21).
[2] Skolverket (2013). *PISA 2012 - 15-åringars kunskaper i matematik, läsförståelse och naturvetenskap.* Stockholm: Skolverket. s. 28.
[3] Skolverket (2012). *TIMSS 2011 Svenska grundskoleelevers kunskaper i matematik och naturvetenskap i ett internationellt perspektiv.* Stockholm: Skolverket. s. 16-19.
[4] Ibid. s. 51.
[5] Ibid. s. 86.

finns en relation mellan å ena sidan motivation och attityd gentemot matematik och naturvetenskap och å andra sidan prestationer[6].
Även nationella undersökningar utförda av skolverket som exempelvis NU-03 visar på att matematik tillsammans med andra naturvetenskapliga ämnen som fysik och kemi är de ämnen som störst andel elever uttrycker ointresse för och de ämnena där lärare upplever att de har störst andel omotiverade elever[7].
Sveriges regering fick utifrån dessa internationella och nationella undersökningar upp ögonen för frågan och tillsatte 2003 en delegation, *Matematikdelegationen*, vars ena syfte var att arbeta fram en handlingsplan med förslag till åtgärder för att just förändra attityder till matematik och öka intresset.[8]
Detta fenomen kring elevers uppfattningar och intresse riktat emot naturvetenskapliga ämnen och däribland matematik är heller inte strikt kopplat till Sverige utan är som Potvin och Hasni nämner ett fenomen som noteras i hela västvärlden som även har blivit brett accepterad inom forskningskretsar i området[9].

Om det finns en korrelation mellan attityd, intresse, motivation och akademiska prestationer och bedrifter, vad är då viktigt för att lyfta intresse, förändra attityd samt skapa motivation för ämnet?
I denna rapport kommer detta att undersökas och prövas.

1.3 Syfte

Som tidigare nämnts så kommer denna rapport att behandla vad som är viktigt för att lyfta intresset och motivationen gentemot matematik. Då matematik är ett kärnämne och matematisk kunskap är något som behövs för att förstå och kunna granska information om beslutsprocesser, reklam, påståenden osv. samt kunna lösa vardagsproblem[10] så är detta mycket relevant. Således är ett syfte att studera detta genom en litteraturstudie medan ett annat syfte är att undersöka området empiriskt.

1.4 Mål

Målet för examensarbetet är att utifrån litteraturstudien om vad som kan vara viktigt för att lyfta elevers intresset och höja deras motivation gentemot matematik att utveckla en matematiklaboration inom topologi med tillhörande lärarhandledning så att andra ska kunna utföra laborationen, och därefter testa samt utvärdera laborationen.

---

[6] Singh, K. Granville, M. Dika, S. (2002). *Mathematics and Science Achievement: Effects of Motivation, Interest, and Academic Engagement.* The Journal of Educational Research. Vol. 95, No. 6. s. 330.
[7] Skolverket (2005). *Nationella utvärderingen av grundskolan.* Stockholm: Skolverket. s. 49.
[8] Matematikdelegationen (2004). *Att lyfta matematiken – intresse, lärande, kompetens.* Fritzes: Stockholm. s. 3.
[9] Potvin, P. Hasni, A. (2014). *Interest, motivation and attitude towards science and technology at K-12 levels: a systematic review of 12 years of educational research.* Studies in Science Education. 50:1. s. 85.
[10] Skolverket (2003). *Lusten att lära - med fokus på matematik.* Stockholm: Skolverket. s. 10.

1.5 Frågeställningar

För att nå målen med examensarbetet har följande huvudsakliga frågeställningar formulerats.

FS1: Vilka vanliga variationer och metoder beträffande undervisning inom matematik kan vara gynnsamma för att väcka intresse samt höja motivationen för matematikämnet jämfört med “traditionell” undervisning?

FS2: Hur skulle en matematiklaboration i topologi kunna anpassas för att väcka intresse och höja motivationen för matematikämnet?

För att besvara frågeställningarna så utförs en litteraturstudie av relevant litteratur och tidigare forskning kring området. Frågeställning två kompletteras av enkätundersökningar i samband med tre laborationstillfällen samt intervjuer i tre fokusgrupper.

2. Metod

I detta avsnitt diskuteras metodiken för examensarbetet vilket innefattar varför forskningsmetoden som används väljs, samt begränsningar till den valda metoden.

2.1 Kvalitativ och kvantitativ forskning

En distinktion dras ofta emellan kvalitativ och kvantitativ forskning. Enligt Bryman och Bell[11] bygger kvantitativ forskning på kvantifiering av insamling av data såväl som analys av insamlad data. Vidare så är kvantitativ forskning ofta relaterad till ett deduktivt tillvägagångssätt där teorier prövas genom observationer eller experiment för att skapa ett objektivt klargörande. Kvalitativ forskning å andra sidan riktar mindre fokus på kvantifiering av insamling av data och dataanalys och mer fokus på hur individer uppfattar och tolkar sin subjektiva verklighet. Kvalitativ forskning är ofta relaterad till induktivt tillvägagångssätt där teorier kan skapas, utvecklas eller prövas.

2.2 Fallstudie

Detta arbete använder sig både utav en kvalitativ forskningsansats såväl som en kvantitativ, alltså en så kallad *'mixed-method'*[12] ansats och är uppbyggt kring en fallstudie i samarbete med Vetenskapens Hus.

2.2.1 Varför valdes en fallstudie?

Enligt Yin är en forskningsansats genom användandet av en fallstudie en empirisk undersökning som undersöker nutida problem eller företeelser inom sitt naturliga sammanhang[13].
Bell menar att fallstudier kan passa bra för forskare som arbetar under en begränsad tidsperiod[14].
Som tidigare nämnts så är det sjunkande intresset, motivationen för och attityderna gentemot de naturvetenskapliga ämnena och däri matematikämnet ett kontemporärt problem inte bara i Sverige utan i flera västerländska länder och att undersöka hur arbete kan bedrivas för att motverka detta inom sitt naturliga sammanhang kan ge värdefulla insikter kring forskningsområdet samt bidra till att bättre förstå komplexiteten kring problemet.

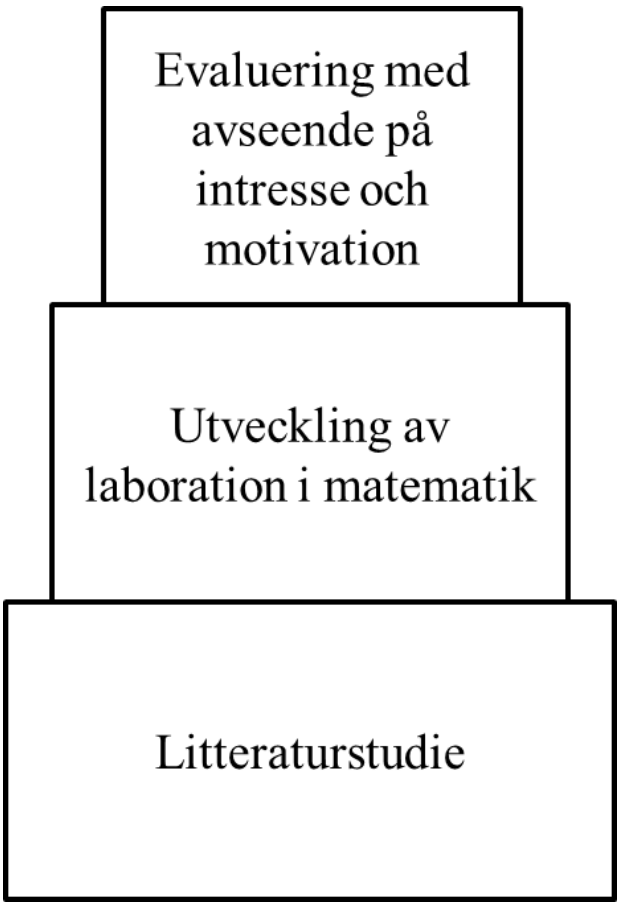
2.3 Studiedesign

Som nämnts tidigare så byggs detta arbete kring en fallstudie där en matematiklaboration inom topologi utvecklas med det huvudsakliga syftet att om möjligt skapa intresse, och

---

[11] Bryman, A. Bell, E. (2011). *Företagsekonomiska Forskingsmetoder.* 3e uppl. Stockholm: Liber.
[12] Östlund, E. Kidd, L. Wengström, Y. Rowa-Dewar, N. (2011). *Combining qualitative and quantitative research within mixed method research designs: A methodological review.* International Journal of Nursing Studies. 48:3. pp. 369-383.
[13] Yin, R, K. (2007). *Fallstudier: Design och Genomförande.* Stockholm: Liber. s. 31.
[14] Bell, J. (2006). *Introduktion till Forskningsmetodik.* 4e uppl. Lund: Studentlitteratur. s. 20.

motivation för eleverna gentemot ämnet. Laborationen baseras på teori hämtad från litteratur och tidigare forskning och testas och utvärderas med elever.



2.4 Litteraturstudie

För att utveckla en förståelse kring området som omfattar examensarbetet så utförs en litteraturstudie. De sökverktyg som används är Primo, ett sökverktyg vid KTH och andra journaldatabaser som ERIC (största databasen för pedagogik och utbildning), MathEduc (stor databas för matematikdidaktik), Google Scholar etc. Utifrån trovärdighetsskäl så utnyttjas endast referensgranskade artiklar och tryckta böcker.

2.5 Val av utvärderingsmetoder

För att försöka nå både djup samt bredd vad gäller datainsamling för projektet så väljs två olika utvärderingsmetoder. Den första är *fokusgrupper*, vilket är en forskningsteknik som kan beskrivas som en typ av gruppintervju eller diskussion som leds av en samtalsledare. Då utvärderingen sker direkt i samband efter utförd laboration med eleverna som testar laborationen så fungerar det som en bra metod då mycket data kan samlas in under en kort

tid.[15] Samtalen vid fokusgrupperna spelades in och transkriberades för att underlätta analysarbetet av datat.
För att även nå en bredd beträffande datainsamlingen så utförs en enkätstudie där eleverna som är med och testar laborationen får svara på ett frågeformulär.
Angående etiska aspekter kopplade till fokusgrupperna så är deltagande frivilligt och alla elever blir innan start informerade om syftet med undersökningen, samt att materialet som tillhandahålls endast kommer att analyseras av undersökarna och att deltagarna kommer att förbli anonyma. All data är således anonymt och förvaras anonymt och går inte att härleda tillbaka till dess ursprungskällor.

2.6 Begränsningar vid en fallstudie

Enligt Bell, så argumenterar somliga för att det normalt sett kan vara svårt generalisera resultat från en fallstudie, men resultaten kan möjligtvis å andra sidan vara generaliserbara gentemot andra fall som är likvärdiga med det som har studerats[16].
Författarna till detta arbete vill emellertid argumentera för att resultaten möjligtvis inte kan ses som generaliserbara men kan åtminstone ses som relaterbara gentemot andra fall och bidra med insikt till området.

2.7 Avgränsningar

En avgränsning som görs under arbetets gång är att endast undersöka och redogöra för åtgärder med syftet att försöka väcka intresse och skapa motivation för matematikämnet som är kopplade till variationer beträffande undervisningsformer och metoder som kan tillämpas vid undervisning. Det går även att finna tidigare forskning som behandlar andra typer av åtgärder som exempelvis sommarläger, museibesök, vetenskapstävlingar etc. Studien behandlar inte heller olika former av IKT-verktyg kopplat till undervisning vilka effekter de verktygen kan ha på elevers intresse och motivation, som i sig även det är ett stort forskningsområde.[17]

[15] Wibeck, V. (2000). *Fokusgrupper - Om fokuserade gruppintervjuer som undersökningsmetod.* Lund: Studentlitteratur.
[16] Bell, J. (2006). *Introduktion till Forskningsmetodik.* 4e uppl. Lund; Studentlitteratur. s. 21.
[17] Potvin, P. Hasni, A. (2014). *Interest, motivation and attitude towards science and technology at K-12 levels: a systematic review of 12 years of educational research.* Studies in Science Education. 50:1.

3. Teoretisk referensram

Detta avsnitt kommer att ge en teoretisk överblick över teorier kopplade till arbetet samt gå igenom tidigare forskning relaterad till området som omfattar studien.

3.1 Intresse & Motivation

Tidigare så har begreppen intresse och motivation nämnts ett flertal gånger. För att problematisera och skapa mer förståelse är det relevant att försöka undersöka dessa begrepp på ett djupare plan. Enligt Krapp[18] så existerar det två olika typer av intresse, nämligen *situational interest* (situationsbaserat intresse: egen översättning) och *personal interest* (personligt intresse: egen översättning), vilka båda tenderar att ha positiv inverkan vad gäller individers lärandeprocess, och dess resultat[19]. *Personligt intresse* kan enligt Krapp[20] ses som en relation riktad emellan en individ och föremål, abstrakta såväl som gripbara, inom sin verklighet. Inom dessa möjliga relationer så kan efter en tid och under särskilda förutsättningar, vissa av dessa relationer utvecklas till utpräglade *personliga intressen. Situationsbaserat intresse,* å andra sidan är en effekt utav externa faktorer och kan således vara mer flyktigt[21] men kan leda till en utveckling av *personligt intresse*.

Motivation är emellertid ett något mer svårdefinierat begrepp. Nationalencyklopedins definition lyder: *"psykologisk term för de faktorer hos individen som väcker, formar och riktar beteendet mot olika mål."*[22]
Några som har forskat mycket på området i samband med utbildning är Edward Deci och Richard Ryan som under 1970-talet tog fram self-determination teorin. Deci och Ryan[23] gör en särskiljning mellan två typer av motivation, *inre motivation,* samt *yttre motivation.* Med *inre motivation* så menas ett aktivt engagerande i aktiviteter som grundar sig i att individen finner ett intresse och inre glädje av aktiviteten eller uppgiften. *Yttre motivation* å andra sidan syftar till engagemang på grund av yttre krav eller belöningar. För att försöka koppla det till skolvärlden så skulle en elevs inre motivation kunna kopplas till att eleven aktivt försöker lösa en uppgift på grund av att denne finner den intressant och givande. En elev som engagerar sig i en uppgift med drivkraften att få ett bra betyg eller undvika underkänt är exempel på yttre motivation. Deci et al. argumenterar för att yttre motivation kan ha en negativ effekt på den inre motivationen vid intressanta uppgifter även i form av belöningar[24].

---

[18] Krapp, A. (2002). *Structural and dynamic aspects of interest development: theoretical considerations from an ontogenetic perspective.* Learning and Instruction 12. pp. 383-409. s. 384.
[19] Hidi, S. (1990). *Interest and its contribution as a mental resource for learning.* Review of Educational Research. 60:4. pp. 549-571.
[20] Krapp, A. (2002). *Structural and dynamic aspects of interest development: theoretical considerations from an ontogenetic perspective.* Learning and Instruction 12. pp. 383-409. s. 386-387.
[21] Ibid. s. 388.
[22] URL: http://www.ne.se/uppslagsverk/encyklopedi/lång/motivation (hämtad 2015-10-08).
[23] Deci, E. Ryan, R. (2000). *The "What" and "Why" of Goal Pursuits: Human Needs and the Self-Determination of Behavior.* Psychological Inquiry. 11:4. pp. 227-268.
[24] Deci, E. Koestner, R. Ryan, R. (1999). *A Meta-Analytic Review of Experiments Examining the Effects of Extrinsic Rewards on Intrinsic Motivation.* Psychological Bulletin. 125:6. pp. 627-668. s. 658-659.

Weary och Thomson[25] menar att yttre motivation initialt kan vara lämpligt för att fånga ett engagemang men att det långsiktiga målet bör vara att få elever att känna en inre motivation.

3.2 Undervisning inom matematik

Som läsaren vid detta laget har noterat så har många elever i Sverige och i andra västerländska länder en relativt negativ attityd, svalt intresse och låg motivation i förhållande till matematik och naturvetenskap. Det finns åtskilliga studier som visar på att det finns ett starkt samband mellan intresse och attityd gentemot matematik och naturvetenskap och hur undervisning inom ämnena bedrivs inom skolan[26,27,28].

Hur bedrivs då matematikundervisning överlag inom den svenska skolan?

Skolinspektionen publicerade 2009 en kvalitetsrapport om undervisning inom matematik på gymnasieskolan där 55 gymnasieskolor i 49 kommuner granskades[29]. Undersökningen visade att de flesta lektioner följer samma mönster och upplägg där en genomgång utav läraren följs upp utav elevers eget individuella arbete, vilket de menar ger elever en begränsad möjlighet till att träna problemlösning, kunna se samband och föra matematiska resonemang[30]. Vidare så visar undersökningen att flertalet elever upplever just den undervisningsformen som "tråkig och utan variation"[31].

Även tidigare granskningar visar på att inom undervisning med varierade arbetsformer som ger möjlighet till upptäckarglädje och engagemang samt erbjuder utrymme för både känsla och tanke så finns flest intresserade och motiverade elever[32]. Detta var även något Matematikdelegationen kom fram till och de menar att undervisning med endast individuellt arbete kan vara skadligt och varierande kreativ undervisning är nyckeln till att öka intresset för matematiken som ämne[33].

Således så finner författarna till detta arbete det intressant att på ett djupare plan undersöka och presentera vad forskning visat på hittills, vad anbelangar åtgärder och variationer i undervisningsform som kan tas i beaktande för att öka intresse och motivation samt förändra attityden till matematik och naturvetenskap.

Merparten av följande avsnitt bygger på en översiktsartikel av Potvin och Hasni där de har gått igenom och analyserat 228 referensgranskade artiklar från databasen ERIC från de

---

[25] Weary, J. Thomson, M. M. (2013). *Motivational strategies to enhance effective learning in teaching struggling students.* Support for Learning. 28:3. pp. 103-108. s. 106.

[26] Murphy, C. Beggs, J. (2003). *Children's perceptions of school science.* School Science Review, 84, 109-116.

[27] Osborne, J. F. Simon, S. Collins, S. (2003). *Attitudes towards Science: A review of the literature and its implications*. International Journal of Science Education, 25, 1049–1079.

[28] Breen, S. Cleary, J. O'Shea, A. (2009). *An investigation of the mathematical literacy of first year third-level students in the Republic of Ireland.* International Journal of Mathematical Education in Science in Technology, 40(2), 229-246.

[29] Skolinspektionen (2010). *Undervisningen i matematik i gymnasieskolan.* Stockholm: Skolinspektionen. s. 29.

[30] Ibid. s. 16.

[31] Ibid. s. 16.

[32] Skolverket (2003). *Lusten att lära - med fokus på matematik.* Stockholm: Skolverket. s. 14.

[33] Matematikdelegationen (2004). *Att lyfta matematiken – intresse, lärande, kompetens.* Fritzes: Stockholm. s. 15.

senaste 12 åren som behandlar ett eller fler av de tre begreppen intresse, attityd och motivation samt naturvetenskap och teknologi[34].

3.2.1 Forskningsbaserat lärande

Forskningsbaserat lärande (*IBL,* efter engelskans inquiry-based learning) är en pedagogisk strategi som utvecklades under 1960-talet där det huvudsakliga målet är att elever ska använda likvärdiga metoder som används inom forskningsvärlden för att bilda kunskap. IBL kan således definieras som en process där eleven formulerar hypoteser och testar dem genom experiment eller observationer och därefter drar slutsatser.[35]
IBL kan även delas in i olika nivåer i form av hur öppen metodiken är för eleverna vilket visas i matrisen nedan från Blanchard et al[36].

	Frågeställningar	Datainsamlingsmetoder	Tolkning av resultat
Nivå 0	Givet av läraren	Givet av läraren	Givet av läraren
Nivå 1	Givet av läraren	Givet av läraren	Öppet för eleverna
Nivå 2	Givet av läraren	Öppet för eleverna	Öppet för eleverna
Nivå 3	Öppet för eleverna	Öppet för eleverna	Öppet för eleverna

Blanchard et al. menar emellertid att det kan vara svårt att i det faktiska dynamiska klassrummet entydigt kunna definiera dessa nivåer och menar att lärare kan mycket väl behöva assistera elever med att generera frågeställningar, forskningsansatser och tolka resultat. Vidare menar författarna att scaffolding (på svenska "stöttat lärande") kan vara en bra metod för att assistera eleverna vid sådana situationer, och menar att det även är viktigt att komma ifrån idén om att nivå 3 skulle vara det bästa sättet att bedriva undervisning inom naturvetenskap. Det finns ingen optimal nivå som passar alla typer av inlärningssammanhang utan att den ideala nivån kommer variera beroende på sammanhang och material.[37]

3.2.2 Problembaserat lärande

Problembaserat lärande (*PBL,* efter engelskans problem based learning) är ett konstruktivistiskt tillvägagångssätt för att dela ut instruktioner till ett klassrum där eleverna står i centrum. Lärarens roll blir att underlätta och fokusera diskussioner istället för att på traditionellt vis dela ut kunskap. Med PBL lär sig eleverna genom att lösa problem och att

[34] Potvin, P. Hasni, A. (2014). *Interest, motivation and attitude towards science and technology at K-12 levels: a systematic review of 12 years of educational research.* Studies in Science Education. 50:1. s. 88-89.
[35] Pedaste, M. Mäeots, M. Siiman, L. A. de Jong, T. Van Riesen, S. Kamp, E. T. Constantinos, C. M. Zacharias, C. Z. Eleftheria, T. (2015). *Phases of inquiry-based learning: Definitions and the inquiry cycle.* Educational Research Review 14. s. 48.
[36] Blanchard, M. R. Southerland, A. S. Osborne, J. W. Sampson, D. V. Annetta, L. A. Granger, E. M. (2010). *Is Inquiry Possible in Light of Accountability?: A Quantitative Comparison of the Relative Effectiveness of Guided Inquiry and Verification Laboratory Instruction.* Science Educational. s. 581.
[37] Ibid. s. 582.

reflektera över deras erfarenheter. Det elevcentrerade klassrummet är en förutsättning för PBL och det underlättas av att ha en konstruktivistisk syn på människors tänkande och lärande.[38] Kognitivismen, som konstruktivismen är en del av, sätter människans tänkande som tyngdpunkt för att undersöka och förstå psykologiska förlopp.[39] I relation till lärande så är det just konstruktivismen som fått störst inflytande där det betonas att människan inte passivt registrerar sinnesintryck från omvärlden, utan att hon istället aktivt skapar en meningsfull helhet av det hon upplever.[40]

Strategin för problembaserat lärande var ursprungligen utvecklad med målet att skapa en lärandesituation som liknar arbetslivet för medicinstudenter. Detta för att studenterna mer effektivt skulle kunna ta till sig kunskaper och erfarenheter. När lärande sker i en relevant miljö ger det då upphov till att kunskapen bevaras inom gruppen i större utsträckning. Sedan det utvecklades på 60-talet i Kanada har det implementerats med stor framgång på olika medicin och vårdprogram över hela världen.[41] Även andra utbildningar tog efter PBL metoden. Vid Aalborg universitet och Roskilde universitet vidareutvecklades PBL för att kombineras med metoden för project-organized learning (projekt-oganiserat lärande: egen översättning) i syfte till att kunna bättre anpassas till andra utbildningar som bland annat ingenjörsprogram.[42]

Som det låter så är det problemen som utgör basen till PBL. Hur man ska utforma problemen beror på vilket mål undervisningen har. Om målet är att eleverna ska lära sig en viss metod passar det med problem som är relativt stängda jämfört med om målet är att lära sig mer allmänt om metodik. Då utformas problemen med fördel så att de är öppna, dvs. att de går att lösa på många olika sätt.[43] Ill structured problems (bristfälligt utformade problem: egen översättning) är utformade så att de inte går att lösa med en enkel procedur. Dessa problem har inte heller nödvändigtvis endast ett korrekt svar, men huvudsaken är att för att lyckas måste eleverna väga alternativ och argumentera för sin framtagna lösning. Eleverna får på så sätt ett starkare band med sina lösningar, de känner ett ansvar och ägande. Detta leder till att läraren kan släppa en del av ansvaret och istället arbeta för att underlätta och fokusera diskussioner. Det är fördelaktigt av många anledningar att placera eleverna i små grupper. Arbetet kan på detta sätt ta tillvara på sociala aspekter av lärande genom att i samspel med klasskamrater delta i diskussion, argumentation och problemlösning.[44]

---

[38] Hmelo-Silver, C. E. Barrows, H. S. (2006). Goals and Strategies of a Problem-based Learning Facilitator. Interdisciplinary Journal of Problem-Based Learning. 1(1). s. 21-24.
[39] Säljö, R. (2000). *Lärande i praktiken: Ett sociokulturellt perspektiv*. Stockholm: Nordstedts Akademiska Förlag. s. 49.
[40] Ibid.. s. 56-59.
[41] URL*:* http://www.med.lu.se/laekarutbildning/om_laekarutbildningen/problembaserat_laerande (hämtad 2015-10-01).
[42] Edström, K. Kolmos, A. (2014). *PBL and CDIO: complementary models for engineering education development*. European Journal of Engineering Education. 39:5. pp. 539-555. s. 541.
[43] Ibid. s. 544.
[44] Hmelo-Silver, C. E. Barrows, H. S. (2006). *Goals and Strategies of a Problem-based Learning Facilitator.* Interdisciplinary Journal of Problem-Based Learning. 1:1. s. 24.

PBL är ett arbetssätt som ämnar att forma hur elever lär sig, inte vad. Det finns många olika definitioner på PBL.[45] Men i allmänhet så utgår PBL från ett problem av varierande komplexitet. Problemen är lärandets startpunkt där grupper av elever ska få möjlighet att diskutera och analysera för att ta tillvara på gruppens samlade relevanta erfarenheter och kunskaper. Med en grundläggande förståelse för problemet kan gruppen tillsammans planera en möjlig lösning eller handlingsplan för att hitta en lösning. Denna handlingsplan innefattar då olika metoder för att ta till sig ny kunskap. Slutligen kan gruppen fokusera med nya förutsättningar och lösa problemet.[46]

Det finns som sagt många olika specifika modeller av PBL framtagna med olika målgrupper och andra förutsättningar i åtanke. En vanlig modell som används bland annat på olika vårdutbildningar i Sverige är uppbyggd med sju steg. Denna metod utgår från en fallbeskrivning där studenterna får läsa igenom och i grupp arbeta igenom steg för steg enligt matrisen nedan.[47]

De sju stegen
Steg 1: Klargör termer och begrepp
Steg 2: Identifiera problem
Steg 3: Producera idéer
Steg 4: Generera hypoteser
Steg 5: Formulera inlärningsmål
Steg 6: Inhämta kunskap
Steg 7: Problemlösning

Steg 1-4 är de introducerande stegen som innefattar att skaffa sig förståelse för problemet och att föreslå lösningar. I steg 5 gör man en bedömning av gruppens hypoteser och avväger vilken ytterligare kunskap som krävs för att lösa problemet, medans steg 6 utgör själva sökandet av denna kunskap. Steg 6 sker som enskilt arbete inför steg 7 då man åter träffas för att slutgiltigt lösa problemet.

3.2.3 Laborativ matematikundervisning

De båda pedagogiska strategierna, forskningsbaserat lärande, *IBL*, och problembaserat lärande, *PBL*, kan ligga som grund vid laborativt arbete inom matematik.

[45] Edström, K. Kolmos, A. (2014). *PBL and CDIO: complementary models for engineering education development*. European Journal of Engineering Education. 39:5. pp. 539-555. s. 545.
[46] Ibid. s. 544.
[47] URL: http://www.med.lu.se/laekarutbildning/om_laekarutbildningen/problembaserat_laerande (hämtad 2015-10-02).

Rystedt och Trygg har publicerat både en översiktsartikel *Laborativ matematik - vad vet vi?* där de analyserar tidigare forskning som bedrivits på området och boken *Matematikverkstad* med tanken att fungera som en resurs för lärare som vill arbeta laborativt med matematik i skolan[48].
Rystedt och Trygg[49] definierar laborativ matematikundervisning som *"en verksamhet där elever inte enbart deltar mentalt utan också arbetar praktiskt med material i undersökningar och aktiviteter som har ett specifikt undervisningssyfte".* Vidare menar författarna att det som är karakteristiskt för denna typ av undervisning till skillnad från det mer traditionella och vanliga arbetssättet där elever arbetar enskilt med uppgifter i sina matematikböcker är att det går att urskilja en relation mellan det *abstrakta* (det vi blott kan uppfatta med våra tankar) och det *konkreta* (det som kan uppfattas med våra fem sinnen).

Laborativ matematikundervisning går även att koppla samman med begreppen *hands on, minds on. Hands on - minds off* används ibland vid kritik riktat mot laborativ matematikundervisning då risken finns att elever arbetar med laborativt material men reflekterar inte över matematiken bakom. Vid sådan tillfällen finns det ingen länk mellan det konkreta och det abstrakta vilket ska karakterisera denna form av arbetssätt. Rystedt och Trygg[50] argumenterar för att det är lärarens uppgift att assistera eleverna så att detta samband kan stimuleras; *Hands on - Minds on!*
Något som är viktigt att påpeka är att länken mellan det konkreta och det abstrakta för mer utmanande problem fungerar mer som en bro. Elever kan gå mellan att arbeta med det laborativa materialet och att få förståelse av det abstrakta matematiska innehållet flera gånger för att ständigt få en djupare förståelse för den bakomliggande matematiken[51].
Rystedt och Trygg[52] menar att för att undvika *hands on - minds off*, så är det viktigt att läraren ständigt beaktar didaktiska frågorna, *vad?, varför?* och *hur?* vid utformning av laborativa aktiviteter. *Vad* är det eleven ska lära?, *Varför* ska det läras? och *Hur* ska det gå till?.
Även i boken *Algebra för alla* menar författarna att många elever har svårt att se meningen och skapa sig ett intresse för matematik om de endast löser uppgifter i sin lärobok. Författarna menar att för att undvika detta så måste matematiken göras till något attraktivt och levande och en väg dit är att eleverna får möjligheten att uppleva att de kan lösa problem de inte hade klarat av att lösa utan matematiken.[53] Vidare menar författarna att det är viktigt att matematikuppgifter ger upphov till ansträngning och reflektion. Matematikuppgifterna fungerar alltså bäst ifall de varken är för svåra eller för enkla[54].

---

[48] Rystedt, E. Trygg L. (2005). *Matematikverkstad - en handlednings för att bygga, använda och utveckla matematikverkstäder.* Göteborg: NCM. s. 1.
[49] Rystedt, E. Trygg L. (2010). *Laborativ matematikundervisning - vad vet vi?* Göteborg: NCM. s. 5.
[50] Rystedt, E. Trygg L. (2005). *Matematikverkstad - en handlednings för att bygga, använda och utveckla matematikverkstäder.* Göteborg: NCM. s. 7-8.
[51] Ibid. s. 23.
[52] Ibid. s. 69-70.
[53] Bergsten, C. Häggström, J. Lindberg, L. (1997). *Algebra för alla.* Göteborg: NCM. s. 9-10.
[54] Ibid. s. 109.

Ytterligare ett begrepp som laborativ matematikundervisning går att sammankoppla med är *kontextualisering.* Med *kontextualisering* i matematikundervisning menas åtaganden som försöker föra matematiken närmare det vardagsnära och flytta den närmare en kontext som är mer familjär för eleverna[55]. Krapp och Prenzel[56] menar att undervisning inom naturvetenskap som är alldeles för abstrakt kan få elever att tappa intresse för ämnet. Således genom att försöka kontextualisera matematikundervisning kan man göra den mindre abstrakt och istället fånga elevers intresse genom att flytta den närmare något de kan relatera till.
I *Algebra för alla* argumenterar författarna för att matematiska problem inte nödvändigtvis måste vara hämtade direkt ur vardagen utan att det centrala är att de matematiska problemen är verkliga, alltså behandlar något påtagligt som kan stimulera fantasin. Vidare menar de att problem med ett vackert mönster kan vara lika motiverande som ett vardagsproblem.[57]

Laborativ matematikundervisning lämpar sig även att kombinera med idén om *kollaborativt lärande. Kollaborativt lärande* innebär att de lärande arbetar tillsammans för att exempelvis lösa ett problem där de utnyttjar varandras kunskaper och kompetenser genom att samarbeta och interagera med varandra och kan således ses som starkt kopplad till Lev Vygotskijs *sociokulturella perspektiv på lärande.*[58]

Rystedt och Trygg[59] menar även att laborativ matematikundervisning går att koppla till samtliga tre stora teorier om lärande som har influerat synen på lärande i skolan det senaste halvseklet; nämligen B. F. Skinners *behaviouristiska inlärningsteorier*, Jean Piagets *genetiska epistomolegi*, samt Lev Vygotskijs *sociokulturella perspektiv på lärande.*
Det senare, *sociokulturella perspektivet på lärande* och dess kopplingar till laborativ undervisning inom matematik kommer att behandlas i följande avsnitt.

3.2.4 Det sociokulturella perspektivet på lärande

I ett *sociokulturellt perspektiv* är lärande en naturlig och viktig del av människan. Lärande ses då som en automatisk och ostoppbar process. Frågan är inte om man lär sig, utan vad man lär sig i olika situationer. Denna egenskap, kombinerad med vår förmåga att kommunicera tankar och erfarenheter med varandra, är nyckeln till vår kunskapsbildning.[60] Genom tiden har vi inom samhällen av varierande storlekar byggt upp kunskapsbaser, kultur och verktyg och vi har således kunnat sträcka oss allt högre över våra mentala och fysiska begränsningar.[61] Det *sociokulturella perspektivet* ser på människors utveckling i relation till samhället och dess

[55] Potvin, P. Hasni, A. (2014). *Interest, motivation and attitude towards science and technology at K-12 levels: a systematic review of 12 years of educational research.* Studies in Science Education. 50:1. s. 88-89.
[56] Krapp, A. Prenzel, M. (2011). *Research on Interest in Science: Theories, methods, and findings.* International Journal of Science Education. 33:1, pp. 27-50. s.43.
[57] Bergsten, C. Häggström, J. Lindberg, L. (1997). *Algebra för alla.* Göteborg: NCM. s. 82.
[58] Potvin, P. Hasni, A. (2014). *Interest, motivation and attitude towards science and technology at K-12 levels: a systematic review of 12 years of educational research.* Studies in Science Education. 50:1. s. 104.
[59] Rystedt, E. Trygg L. (2010). *Laborativ matematikundervisning - vad vet vi?* Göteborg: NCM. s. 7-8.
[60] Säljö, R. (2000). *Lärande i praktiken: Ett sociokulturellt perspektiv*. Stockholm: Nordstedts Akademiska Förlag. s. 47.
[61] Ibid. s. 18-19.

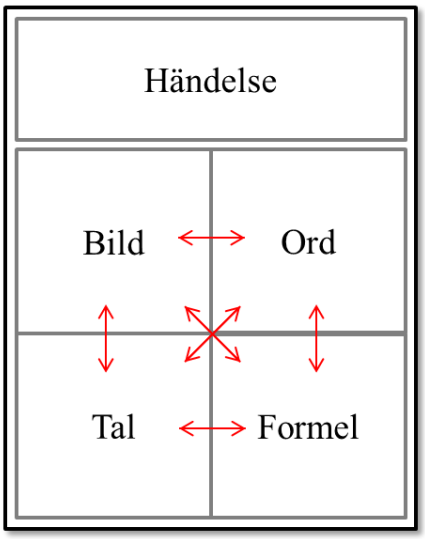
förutsättningar i form av kulturella resurser.[62] Vi lever i en värld som idag är till väldigt stor del formad av människan. *Artefakter* i form av olika fysiska och språkliga redskap har förstärkt vår möjlighet att transportera, kommunicera, bevara kunskap samt vår spridning och mottagande av information. De har även förstärkt vår förmåga att ytterligare forma om vår omvärld. I ett *sociokulturellt perspektiv* är det således även viktigt att undersöka samspelet mellan individen och dessa redskap. De är en del av dem kulturella resurser som vi använder och samverkar med och de påverkar vardagslivet enormt. Människan hanterar situationer i ett allt starkare samspel med fysiska och intellektuella redskap.[63] Parallellt med denna utveckling har de kunskaper vi erhåller övergått till att bli allt mer abstrakta eftersom de baseras på användandet av avancerade fysiska verktyg. Tas verktygen bort så sätts de intellektuella kunskaperna utanför sitt sammanhang och blir per definition abstrakta.[64] Säljö[65] beskriver denna övergång mot det abstrakta genom att titta på inlärningsprocessen vid användandet av hävstången. Människor som lär sig bemästra en hävstång genom praktik utvecklar ett sofistikerat praktiskt kunnande. En i begynnelsen revolutionerande upptäckt i hur man kunde välta tunga stenar förvandlades till en självklarhet som kom att ingå i de kulturella resurser tillhörande de små samhällena. På så sätt har det lett till att människor har vant sig med att hantera abstrakta intellektuella resurser. Ett simpelt fysiskt redskap som papper och penna är väldigt kraftfullt om användaren besitter de intellektuella resurser som krävs för att använda redskapet för ett specifikt ändamål. Det är vanligt i vår vardag, men man jobbar alltid med det abstrakta i symbios med det konkreta. Däremot när man löser matematikuppgifter ur en lärobok så har det abstrakta extraherats ur sina sammanhang och det uppstår en problematik. Olika försök görs för att ge uppgifterna ett sammanhang genom att illustrera övningsuppgifternas problem med bilder etc., men även dessa har sina begränsningar eftersom i sådana situationer går man istället historiskt sett baklänges och utgår från det abstrakta och försöker bygga broar till det konkreta. I situationen med hävstången hjälper det dock inte nödvändigtvis de intellektuella kunskaperna att gå ut och välta upp stenar eftersom den fysiska upplevelsen är överladdad av intryck, vilket är svårt att finkamma och anpassa enligt behov till en förenklad matematisk formel.[66] Men enligt Dewey[67] så lär sig människor optimalt i praktiska situationer eftersom man då samtidigt lär sig en metod att inhämta kunskap. Traditionellt lärande med teoretiska studier kan aldrig ge samma möjlighet till inlärning som när inlärningen sker i kontakt med det som teorin beskriver. Säljö[68] menar dock att för att kunna fostra förståelsen för ett visst begrepp eller problem bör man tillsammans med klassen skapa ett kommunikativt sammanhang. Detta ställer krav på många andra aspekter, bland annat gruppens sammansättning och dess förmåga att mediera språket, men om det man tänker och ger uttryck för i gruppen om formlers innebörd blir levande och

[62] Ibid. s. 17-18.
[63] Ibid. s. 74.
[64] Ibid. s. 76-77.
[65] Ibid. s. 77-78.
[66] Säljö, R. (2000). *Lärande i praktiken: Ett sociokulturellt perspektiv*. Stockholm: Nordstedts Akademiska Förlag. s. 76-79.
[67] Hartman, S.G. Lundgren, U.P. (1980). *Individ, skola och samhälle - Pedagogiska Texter av John Dewey*. Stockholm: Bokförlaget Natur & Kultur. s. 54-55.
[68] Säljö, R. (2000). *Lärande i praktiken: Ett sociokulturellt perspektiv*. Stockholm: Nordstedts Akademiska Förlag. s. 79.

meningsfullt har man iallafall inom klassrummet givit möjligheten för djupare förståelse. Med förmågan att mediera språket menas i vilken utsträckning verkliga händelser och fysiska objekt från omvärlden kan överföras med språket till andra individer och skapa en meningsfull och livlig bild och väcka mottagarens inlevelse. Denna förmåga är på så sätt ytterst komplex och beroende inte bara på individen som medierar information, utan även på individen som tar emot information.[69] Deweys och Säljös perspektiv utesluter inte varandra, utan det handlar om att anpassa och väga tyngdpunkterna av arbetssätten enligt mål och möjligheter. Båda skiljer sig från traditionellt lärande och kan med fördel anpassas till laborativt arbete för båda är exempel på att försöka skapa sammanhang för att bygga broar mellan det abstrakta och konkreta.

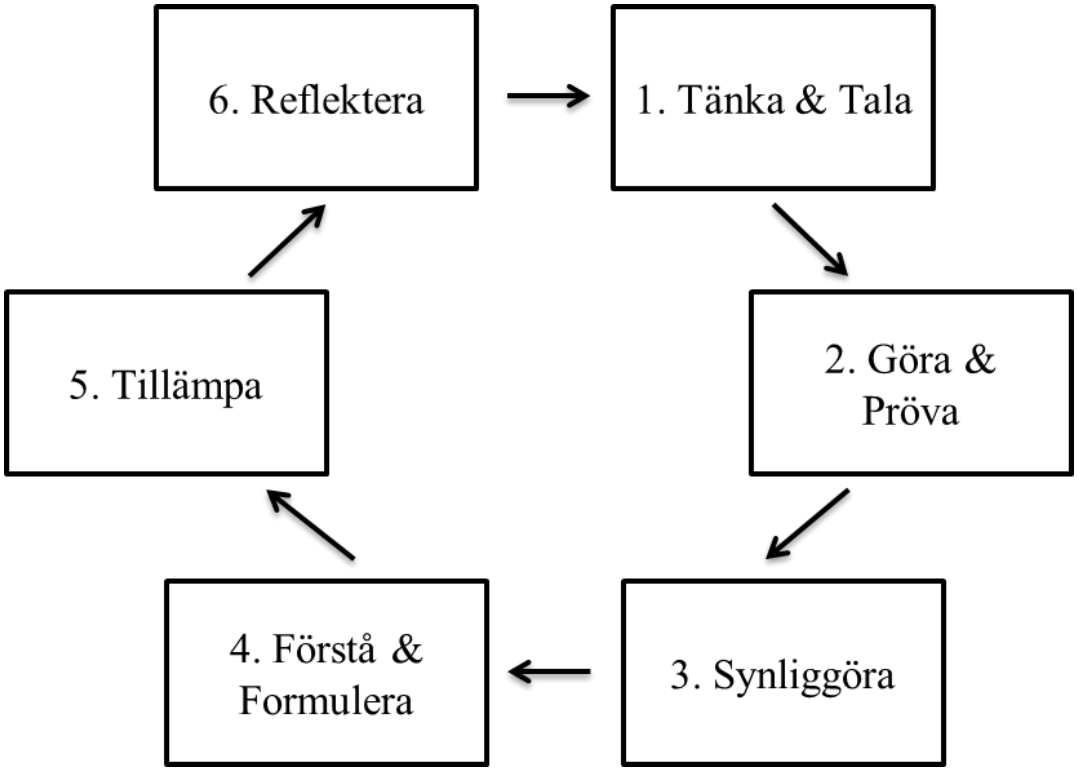
En stor del av de fysiska redskapens kraft i utbildningssyfte ligger i användandets natur, när människan arbetar med något fysiskt redskap så bidrar alla de intryck man läser av till direkt och konkret återkoppling.[70] Men det kan också vara ett medium för att visualisera och kontextualisera ett problem på ett annorlunda sätt. Att tillhandahålla ett varierat utbud av *representationsformer* kan ge en väldigt positiv inverkan på utvecklingen av förståelsen. Att utveckla förmågan att översätta ett problem mellan olika *representationsformer* bidrar även till problemlösningsförmågan och bredare kunskapsbild av begreppen i fråga.[71] När man översätter, eller omformulerar ett problem mellan olika *representationsformer* så är det omöjligt att föra över all information. Vissa problem är lättare att lösa än andra genom att först översätta dem till en viss form. Vid problemlösning är det oftast fördelaktigt att skaffa sig en översikt av problemet i olika synvinklar innan bestämmer sig för en angreppspunkt.[72] I boken *Algebra för alla* presenteras ett *fyrfältsblad* som exempel på hjälpmedel som kan framhäva detta arbetssätt i klassrummet. *Fyrfältsbladet* är uppdelat i en händelsebeskrivning och fyra fält var och en reserverat för en specifik *representationsfrom*. Detta hjälpmedel tydliggör för eleverna deras mål i att söka olika *representationsformer* i olika ordningar.[73] Vid en svår uppgift kan arbetet undrelättas om det introduceras med att fokusera på att omformulera problemet i olika uttrycksformer och på så sätt bilda förståelse för problemet. Beroende på uppgiften kan man utforma *fyrfältsbladet* på olika sätt.

[69] Ibid. s. 82-83.
[70] Ibid. s. 77-78.
[71] Bergsten, C. Häggström, J. Lindberg, L. (1997). *Algebra för alla.* Göteborg: NCM. s. 34-35.
[72] Ibid. s. 35-38.
[73] Bergsten, C. Häggström, J. Lindberg, L. (1997). *Algebra för alla.* Göteborg: NCM. s. 43.



3.2.5 Olika inlärningsnivåer i matematik

Gudrun Malmer[74] beskriver i boken *Bra matematik för alla* olika inlärningsnivåer inom matematik vilka hon menar alla bör tas i beaktning för att en effektiv undervisning ska ha möjlighet att ske för alla elever.



Den första nivån, *tänka & tala*, handlar om att undervisningen ska ta utgångspunkt ifrån något som eleverna kan känna igen, samt anpassas till deras varierande förutsättningar.

[74] Malmer, G. (2002). *Bra matematik för alla.* 2a uppl. Lund: Studentlitteratur.

Den andra nivån, *göra & pröva,* beskrivs väl av ett citat från Piaget om att handen är hjärnans förlängda redskap. Malmer menar att material som eleverna får möjlighet att bearbeta på ett kreativt sätt och undersöka rent fysiskt skapar goda förutsättningar för lärande då flera perceptionsvägar utnyttjas. Dock är det viktigt att det laborativa materialet nyttjas i ett innebördsrikt och noga planerat sammanhang.
Den tredje nivån, *synliggöra,* handlar om att eleverna ska få möjlighet att med hjälp av olika representationsformer som exempelvis bilder, diagram etc. forma en bredare bild av matematiken i problemet.
Den fjärde nivån, *förstå & formulera,* är sammankopplad med den tidigare då den handlar om att förstå och se att det finns ett abstrakt symbolspråk bakom det synliggjorda.
Den femte nivån, *tillämpa,* rör sig om att eleverna ska ges möjlighet att tillämpa den "nya" kunskapen och förståelsen i nya sammanhang. Verklig kunskap och förståelse finns inte om du inte kan tillämpa den i nya sammanhang.
Den sista, sjätte nivån, *reflektera,* handlar om att kommunicera matematiken genom diskussioner, argument och reflektioner.[75]

3.3 Sammanfattning samt resultat från tidigare forskning

Under tidigare avsnitt har den teoretiska referensramen presenterats med variationer som kan anammas vid matematikundervisning. Vad som är gemensamt för alla är att de är annorlunda från den mer traditionella formen av katederundervisning uppföljt av enskilt arbete som är vanligt förekommande inom svenska skolor. Vad för resultat har då tidigare forskning inom området redovisat?
Utifrån Potvin och Hasnis[76] 228 analyserade artiklar så behandlade 17 stycken av dessa någon form av *forskningsbaserat lärande, problembaserat lärande,* samt *hands-on* med laborativa aktiviteter. Utav dessa 17 artiklar så visade 11 stycken positiva effekter vad gäller intresse, motivation och attityd och sex stycken presenterade inga märkbara effekter. Intressant att ha i åtanke för dessa sex artiklar precis som Potvin och Hasni redogör för är att fyra av dessa sex artiklar som inte redovisade några märkbart positiva effekter behandlade *hands-on* aktiviteter utan djupare reflektion, vilket stämmer bra överens med kritik som ibland riktas mot laborativa aktiviteter inom matematik, *hands on-minds off,* som har diskuterats tidigare.
Nio artiklar behandlade någon form av *kollaborativt lärande* och dess inverkan på intresse, motivation och attityd och utav dessa nio så presenterade åtta stycken positiv inverkan. Värt att notera är emellertid att några utav dessa studier använde sig utan mer avancerade former utav kollaborativt lärande som exempelvis '*jigsaw'* (pussel på svenska) vilket innebär att större uppgifter, eller avsnitt bryts ner till mindre delar som delgrupper av klassen ansvarar för. Alla mindre delar är sedan viktiga för att lösa det ursprungliga problemet eller för att förstå hela avsnittet. *Jigsaw*-tekniken kan vara gynnsam för att förhindra ett allt för

[75] Malmer, G. (2002). *Bra matematik för alla.* 2a uppl. Lund: Studentlitteratur. s. 30-44.
[76] Potvin, P. Hasni, A. (2014). *Interest, motivation and attitude towards science and technology at K-12 levels: a systematic review of 12 years of educational research.* Studies in Science Education. 50:1.

tävlingsinriktat klassrumsklimat där elever “tävlar” *mot* varandra då de istället “tävlar” *med* varandra.[77]

Nio artiklar behandlade någon form utav kontextualisering av undervisningsmoment, och alla nio presenterade positiva effekter vad gäller antingen intresse, motivation och attityd[78].

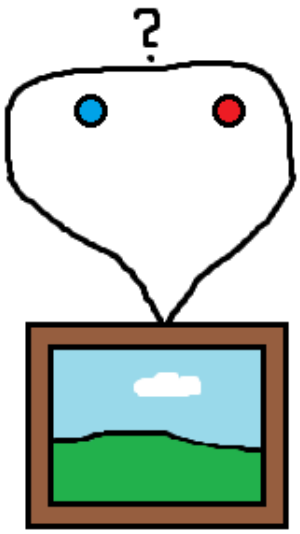
[77] Darnon, C. Buchs, C. Delphine, D. (2012). *The jigsaw technique and self-efficacy of vocational training students: a practice report.* European Journal of Psychology of Education. 27:3. pp. 439-449. s. 440.

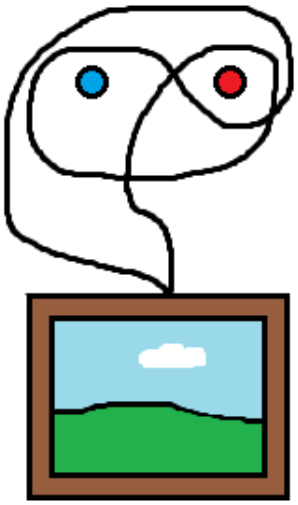
[78] Potvin, P. Hasni, A. (2014). *Interest, motivation and attitude towards science and technology at K-12 levels: a systematic review of 12 years of educational research.* Studies in Science Education. 50:1. s. 105.

4. Matematisk bakgrund

I detta avsnitt behandlas det matematiska ramverket kring området som laborationen byggs omkring.

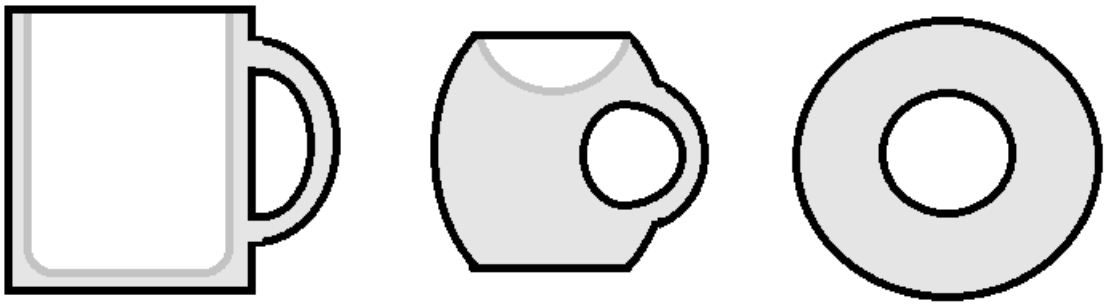
Laborationen tillhör området algebraisk topologi och behandlar problemet om hur man kan hänga upp en tavla på en vägg med hjälp utav två spikar och ett snöre på ett sådant sätt att tavlan faller till marken om någon utav spikarna skulle tas bort.





4.1 Topologi

Topologi kan beskrivas som en modern typ av geometri som likt andra geometrier lägger tonvikt på hur objekt kan relateras till varandra. När vi relaterar objekt till varandra med den Euklidiska geometrin de flesta av oss känner till bäst, så kan vi exempelvis mäta, eller väga två objekt för att svara på hur de är relaterade till varandra och vi tänker oss objektens egenskaper som längd och vikt och kan se avstånd mellan dem osv. Inom topologi så läggs tonvikten dock inte på dessa mer bekanta egenskaper. Inom topologi är det exempelvis acceptabelt att töja ut eller böja objekt så länge vi inte klipper sönder dem. Vad som behövs då, är ett annat sätt att säga hur nära relaterade två objekt är till varandra och ett exempel är att fokusera på antalet *hål* som objekt har. Ett hål är ett ganska vagt begrepp men kan tänkas på som tom rymd omfattat av något. Ett traditionellt skämt som brukar framföras inom topologiska kretsar är att en topolog inte kan skilja på en kaffekopp och en munk då båda objekten har ett hål och således kan ett objekt deformeras till det andra genom töjningar, och böjningar. Detta är ett exempel på relaterbarhet mellan två objekt som kallas för *homotopi* som kommer beskrivas mer teoretiskt senare.



Topologi omfattar även området algebraisk topologi som använder abstrakt algebra för att studera topologiska rum. För att gå vidare kommer nu några viktiga begrepp att definieras.

Ett *topologiskt rum*, X, är en mängd X med en *topologi*, vilket är en samling T utav delmängder av X med följande egenskaper:

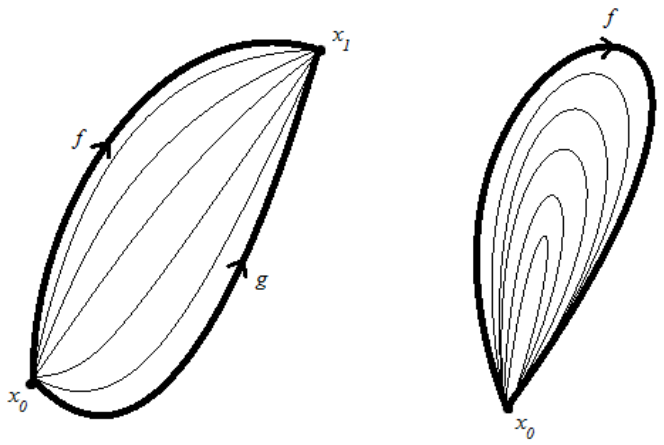
1. Den tomma mängden, Ø och X är i T.
2. Unionen av godtyckliga element i godtyckliga delmängder ur T är i T.
3. Snittet av element från godtycklig delmängd av T är i T.

Vi tittar huvudsakligen på det topologiska rummet $\mathbf{R}^2$ och använder det rummet i följande definitioner.

En *stig* i $\mathbf{R}^2$ är en kontinuerlig avbildning, $f : [0,1] \to X$. En stig har en startpunkt samt en slutpunkt och således även en riktning.

En *ögla* är en stig sådan att $f(0) = f(1) = x_0$ där x_0 kallas för baspunkten av öglan f.

En *homotopi* av stigar är en familj av avbildningar $f_t : [0,1] \to X$, $0 \leq t \leq 1$, sådana att $f_t(0) = x_0$ och $f_t(1) = x_1$ är oberoende av t och $F : [0,1] \times [0,1] \to X$, givet av $F(s,t) = f_t(s)$ är kontinuerlig. Om två stigar f och g är sammankopplade av en homotopi, så är f och g *homotopa*, vilket brukar betecknas genom $f \simeq g$.



Figur 1 visar två *homotopa* stigar *f* och *g*. För att få en mental bild går det att tänka på det som att två stigar är *homotopa* om den ena kan förflyttas till den andra på ett kontinuerligt vis, alltså genom böjningar och uttöjningar men utan att ta isär dem, medan ändpunkterna är fixa.
Även *öglor* kan vara *homotopa* vilket illustreras i figur 2 där vi ser att öglan, *f* är *homotop* med den konstanta öglan, alltså den som inte rör alls. Om öglan går runt ett hål finns det inte en sådan *homotopi* med den konstanta öglan, men olika öglor runt samma hål kan vara *homotopa* med varandra.

Utifrån idén om homotopi är det möjligt att definiera *homotopiklasser*. *Homotopiklasser* definieras som mängden av alla öglor, *g* sådana att *g* är homotopa med *f* :
$[\, f \,] = \{\, g : g \simeq f \,\}$

Innan vi går vidare med topologin med att beskriva vad en *fundamentalgrupp* är skall vi nu redogöra för vad en *grupp* är. Inom matematiken är en *grupp* en algebraisk struktur som består av en *mängd* som tillsammans med en *operation*, med vissa egenskaper, kombinerar två *element* ur *mängden* och på så sätt ger ett tredje *element* i *mängden*. *Gruppen* är med andra ord sluten.

Definitionen av en *grupp G*, kan skrivas $G = \langle M, * \rangle$ där en *mängd M*, vilket tillsammans med en *operation* $*$ uppfyller följande axiom:

1. Operationen är *associativ*.
2. Det *neutrala elementet e* tillhörande operationen existerar i mängden.
3. Varje element i mängden är *inverterbara*.

Att en operation är *associativ* menas att för varje element *a*, *b* och *c* i mängden, *M* följande gäller:

$$a * (b * c) = (a * b) * c$$

För att en operation skall vara *associativ* krävs det således att de olika ordningarna med vilka tre element ur mängden kombineras leder till samma resultat.

Att det existerar ett *neutralt element* i gruppen menas att om det existerar ett element e ur mängden *M*, så att för varje element *a*, i mängden *M*, följande gäller:

$e * a = a * e = a$

Att elementet e skall vara gruppens *neutrala element* kräver således att när det opererar med operatorn $*$ på vilket annat element a i gruppen G som helst, inte förändrar elementet a. Det *neutrala elementet* är således beroende av operationen $*$. Exempelvis så är det *neutrala elementet* vid addition 0, och vid multiplikation 1.

För att ett element *a*, i mängden *M*, skall vara *inverterbart* innebär det att finns ett element *x*, i mängden *M*, som medför följande när de kombineras med operationen $*$:

$a * x = x * a = e$

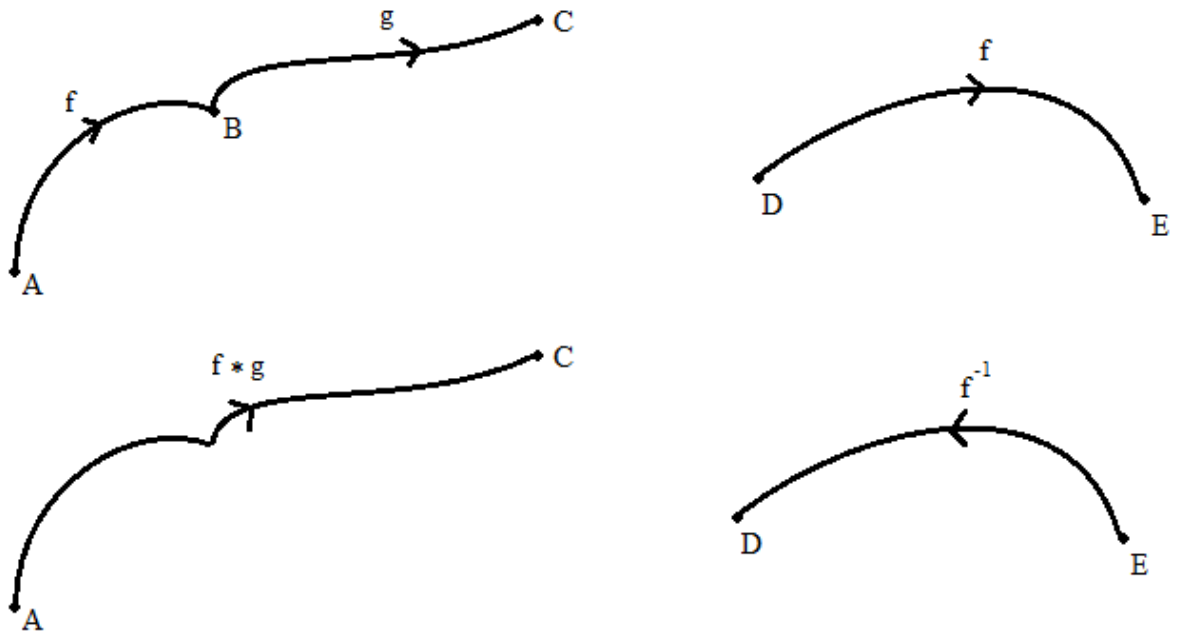
Detta betyder att *x*, är *invers* till *a*, och tvärt om. Om det går att hitta ett *x*, på detta sätt för alla element *a*, i mängden *M*, leder det till att mängden *M*, är *inverterbar* i operationen $*$. Exempelvis är *-a invers* till *a* vid addition, och 1/*a* till *a* vid multiplikation (om $a \neq 0$). Ett vanligt sätt att beteckna *inversen* är att skriva a^{-1}.

Den *abelska gruppen* är en speciell grupp. För att en grupp $G = \langle M,* \rangle$ ska kallas *abelsk* krävs det även att operationen $*$ skall vara *kommutativ*. Det innebär att för varje element *a* och *b* i mängden *M* följande gäller:

$a * b = b * a$

Att operationen är *kommutativ* innebär således att det spelar ingen roll vilken ordning termerna är sorterade. I andra ord innebär det att det är möjligt att flytta runt termerna utan att påverka resultatet av operationen/operationerna.

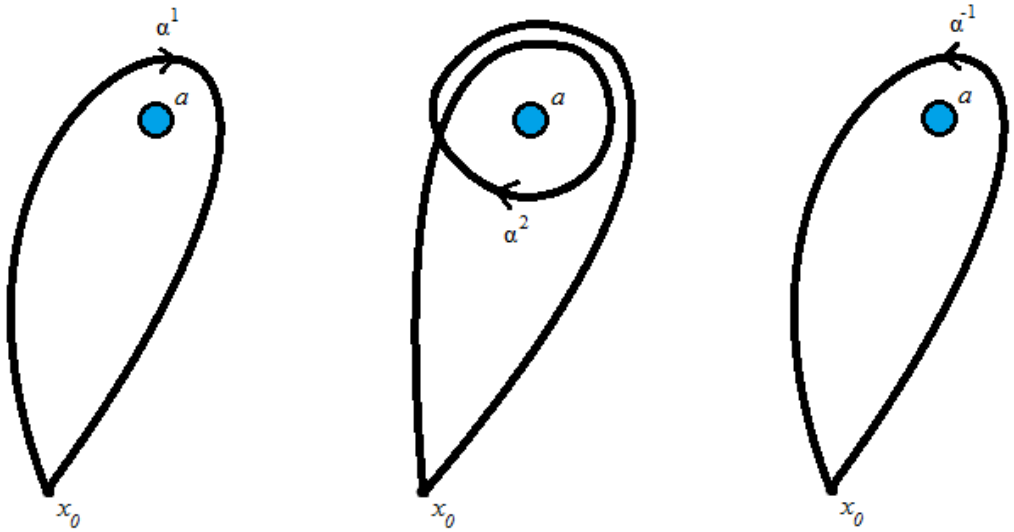
För att relatera detta till topologin så är det även möjligt att definiera operationer för *stigar* och *öglor*, och däribland sammansättning och invertering av dessa. Figurerna nedan visar två exempel.



Låt X vara ett topologiskt rum, och $x_0 \in X$. Mängden av homotopiklasser av öglor med baspunkt x_0 och med operationen $*$ kallas för *fundamentalgruppen* av X i relation till baspunkten x_0 och betecknas $\pi_1 (X , x_0)$.
Sato[79] försöker i boken *Algebraic Topology: An Intuitive Approach* att ge en intuitiv tanke av vad fundamentalgruppen ger för algebraisk bild av ett topologiskt rum, där du tänker dig att du står på ett topologiskt rum som är ett två-dimensionellt plan och har ett lasso till hands. Vi tänker oss även att det två-dimensionella planet innefattar diverse "*hål*" som ditt lasso kan sno sig runt. Om du använder ditt lasso och testar alla möjliga riktningar och noterar platser där lassot snor sig runt ett hål så skapar du dig en algebraisk bild av det topologiska rummet och denna algebraiska bild kan vi tänka på som *fundamentalgruppen.*

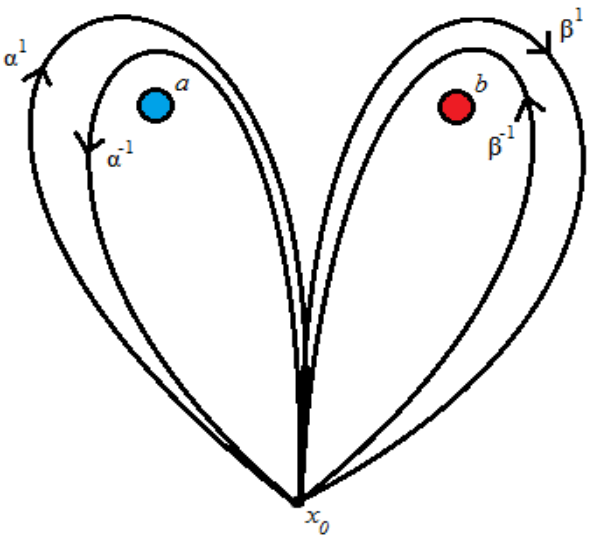
Om vi för enkelhetens skull ser på fundamentalgruppen i det topologiska rummet $\mathbf{R}^2$ med ett hål i punkten, a (Det topologiska rummet kan då skrivas $X = \mathbf{R}^2 \setminus \{a\}$). Då innehåller fundamentalgruppen alla möjliga homotopiklasser av öglor runt detta hål med utgångspunkt x_0. Om vi låter en ögla som går medsols runt hålet två gånger betecknas med α^2och en ögla som går motsols runt hålet med α^{-1}så kan vi skriva mängden av homotopiklasser som $\{..., \alpha^{-3}, \alpha^{-2}, \alpha^{-1}, \alpha^0, \alpha^1,...\}$. Fundamentalgruppen för planet med ett hål är således den fria gruppen med en generator, vilket är en konsekvens av Seifert-Van Kampen[80] teoremet. Figurerna nedan visar några exempel.

[79] Sato, H. (1996). *Algebraic Topology: An Intuitive Approach.* USA: American Mathematical Society. s. 17.
[80] Munkres, J. R. (2000). *Topology.* 2a uppl. NJ: Prentice Hall. s. 407.



4.2 Lösning till tavelproblemet

När nu alla viktiga begrepp är definierade är det dags att redogöra för en möjlig lösning till tavelproblemet som beskrevs i början av kapitlet.
Låt oss då tänka på väggen som tavlan hänger på som planet $\mathbf{R}^2$, spikarna, a och b, som två hål i planet och fästpunkten i tavlan x_0, som en baspunkt. Väggen med de två hålen kan således tolkas som $X_2 := \mathbf{R}^2 \setminus \{a, b\}$ och fundamentalgruppen för X_2 med baspunkt x_0 är således, $Y := \pi_1(X_2 , x_0)$. Målet är att försöka att finna en sammansättning av stigar, alltså ett element $y \in Y$ som är homotop med den konstanta öglan när stigen i $\mathbf{R}^2 \setminus \{a, b\}$ betraktas som en stig i antingen $\mathbf{R}^2 \setminus \{a\}$ eller $\mathbf{R}^2 \setminus \{b\}$. Detta omformande av det topologiska rummet sker genom att man drar ut en av spikarna som kan tolkas som att ett hål "täpps" till.
För att underlätta så använder vi beteckningarna som introducerades i slutet på förra avsnittet; α motsvarar en ögla runt hålet a medsols, α^{-1} motsols, β en ögla runt b medsols och β^{-1} motsols och studerar den sammansatta stigen: $\alpha * \beta * \alpha^{-1} * \beta^{-1}$



Vid utdragning av en spik, exempelvis b, så kollapsar öglorna runt hålet b vilket medför att den sammansatta stigen $\alpha * \beta * \alpha^{-1} * \beta^{-1}$ istället övergår till $\alpha * \alpha^{-1}$ som i sin tur är homotop med den konstanta öglan och således faller tavlan till marken. För enkelhetens skull definierar vi nu ett sätt att skriva dessa lösningar:
$L_2 = [\ \alpha, \beta\ ] := \alpha * \beta * \alpha^{-1} * \beta^{-1}$

Nu har vi alltså hittat en lösning till problemet när man ska hänga upp tavlan på två spikar. Det återstå att visa hur man kan gå tillväga när man ska hänga upp tavlan på tre eller fler spikar.

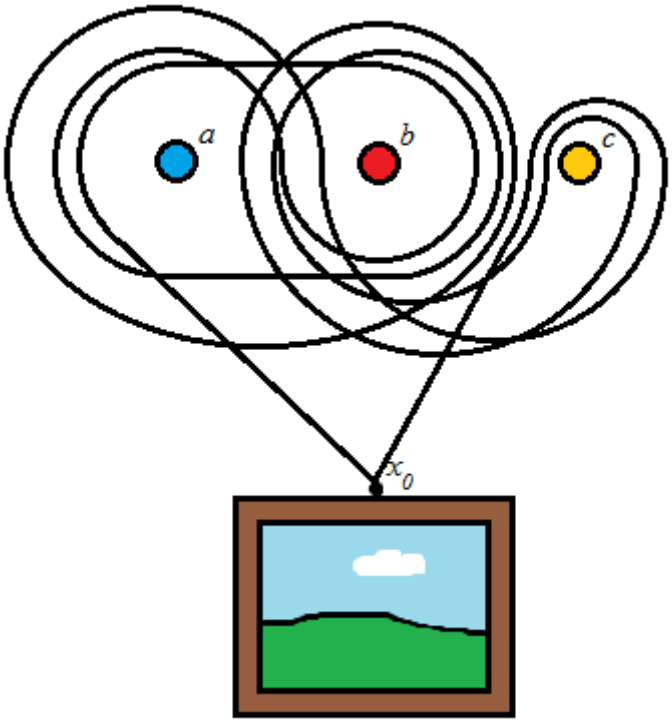
Vi vet att den sammansatta stigen $\alpha * \beta * \alpha^{-1} * \beta^{-1}$ kollapsar när en av spikarna dras ut. För enkelhetens skull döper vi den lösningen för två spikar till L_2. Om vi ser de två spikarna a och b som en spik kan vi då på samma sätt som vi hittade lösningen för två spikar få lösningen för tre spikar. På samma sätt som innan får vi då $L_3 = [\ L_2, \gamma\ ] = L_2 * \gamma * L_2^{-1} * \gamma^{-1}$. Nu återstår att ta reda på vad L_2^{-1} är. Vi vet att för att uttrycket $L_2 * L_2^{-1}$ ska kollapsa så krävs det att varje produkt i tur och ordning möter sin invers. Denna egenskap nås om man följer regeln för inversen av produkter.

$(f * g)^{-1} = g^{-1} * f^{-1}$

Eftersom, $f * g * g^{-1} * f^{-1} = e$

Inversen av en produkt är således spegelvända produkten där varje term är inverterad. På detta sätt får vi $L_2^{-1} = \beta * \alpha * \beta^{-1} * \alpha^{-1}$

På så sätt har vi även en lösning för tre spikar, nämligen $L_3 = L_2 * \gamma * L_2^{-1} * \gamma^{-1} =$
$= \alpha * \beta * \alpha^{-1} * \beta^{-1} * \gamma * \beta * \alpha * \beta^{-1} * \alpha^{-1} * \gamma^{-1}$
Lösningen finns illustrerad i figuren nedan.



Viktigt att påpeka med denna figur är att den inte visar i vilken ordning tråden ligger, dvs vilken del av tråden som är underst eller överst vid de olika skärningspunkterna. Om man ändrar denna ordning kan det ge olika resultat för lösningen genom att till exempel skapa en knut. Om man inte följer lösningen term för term finns det risk att man råkar lägga en knut på tråden och att den på så sätt inte nödvändigtvis faller när en viss spik dras ut.

Med induktionsbevis kan man på så sätt enkelt bevisa att det går att hitta en lösning oavsett hur många spikar man har. Som man ser blir lösningarna på detta sätt väldigt långa. L_2 har fyra termer och L_3 har tio termer. För att fylla i en tabell med antalet termer beroende av antalet spikar använder vi följande samband:

$L_{k+1} = 2L_k + 2$

antal spikar k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
antal termer i L_k	4	10	22	46	94	190	382	766	1534

Dessa är inte de enda lösningarna, och inte heller nödvändigtvis de kortaste.
Ett annat problem som kan vara intressant att undersöka är exempelvis att tavlan skall falla när precis två godtyckligt valda spikar dras ut. Nedan följer ett lösningsförslag för problemet.

Huvudidén med detta problem är att när en godtycklig spik dras ut så skall tavlans upphängning på de resterande spikarna vara homotopisk med en lösning för att dra ut en godtycklig spik. Det finns olika tillvägagångssätt för att hitta en lösning. Ett sådant tillvägagångssätt är att utgå från L_2 och undersöka var man skulle kunna passa in den tredje spiken så att alla öglor har två olika termer mellan sig och sin invers.

$$L_2 = \alpha * \beta * \alpha^{-1} * \beta^{-1}$$

Här har båda öglorna α och β endast en annan term mellan sig och sin invers. Vi sätter in γ mellan de och sina inverser och avslutar med γ^{-1}.

$$\alpha * \beta * \gamma * \alpha^{-1} * \beta^{-1} * \gamma^{-1}$$

På detta vis har vi fått en lösning till problemet, och den kan skrivas som:

$$L_{2\ av\ 3\ spikar} = [\ \alpha, \beta, \gamma\ ] = \alpha * \beta * \gamma * \alpha^{-1} * \beta^{-1} * \gamma^{-1}$$

Samma enkla procedur går inte att applicera på problemet att hänga en tavla på fyra spikar där tavlan faller ner när precis två godtyckligt valda spikar dras ut. Den kan däremot användas för att hitta en lösning när precis tre av fyra spikar dras ut.

$$L_{3\ av\ 4\ spikar} = [\ \alpha, \beta, \gamma, \delta\ ] = \alpha * \beta * \gamma * \delta * \alpha^{-1} * \beta^{-1} * \gamma^{-1} * \delta^{-1}$$

I detta fall har varje ögla tre olika termer mellan sig och sin invers.

Istället för att försöka lösa det svåra problemet med att hänga upp tavlan på fyra spikar så att den faller när två godtyckligt valda spikar dras ut kan man göra om problemet för att göra det enklare att hantera. De fyra spikarna kan delas upp i två par med olika färger. Det nya problemet blir då att få tavlan att falla när två spikar av samma färg dras ut. Ett sätt att lösa det problemet är att se de två paren av spikar som två sammansatta spikar, vi tittar då på de sammansatta stigarna runt dessa spikar och kallar dem för $X = \alpha * \beta$ och $Y = \gamma * \delta$. Då kan en lösning skrivas på följande sätt:

$$L_{X,Y} = [\ X, Y\ ] = X * Y * X^{-1} * Y^{-1} = \alpha * \beta * \gamma * \delta * \beta^{-1} * \alpha^{-1} * \delta^{-1} * \gamma^{-1}$$

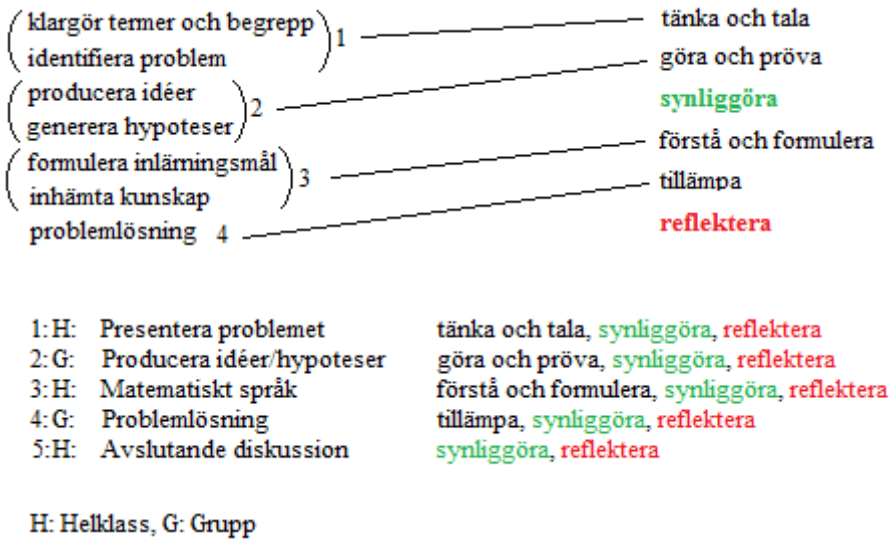
5. Laborationen

I detta avsnitt presenteras de aspekter ur litteraturstudien som tagits i åtanke vid utformandet av laborationen inom topologi. Lärarhandledningen som utvecklats vilken mer utförligt beskriver upplägget för laborationen finns bifogad under 'Bilagor' i kapitel 9.

Elevbesöket utformas med litteraturstudien som grund där författarna till examensarbetet har studerat olika arbetssätt som har möjlighet att motivera och fånga intresse hos eleverna. Vid utformandet av elevbesöket vägs dessa olika arbetssätt mot varandra och samtidigt avgör vilka av de olika delelement som passar ihop och samtidigt passar till en matematiklaboration på Vetenskapens Hus och vårat val av matematiskt innehåll.

Topologi är en fördjupning av matematiken som vanligtvis inte behandlas på gymnasienivå. Därför är det problematiskt att utföra en laboration i det med forskningsbaserat lärande med hög frihetsgrad. Frihetsgraden beror naturligtvis även på elevernas prestationer, men allmänt så kommer lärandet behöva stöttas en del genom att läraren ställer frågor eller på annat sätt hjälper eleverna att själva lösa problemen i en stor del av det laborativa arbetet.

De sju stegen under problembaserat lärande är ursprungligen utvecklade för att kunna anpassas till större problem som kräver mycket tid för att lösa. Det är alltså mycket möjligt att de olika stegen är utspridda över flera lektionstillfällen, inklusive eget arbete i form av inhämtande av kunskap ur litteratur etc. För att anpassa till innehållet och målgruppen för elevbesöket så behöver de sju stegen kortas ner och förenklas något. Detta åstadkoms med hjälp av Malmers sex inlärningsnivåer för matematik.



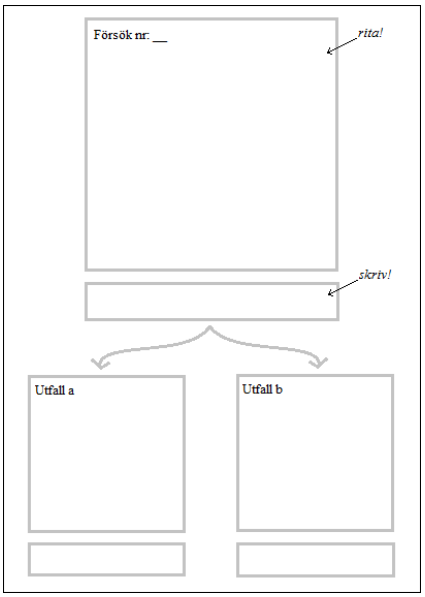
Det vi kommer fram till är, som figur X visar, fem steg. Dessa är menade att delvis visa tillfällen då läraren behöver gå in med ny information, men även för att se vad som det kommer läggas fokus på vid de olika stegen. Vi vill undvika att läraren hjälper till för mycket, men på grund av de olika restriktionerna som nämnts ovan så har vi kommit fram till vad som är nödvändigt. Att synliggöra och att reflektera är en viktig del i kommunikation och

kommer vara en del i varje moment som en förberedelse inför den avslutande diskussionen. Laborationen utvecklas på ett sådant sätt att matematiken är vital för att lösa de olika problemställningarna kopplade till laborationen med syftet att försöka göra matematiken attraktiv och levande så att eleverna får upplevelsen att de har stor hjälp av matematiken när de löser problemen. Det matematiska språket som behövs för kunna beskriva en "upphängning" rent matematiskt ämnar vi för att eleverna tillsammans med lärare ska komma fram till gemensamt. Med fokus på visualisering och diskussion blir arbetssättet, som är kopplat till det sociokulturella perspektivet på lärande, ett sätt att försöka skapa ett kommunikativt sammanhang där abstrakta algebraiska uttryck kan förmedlas och tas emot med inlevelse.

Både PBL och IBL grundar sig i grupparbeten. Ett ytligt sätt att berättiga grupparbete i vår laboration är att det laborativa materialet kräver två elever för att kunna användas till fullo (en elev håller ut ett antal fingrar som den andra eleven hänger tavlan på). Dessutom är det fördelaktigt ifall en tredje elev antecknar genom att rita och skriva de olika försöken så att man senare tillsammans kan se varför det fungerade/inte fungerade.

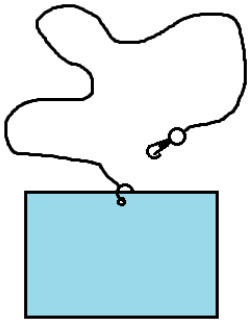
Vad gäller kontextualisering så ämnar vi att försöka föra det matematiska innehållet närmare något som eleverna kan relatera till. Att hänga upp tavlor är möjligtvis inte något vardagsnära till den mån att eleverna gör det ofta, men trots allt något de kan relatera till.

En stor del av syftet med laborationen är att eleverna ska få erfarenheter av annorlunda sätt att se på matematik. Matematik är ett språk, och vi vill visa hur språket kan användas för att enklare kunna lösa ett svårt problem. Ett sätt att visa detta är att i samband med laborationstillfället försöka leda eleverna till att anteckna och översätta sina tankar och gissningar mellan olika representationsformer. I ett försök att få eleverna in på denna bana vill vi dela ut en anpassad version av *fyrfältsbladet*. För att tydliggöra syftet med laborationen har vi utvecklat en variation på *fyrfältsbladet*.



Denna variation går ut på att tydliggöra för eleverna målet att undersöka olika upphängningar genom att jämföra vad som händer med tavlan beroende på vilken av de två nålarna man drar ut. Den lägger även på samma sätt som *fyrfältsbladet* fokus på att representera upphängningen och de olika utfallen både i bild och text, men nu bara i två fält per utfall och grundtillstånd. De kan skrivas ut så att det finns plats för fyra försök på ett A4, fram och baksida. Detta papper fungerar bra som introduktion till arbetssättet när eleverna försöker lösa problemet med två nålar. När arbetet går över till lite svårare problem så har de redan fått en liten vägledning och kan anteckna mer effektivt på blanka papper.

Syftet med det laborativa materialet är att det ska bygga en bro mellan det abstrakta och det konkreta. Sättet som vi utformar materialet har även målet att underlätta uppfattningen av vissa matematiska begrepp som stigar, öglor och homotopi. Tvåfältsbladet blir ett sätt att stärka denna bro ytterligare för att undvika att arbetet blir *hands on - minds off*. En annan positiv effekt som kommer från att arbeta med de fysiska verktygen som tillhör laborationen är att eleverna själva enkelt kan kontrollera ifall en lösning fungerar eller inte. I figuren nedan visas en prototyp på det laborativa materialet. Snöret fästs till en *ögla* av eleverna själva efter att de låtit snöret gå i en *stig* runt de olika nålarna.



6. Resultat

I detta kapitel så presenteras resultaten från enkätundersökningarna samt de fokusgrupper som hölls i koppling till de testtillfällen som hölls.

Laborationen testades vid tre olika tillfällen där elevklasser kom på besök till Vetenskapens hus. De tre klasserna var gymnasiala vari två av dessa gick i årskurs 3 och en i årskurs 2. (De resterande två klasserna gick i årskurs 9 på grundskolan.)
Under besökstillfällena där författarna till uppsatsen agerade lärare så upplevde vi att näst intill alla elever arbetade aktivt med problemen kopplade till laborationen. Vi upplevde även att eleverna var motiverade till problemlösningen och uppvisade intresse.

6.1 Enkätundersökningen

Syftet med enkätundersökningen var att evaluera laborationen och undervisningsmetoden som användes med avseende på intresse och motivation och få en bredd på datat. Nedan så presenteras det inhämtade datat från enkätundersökningarna som samlades in i samband med besökstillfällena.

	Besök 1	Besök 2	Besök 3	Totalt
1: Jag är:				(Antal)
Man	11	7	8	26
Kvinna	5	7	1	13
2: Jag är intresserad av matematik.				(Medel)
Gradera 1-6	5.41	5.14	4.33	5.06
3: Jag är motiverad av matematik.				(Medel)
Gradera 1-6	5.00	5.00	4.33	4.85
4: Vad är det som motiverar dig till att lösa matematikuppgifter?				(Andel)
Få bra betyg	0.10	0.24	0.40	0.22
Inte göra andra besvikna	0.11	0.04	0.03	0.07
Träna matematisk förmåga	0.18	0.15	0.32	0.20
Uppgiften är intressant	0.27	0.20	0.02	0.19
Tillfredställelsen av att klara en uppgift	0.35	0.30	0.22	0.30
Annat?	0.00	0.07	0.00	0.03
6: Vad tycker du om matematikundervisningen i skolan?				(Medel)
Gradera intressant	4.88	4.43	4.33	4.59
Gradera motiverande	4.00	4.57	4.22	4.26
Gradera roligt	4.38	4.21	4.33	4.31
7: Vad tyckte du om laborationen?				(Medel)

Gradera intressant 1-6:	5.00	5.39	5.00	5.14
Gradera motiverande 1-6:	4.50	4.43	4.78	4.54
Gradera rolig 1-6:	4.69	5.14	5.11	4.95
Gradera lärorik 1-6:	4.41	4.82	5.00	4.69
8: Fick du grepp om kopplingen mellan matematiken och tavelproblemet?	(Antal)			(Andel)
Ja	16	12	7	0.90
Nej	0	0	1	0.03
Vet ej	0	2	1	0.08
9: Har du fått ett nytt perspektiv på vad matematik kan vara?	(Antal)			(Andel)
Ja	9	10	5	0.62
Nej	4	4	2	0.26
Vet ej	3	0	2	0.13
10: Jag går ifrån laborationen med ett större intresse för matematik.	(Antal)			(Andel)
Ja	5	9	1	0.38
Nej	6	1	2	0.23
Vet ej	5	4	6	0.38
11: Jag går ifrån laborationen med en högre motivation för matematikämnet.	(Antal)			(Andel)
Ja	4	8	3	0.38
Nej	6	4	3	0.33
Vet ej	6	2	3	0.28
12: Jag tycker att matematikämnet skulle bli mer intressant om man arbetade mer med problemlösning i grupp och laborativt arbete.	(Antal)			(Andel)
Ja	8	7	7	0.56
Nej	2	0	0	0.05
Vet ej	6	7	2	0.38
13: Jag skulle få större motivation mot matematikämnet om man arbetade mer med problemlösning i grupp och laborativt arbete.	(Antal)			(Andel)
Ja	6	6	6	0.46
Nej	5	1	0	0.15
Vet ej	5	7	3	0.38

Fråga 4 var formulerad så att eleverna skulle markera de alternativ som motiverade dem mest genom att gradera de valda alternativen där det alternativet som motiverade eleven mest skulle representeras av en 1:a, nästa alternativ om nu eleven hade valt flera skulle då markeras med en 2:a och så vidare. Detta system visade sig vara för komplicerat för vad som

var syftet med frågan. 16 elever missade graderingen och markerade flera alternativ med kryss. 9 elever markerade alla alternativ och graderade, men det är omöjligt att veta om alla alternativ valdes för att detta motiverade eleven speciellt eller om eleven trodde att alla alternativ skulle graderas. Oavsett fallet så bidrar detta i alla fall med problem för sammanställningen av datat. Därför gjordes en avvägning för att försöka ta tillvara på alla elevers svar optimalt. Det speciella fallet där en elev som bara svarat med ett alternativ jämfördes med en elev som svarat på alla alternativ. För att undvika att på ett orättvist sätt låta elever med många markerade alternativ påverka resultatet mest blev lösningen således att varje elev har en poäng att dela ut. Om nu endast ett svar ges så får detta alternativ en poäng. Om tre graderade svar ges så får elevens första svar tilldelat 5/(5+4+3) poäng, vilket motsvarar drygt 40 % av den totala poängen som delas ut. Detta löser inte problemet till fullo ty det som motiverar denna elev mest räknas bara som knappt hälften av eleven som bara gav ett svar för ett specifikt alternativ, men den användes för att försöka få med så mycket av datat som möjlig, men som konsekvens medför detta att validiteten för den frågan är lägre.

Fråga 5 var formulerad så att eleverna fick skriva fritt vilken undervisning inom matematik de var mest vana vid. Denna fråga utgav begränsad mängd data samt begränsad datakvalitet men datat kompletterades under fokusgrupperna.

Genom hela enkäten fanns det möjlighet för eleverna att ge kommentarer till sina val. Dessa har försökts ta del av på ett bra sätt men vid fråga 7 så bidrog alla besöksgrupper med extra mycket kommentarer och feedback på laborationen. Huvudparten av dessa finns sammanfattade i tabellen nedan. Elever som svarade fem eller högre står skiljt från elever som svarade lägre än fem.

Kommentar från elev som svarade 5 eller högre		Kommentar från elev som svarade lägre än 5	
7 a: Tyckte du laborationen var intressant? 1-6			
6	Jag blev förvånad över hur pass roligt det var. Det var väldigt intressant att se att det fungerade och att kunna göra ett språk av det och systematisera det på det sättet.	4	Kul, informativ om vad för matte som existerar.
6	Vi tog något som känns jättegodtyckligt och kopplar det jättefint till matte.	4	Mer praktikexempel och bättre förståelse.
6	Kul att kunna hitta ett matematiskt uttryck för något som vid första anblick känns väldigt komplext att finna ett ma.uttryck till.	4	Vill bara räkna tal och bli bättre att förklara.
6	Det var intressant att kunna vara praktisk och sedan leta efter en teoretisk förklaring.	3.5	roligt att jobba själv och tänka. Möjligtvis lite lång förklaring för [tavelproblemet med 3 spikar].
6	Kul med något "vardagligt" inblandat!		
6	Att man kan lösa det matematiskt var kul att se.		
5	Nytt sätt att se på problem.		

5	Nytänkande.		
5	Tillräckligt interaktiv.		
7 b: Tyckte du laborationen var motiverande? 1-6			
6	Man blev motiverad att fortsätta prova för att se när det fungerade.	4	Ta reda på mer kan vara intressant.
6	Roligt/nytt sätt att jobba med matte.	4	I början kunde den kännas svårtillgänglig.
6	Jag tyckte det var jättekul att kunna lösa det utan att tänka på spikarna.	4	Inte verka sämst i gruppen.
5	Varför bör man kunna detta egentligen? Men själva grejen att kunna använda matten var skoj.	4	Lite om topologi, dock inte fullständigt banbrytande.
5	Man upptäckte nya sätt att använda matematik på.	3	Ger inte så mycket för matematiken jag sysslar med just nu.
		2	Hamnade i en grupp där en person tog mycket plats.
7 c: Tyckte du laborationen var rolig? 1-6			
6	Kul att se något fysiskt.	4	Det kan vara tråkigt ibland om man inte vet hur man förklarar.
6	Mycket individuell involvering.	4	Roligt att arbeta i grupp och utveckla idéer.
6	Utmanande, på ett inte allt för svårt sätt.	4	Roligt med praktiskt.
5	Lite tråkigt när man kom fram till ett stopp.	3	Min grupp klarade sig utan mig.
5	Kul att göra andra sorts problem än det man gör i skolan!		
5	Som sagt, häftigt att det man räknade på pappret gav resultat.		
7 d: Tyckte du laborationen var lärorik 1-6			
6	Man fick en bra inblick och introduktion till det vi jobbade med.	4.5	Vet att man kan göra mattematiska språk av allt nu men på provet vet jag ej hur mycket som detta hjälper.
6	Vi har aldrig gjort något experimentellt i matte förut.	4.5	Kanske lite överkurs just nu.
6	Häftiga saker som man löser med matte.	4	Jag har lite svårt att se vad jag kan ha för användning av detta just nu.
5	Den var lärorik för mattens skull men jag såg inte helt den praktiska tillämpningen.	4	Redan lärt mig hur man räknar sådant men kul att applicera på verkligheten.
5	Donut = kaffekopp.	4	Inte alltför mycket nytt.
		3	Mer inspirerande än lärorik då det inte var så mycket teori.
		3	Svårt att relatera laborationen med den matte jag är van vid.

Vid fråga 12 och 13 där eleverna skulle svara på om de tyckte att laborationens arbetssätt skulle öka intresse och motivation om de användes mer i undervisningen så svarade många från besök två att de inte visste, men med en kommentar att det skulle vara bra om man arbetade så ibland eftersom de tyckte traditionell undervisning fortfarande behövdes.
Eleverna från första besöket svarade väldigt blandat, med olika kommentarer gällande att de redan var väldigt motiverade och intresserade av matematik samt att de redan jobbar mycket med olika typer av problemlösning. Samma gäller för deras svar på fråga 10 och 11.

6.2 Fokusgrupperna

Syftet med fokusgrupperna var att nå ett djup i undersökningen som inte kan garanteras vid enkätundersökningar. Nedan så presenteras intressanta aspekter som framkom vid intervjutillfällena.

6.2.1 Fokusgrupp 1

Under gruppintervjun så framkom det att eleverna tyckte att laborationen var väldigt intressant och var väldigt motiverade till att arbeta med problemlösningen under laborationstillfället.
Under diskussionen om vad som gjorde laborationen intressant och vad som gjorde dem motiverade under besökstillfället så menade dem att det mest var kopplat till det matematiska innehållet och problemen i sig. Något som framkom emellertid var att insikten av att se det praktiska problemet ur ett matematiskt perspektiv väckte ett intresse, alltså förmågan att översätta problemet mellan olika representationsformer. En elev tog upp att det var motiverande att de hade något fysiskt att arbeta med och testa sina lösningar.
Eleverna i denna grupp gick i en matematikklass och visade sig vara vana vid undervisningsmetoden som användes vid besöket, men menade att de rent allmänt föredrog denna typ av undervisning framför en mer traditionell undervisningsmetod. De hävdade att det blir mer intressant och motiverande att få komma fram till insikter och samband själva, än att passivt sitta och lyssna. En elev påpekade att problemlösning är väldigt roligt, men att det är viktigt att man lyckas. Vad gäller arbete med problemlösning i grupp så menade eleverna att det kan vara mer motiverande och intresseväckande, men att det beror mycket på vilka man arbetar med och menade att det kan ha negativ inverkan om den nivåskillnaden mellan gruppmedlemmarna är för stora.
Eleverna menade även att de fick förståelse för matematiken bakom problemen och att de inte bara jobbade praktiskt utan att reflektera och fundera.

6.2.1 Fokusgrupp 2

Även under denna gruppintervju så menade eleverna att de tyckte att laborationen var intressant och att de kände en hög motivation för att arbeta med problemlösningen under besökstillfället. Till skillnad från eleverna under den första fokusgruppen så var dessa elever inte vana vid den typen av undervisning och laborativ matematik som de fick pröva på under besökstillfället. Eleverna i denna grupp var istället vana vid en mer “traditionell”

undervisningsmodell där läraren har genomgång följt av att de räknar själva i matematikboken. En elev påpekade under intervjun att den traditionella undervisningsmodellen var tråkig och att matematik skulle bli mycket roligare om man arbetade med matematik mer på det sättet som de gjorde under besökstillfället.
Vid diskussionen om vad som gjorde laborationen intressant så framkom det att som tidigare nämnts att arbetssättet och undervisningsmetoden bidrog till intresse, men även att kunna se något teoretiskt och göra det praktiskt. De menade att i matematiken så får man ofta acceptera att det är på ett visst sätt men att under laborationen kunde man pröva och se att det faktiskt stämmer. Två elever tog även upp att det var intressant då problemen hade en vardaglig anknytning.
Vad gäller den delen av undervisningsmodellen där eleverna fick reflektera mycket själva och att själva försöka upptäcka samband så menade två elever att det kände att de skulle lära sig mer om de arbetade på det sättet, medan en elev påpekade att det är viktigt att det inte flummas iväg.
Alla elever menade emellertid att de fick förståelse för matematiken bakom och att de således var aktiverade både praktiskt och mentalt och att en orsak till detta var arbetsbladen som de hade att arbeta med.
Vid diskussionen om varför de tyckte att laborationen var motiverande så menade de att det var motiverande att försöka komma till insikter själva och se mönster, samt att de kände ett välbehag efter att ha kommit fram till en lösning eller då de får en “aha-upplevelse”.
Eleverna var överlag också tillfreds med att arbeta i grupp då de menade att det var roligt då de kunde bolla idéer med varandra.

6.2.1 Fokusgrupp 3

Eleverna som medverkade i denna fokusgrupp tyckte även att laborationen var intressant och motiverande. Eleverna menade att problemet i sig och matematiken bakom problemet var en bidragande faktor till att det var intressant och motiverande men även de hade fått nya perspektiv på vad matematik kan vara och hur matematik går att använda som ett hjälpmedel eller redskap i situationer som de inte tänkt på innan. En annan motivationsfaktor var att de fick upptäcka mycket själva menade dem. En elev menade att en intressefaktor var att de faktiskt fick arbeta med något fysiskt, vilket de inte var vana vid.
Även eleverna i denna grupp var vana vid en mer traditionell undervisningsmodell där läraren håller i genomgångar följt av att de räknar själva och ansåg att den typen av undervisning kan var intressant och motiverande till en viss nivå, men att det kan bli tråkigt, ointressant samt omotiverande i längden. De ansåg att det skulle vara mer intresseväckande att arbeta med matematik på det sättet som de gjorde under besöket men en elev påpekade att det kanske skulle ta för lång tid i längden. De diskuterade även att denna typ av undervisningsmodell samt arbetssätt där de fick möjlighet att komma fram till mycket insikter själva kan vara bättre för att lära sig, då man får tänka mycket själv och själv komma fram till insikter.
Alla eleverna i fokusgruppen menade även att arbetsbladet hade fungerat bra i frågan om att få förståelse för matematiken bakom och kunna representera problemet abstrakt så väl som konkret.

7. Analys och Diskussion

I detta kapitel så diskuteras och analyseras resultaten från enkätundersökningarna samt de fokusgrupper utifrån arbetets mål och syfte.

Något som tydligt framgår ur datat presenterat i resultatdelen ovan är att eleverna som var med och testade laborationen överlag tyckte att besöket var intressant samt att det kände sig motiverade under laborationspasset. Att alla elever överlag hade uppfattningen att laborationen i sig var intressant visar på att den fungerade bra för att fånga ett så kallat situationsbaserat intresse[81] som diskuterats tidigare i teorikapitlet.
Värt att nämna är att eleverna även verkade ha roligt och att de upplevde laborationen som lärorik.
Något som enkätdatat visar såväl som uppfattningen författarna till studien fick under besöken tillsammans med datat från fokusgrupperna är att första gruppens elever hade ett större intresse för matematik innan besöket följt av andra gruppen och slutligen tredje gruppen. Första gruppen visade även att det som motiverar dem rent allmänt när det gäller matematik baseras mer på så kallade inre motivationsfaktorer[82] så som att uppgiften är intressant, medan grupp tre som hade ett lägre intresse för matematik rent allmänt motiverades mer av yttre motivationsfaktorer[83] så som att för få bra betyg.
Enkätdatat visar även att första gruppen som hade störst intresse för matematik ansåg sig tycka att den matematikundervisning som de var vana vid var mer intressant jämte vad grupp två och grupp tre tyckte om den undervisning de var vana vid.

Vad var det då som bidrog till att eleverna som testade laborationen överlag hade uppfattningen att de tyckte att besöket var intressant och motiverande, och hur går det att problematisera resultatet?
Den första elevgruppen som hade ett stort intresse för matematik redan innan laborationen menade att en stor bidragande orsak till det uppvisade intresset var att problemen och matematiken i sig var intressant. Eleverna var dock som tidigare nämnts redan vana vid och arbetade ofta efter den undervisningsmodell som laborationen i mångt och mycket byggdes kring. Under fokusgruppen med de eleverna framkom det emellertid att de föredrog den typen av laborativ undervisning med byggd kring problembaserat lärande utifrån ett intresseväckande och motivationsskapande perspektiv. Med detta i åtanke är det dock svårt att fastslå vad som var den främsta bidragande faktorn till att den första gruppen överlag ansåg att besöket var intresseväckande och motivationsskapande.
Den andra och tredje gruppen var som tidigare nämnts dock inte speciellt bekanta med laborativ matematikundervisning med grund i problembaserat lärande, utan var istället mer familjära med en mer traditionell undervisningsmodell. Resultatet från de senare två grupperna visade emellertid att även de fann besöket intresseväckande och motiverande,

[81] Krapp, A. (2002). *Structural and dynamic aspects of interest development: theoretical considerations from an ontogenetic perspective.* Learning and Instruction 12. pp. 383-409.
[82] Deci, E. Ryan, R. (2000). *The "What" and "Why" of Goal Pursuits: Human Needs and the Self-Determination of Behavior.* Psychological Inquiry. 11:4. pp. 227-268.
[83] Ibid.

vilket skulle kunna tyda på att en stor bidragande faktor var arbetssättet och undervisningsmodellen i fråga. Detta bekräftas även utifrån det som faktiskt kom fram vid fokusgrupperna med den andra och tredje gruppen, och går även att utläsa från diverse kommentarer som individer ur de senare två grupperna skrev i enkätundersökningen. Ytterligare en faktor som är värd att ta upp för att problematisera resultatet kring vad som faktiskt bidrog till resultatet och som möjligtvis kan påverka resultatets validitet är nyhetseffekten. Med nyhetseffekten (novelty effect på engelska) menas hur ett nytt arbetssätt eller införande av nya metoder eller ny teknologi kan bidra till ett ökat intresse och engagemang just för att det är något nytt och skiljt från vad de som deltar är vana vid sen tidigare. Som tidigare nämnt så var två av tre utav testklasserna inte vana vid arbetssättet och undervisningsmodellen sen tidigare och en bidragande orsak till det uppvisade intresset och motivationen skulle kunna vara att det just skiljer sig från vad de är vana vid och nyhetens behag i sig. Det finns flera andra möjliga faktorer till att nyhetseffekten skulle ha kunnat vara extra stor i det här fallet, som att de till exempel arbetade i halvklass och att undervisningen skedde i en ny miljö utanför klassrummet. Detta skulle i så fall ha kunnat leda till att eleverna kände ett större kollektivt intresse och motivation inom grupperna än vad de vanligtvis kände i klassen.

Utifrån resultatet från enkätfrågor 6 och 7 är det möjligt att fastställa att totalt sett ansåg samtliga grupper att laborationen i sin helhet var roligare, intressantare och mer motiverande än den undervisning de var vana med från skolan. Även första gruppen svarade på detta sätt, men med frekvent återkommande kommentarer om att laborationen inte var speciellt lärorik eller relevant för sina nuvarande studier. Anmärkningsvärt är att elever från olika grupper som svarat att de hade låg motivation och intresse för matematik gav laborationen väldigt höga poäng vad gäller intresse och motivation vilket kan tyda på att arbetssättet och undervisningsmodellen även fungerar väl för elever med lågt intresse och låg motivation för matematik. Andelen elever med svalt intresse och motivation kan dock ha varit för liten för att kunna dra någon slutsats kring detta.

När eleverna frågades i enkätundersökningen om de fått ett högre intresse och motivation för matematikämnet gav de ganska blandade svar. Ungefär en fjärdedel av eleverna svarade att de inte upplevde ett högre intresse eller motivation för matematikämnet efter laborationen och resten delades jämnt mellan att de inte visste och att de faktiskt upplevde ett större intresse alternativ större motivation för matematikämnet efter besöket. En gemensam nämnare för de kommentarer för de som svarade nej eller att de inte visste, var att de redan var ganska motiverade eller intresserade. Tidigare i examensarbetet har det redogjorts för skillnaden mellan situationsbaserat intresse och personligt intresse. Majoriteten av eleverna under testbesöken fann laborationen intressant och resultatet visar således att laborativ matematikundervisning med grund i problembaserat lärande kan fungera bra för att fånga ett så kallat situationsbaserat intresse. Att hela 38 % av eleverna som deltog under testbesöken svarade att de går ifrån besöket med ett större intresse för matematik känner vi är mycket anmärkningsvärt men skulle kunna tyda på att undervisningsmodellen och arbetssättet även kan bidra till utvecklingen av ett personligt intresse för matematik hos eleverna. De elever som svarade nej eller att de inte visste om deras intresse för matematik hade ökat efter

besöket hade sammansatt graderat sitt intresse på 5,03. Detta är ur enkätdatats synpunkt ett högt intresse. Det torde sig vara svårt att skapa ett högre intresse för matematik generellt med bara en instans om intresset redan är högt.

Som tidigare nämnt så är det möjligt att skilja på två typer av motivation, nämligen inre motivation, där en elevs engagemang för en aktivitet grundar sig i att hen finner den intressant eller glädjande att engagera sig i, medan engagemang på grund av yttre motivation beror mer på yttre effekter som för att få beröm eller bra betyg. Att väcka elevers inre motivation betraktas som något eftersträvansvärt. Resultatet från enkätundersökningen visar att eleverna kände sig motiverade till att delta i aktiviteten. En intressant frågeställning är emellertid huruvida motivationen främst berodde på yttre eller inre faktorer. Yttre motivationsfaktorer så som betyg tilldelades inte under aktiviteten, dock så var testklassernas lärare närvarande vilket skulle kunna vara en yttre motivationsfaktor i sig, men även att eleverna inte ville underprestera gentemot sina arbetsgrupper vilket även en elev lämnade som kommentar vid frågan på enkäten. De flesta kommentarer från enkätundersökningen visar emellertid på inre motivationsfaktorer så som att det var roligt och glädjebringande att se ett annat sätt använda och arbeta med matematik. Även resultaten från fokusgrupperna visar på att främst inre motivationsfaktorer var bidragande till att de kände engagemang och motivation och att arbetssättet där de själva får komma fram till insikter och se mönster var motiverande och bidrar till ett välbehag då man kommer fram till en insikt.

Om första gruppen exkluderas visar det att nästan 44 % menade att de kände en ökad motivation för matematikämnet efter besöket och att nästan 40 % kände ett ökat intresse. Som nämnts tidigare så bestod vederbörande gruppers undervisning enkom utav traditionell undervisning men de innehade ändå ett intresse och motivation gentemot matematikämnet i helhet vilket kan ha lett till att nyhetseffekten var en extra stor bidragande faktor för dem. Första gruppen som redan var vana med detta arbetssätt gav ett mer blandat resultat om deras intresse och motivation ökat, men ungefär samma betyg på själva laborationen, vilket skulle kunna ytterligare peka åt detta antagande om vilken påverkan nyhetseffekten hade på andra gruppen.

Att de fick ett nytt perspektiv för matematik svarade majoriteten ja på, vilket författarna till examensarbetet tror bidrog till uppfattningen om att eleverna uppvisade intresse och motivation.
Vid frågan om de kunde förstå kopplingen mellan det matematiken och tavelproblemet, mellan det abstrakta och det konkreta, så svarade 90 % ja, och även under fokusgrupperna menade eleverna att det var tydligt. Något som redogjorts för som en fallgrop vid laborativ matematikundervisning och som vi således försökte undvika med laborationen är som nämnts tidigare att det fria undersökande arbetet i grupperna skulle leda till *hands on - minds off*[84]. Resultatet från dessa frågor tyder på att både tanke och händer var aktiverade under besöket.

[84] Rystedt, E. Trygg L. (2005). *Matematikverkstad - en handlednings för att bygga, använda och utveckla matematikverksträder.* Göteborg: NCM.

Resultatet från fråga 12 och 13 visar att majoriteten av eleverna ansåg att laborationens arbetssätt skulle med fördel för intresse och motivation kunna anammas i skolan. En del elever med blandade svar kommenterade att arbetssättet skulle passa bra om de använde sig av det ibland, för att de ändå var positiva gentemot traditionell undervisning med föreläsning och eget arbete i boken. Den första gruppen gav blandade svar, med anledningen att de redan använde sig av liknande arbetssätt i sin undervisning. En intressant aspekt som framkom ur fokusgrupperna vad gäller arbetssättet och undervisningsmodellen vilken bygger mycket på att eleverna skulle försöka komma fram till insikter själva och se mönster, även fast det inte hörde till syftet med studien, var att de menade att ett sådant arbetssätt bidrar till att de lär sig bättre.

7.1 Sammanfattande diskussion och svar till forskningsfrågor

Åtskilliga studier, granskningar och centralenhetsstyrda tester har under de senaste decennierna visat att svenska elevers resultat och kunskap inom matematikämnet dalar. Studierna, granskningarna och testerna visar även på att attityden gentemot, intresset för samt motivationen till de naturvetenskapliga ämnena och matematikämnet däri är lågt, och att detta är en central faktor till den bristfälliga kunskapen och de bristande resultaten. Något som även påpekas i granskningar och studier är att det finns ett samband mellan innehavande intresse gentemot samt motivation för matematikämnet och hur undervisningen inom vederbörande ämne bedrivs[85,86,87]. Den vanligast förekommande undervisningsmodellen för matematik som bedrivs i svenska skolor tyr sig bestå främst av lärarledda genomgångar följt av enskilt arbete i matematikboken, vilket en stor andel elever upplever som tråkig och utan variation[88]. Syftet med litteraturstudien och vad den redogör för är förslag till alternativa undervisningsmodeller som kan ha positiv inverkan på intresse samt motivation.
Frågeställning ett besvarades således under teorikapitlet och ligger till grund för hur den utvecklade laborationen i matematik anpassades med syftet att vara intresseväckande och motivationsskapande.
Undervisningsmodellen som togs fram bygger främst på laborativ matematikundervisning med grunden i problembaserat lärande. Eleverna löser laborativa matematiska problem med vardagsanknytning i grupp. Då grunden ligger i problembaserat lärande så får eleverna komma fram till mycket insikter samt hitta mönster själva i grupperna. Grupparbetet och undervisningsmodellen skapar ett gott kommunikativt sammanhang och är således kopplat till ett sociokulturellt perspektiv på lärande.
Laborationen testade vid tre olika tillfällen och vid samtliga tillfällen så visade resultatet en positiv inverkan på intresse så väl som motivation. Resultatet visade att laborationen

[85] Murphy, C. Beggs, J. (2003). *Children's perceptions of school science.* School Science Review, 84, 109-116.
[86] Osborne, J. F. Simon, S. Collins, S. (2003). *Attitudes towards Science: A review of the literature and its implications*. International Journal of Science Education, 25, 1049–1079.
[87] Breen, S. Cleary, J. O'Shea, A. (2009). *An investigation of the mathematical literacy of first year third-level students in the Republic of Ireland.* International Journal of Mathematical Education in Science in Technology, 40(2), 229-246.
[88] Skolinspektionen (2010). *Undervisningen i matematik i gymnasieskolan.* Stockholm: Skolinspektionen.

fungerade för att fånga ett situationsbaserat intresse, men även att en stor del av eleverna gick ifrån besöket med ett större personligt intresse gentemot samt en högre motivation för matematik. Författarna till examensarbetet ser emellertid ett par faktorer som möjligtvis kan dra ner resultatets validitet. Nyhetseffekten; att många elever fick pröva på ett nytt sätt att arbeta med matematik och komma iväg från sin vanliga klassrumsmiljö kan ha varit en faktor. Ytterligare faktorer som påverkat resultatet kan vara att testeleverna redan innehade ett relativt högt intresse och motivation för matematik samt att problemen de arbetade med och den bakomliggande matematiken var intressant i sig. Dock så visade data från enkätundersökningarna så väl som fokusgrupperna att undervisningsmodellen och arbetssättet utgjorde en stor del till varför laborationen uppfattades som intresseväckande och motivationsskapande. Utav testeleverna menade 56% även att undervisningsmodellen och arbetssättet som användes vid laborationen allmänt skulle göra matematikämnet mer intressant och 46% menade att det skulle få större motivation för matematikämnet om ett sådant arbetssätt anammades. Endast 5% var negativa gentemot undervisningsmodellen kopplat till intresse och 15% kopplat till motivation.
Med detta som grund vill författarna till examensarbetet argumentera för att undervisningsmodellen som tagits fram torde sig fungera väl för att göra matematikämnet mer intressant och motivationsskapande. Problem vi ser emellertid är att det kan visa sig tidskrävande för pedagoger så väl som elever och att det är viktigt undvika *hands on - minds off* så att elevernas lärande inte påverkas negativt.

7.1.1 Svar till frågeställningar

FS1: Vilka vanliga variationer och metoder beträffande undervisning inom matematik kan vara gynnsamma för att väcka intresse samt höja motivationen för matematikämnet jämfört med “traditionell” undervisning?

Det finns ett samband mellan innehavande intresse gentemot samt motivation för matematikämnet och hur undervisnings inom vederbörande ämne bedrivs. Den traditionella undervisningsmodellen som bygger på lärarledda genomgångar följt av enskilt arbete, har enligt granskningar visat sig att ofta inte ha positiv inverkan på elevers motivation samt intresse.
Under teorikapitlet har det redogjorts för alternativa sätt att bedriva undervisning inom matematik, nämligen forskningsbaserat lärande, problembaserat lärande, laborativ matematikundervisning, vilka alla genom tidigare studier visat sig kunna ha en positiv inverkan på elevers intresse samt motivation.

FS2: Hur skulle en matematiklaboration i topologi kunna anpassas för att väcka intresse och höja motivationen för matematikämnet?

Modellen för laborationen som togs fram bygger till stor del på problembaserat lärande och laborativ matematikundervisning med ett *hands on - minds on* arbetssätt.
De positiva resultaten från enkätstudien och fokusgrupperna pekar på att modellen som utformades till detta arbete var lyckad med avseende på intresse och motivation.

7.2 Förslag på vidare forskning

Resultatet från examensarbetet har visat att undervisningsmodellen och sättet att arbeta med matematik kan ha god inverkan på elevers intresse så väl som motivation. Då testbesöken var kopplade till enstaka tillfällen kan slutsatsen dras att det fungerade väl för att fånga ett situationsbaserat intresse. För att undvika nyhetseffekten och undersöka utförligare vilken inverkan undervisningsmodellen skulle kunna ha för att väcka ett personligt intresse för matematik hos elever menar författarna till examensarbetet att det skulle vara intressant att pröva modellen under en längre period förslagsvis med elever vars intresse för matematik är lågt.

8. Referenser

Bell, J. (2006). *Introduktion till forskningsmetodik.* 4e uppl. Lund: Studentlitteratur.

Bergsten, C. Häggström, J. Lindberg, L. (1997). *Algebra för alla.* Göteborg: NCM.

Blanchard, M. R. Southerland, A. S. Osborne, J. W. Sampson, D. V. Annetta, L. A. Granger, E. M. (2010). *Is Inquiry Possible in Light of Accountability?: A Quantitative Comparison of the Relative Effectiveness of Guided Inquiry and Verification Laboratory Instruction.* Science Educational.

Breen, S. Cleary, J. O'Shea, A. (2009). *An investigation of the mathematical literacy of first year third-level students in the Republic of Ireland.* International Journal of Mathematical Education in Science in Technology. 40:2. pp. 229-246.

Bryman, A. Bell, E. (2011). *Företagsekonomiska Forskingsmetoder.* 3e uppl. Stockholm: Liber.

Darnon, C. Buchs, C. Delphine, D. (2012). *The jigsaw technique and self-efficacy of vocational training students: a practice report.* European Journal of Psychology of Education. 27:3. pp. 439-449.

Deci, E. Koestner, R. Ryan, R. (1999). *A Meta-Analytic Review of Experiments Examining the Effects of Extrinsic Rewards on Intrinsic Motivation.* Psychological Bulletin. 125:6. pp. 627-668.

Deci, E. Ryan, R. (2000). *The "What" and "Why" of Goal Pursuits: Human Needs and the Self-Determination of Behavior.* Psychological Inquiry. 11:4. pp. 227-268.

Hartman, S.G. Lundgren, U.P. (1980). *Individ, skola och samhälle - Pedagogiska Texter av John Dewey.* Stockholm: Bokförlaget Natur & Kultur.

Hidi, S. (1990). *Interest and its contribution as a mental resource for learning.* Review of Educational Research. 60:4. pp. 549-571.

Hmelo-Silver, C. E. Barrows, H. S. (2006). *Goals and Strategies of a Problem-based Learning Facilitator.* Interdisciplinary Journal of Problem-Based Learning.

Krapp, A. (2002). *Structural and dynamic aspects of interest development: theoretical considerations from an ontogenetic perspective.* Learning and Instruction 12. pp. 383-409.

Krapp, A. Prenzel, M. (2011). *Research on Interest in Science: Theories, methods, and findings.* International Journal of Science Education. 33:1, pp. 27-50.

Matematikdelegationen (2004). *Att lyfta matematiken – intresse, lärande, kompetens.* Fritzes: Stockholm.

Munkres, J. R. (2000). *Topology.* 2a uppl. NJ: Prentice Hall.

Murphy, C. Beggs, J. (2003). *Children's perceptions of school science.* School Science Review. 84. pp. 109-116.

Osborne, J. F. Simon, S. Collins, S. (2003). *Attitudes towards Science: A review of the literature and its implications*. International Journal of Science Education. 25. pp. 1049–1079.

Pedaste, M. Mäeots, M. Siiman, L. A. de Jong, T. Van Riesen, S. Kamp, E. T. Constantinos, C. M. Zacharias, C. Z. Eleftheria, T. (2015). *Phases of inquiry-based learning: Definitions and the inquiry cycle.* Educational Research Review 14.

Potvin, P. Hasni, A. (2014). *Interest, motivation and attitude towards science and technology at K-12 levels: a systematic review of 12 years of educational research.* Studies in Science Education. 50:1. pp. 85-129.

Rystedt, E. Trygg L. (2005). *Matematikverkstad - en handlednings för att bygga, använda och utveckla matematikverkstäder.* Göteborg: NCM.

Rystedt, E. Trygg L. (2010). *Laborativ matematikundervisning - vad vet vi?* Göteborg: NCM.

Sato, H. (1996). *Algebraic Topology: An Intuitive Approach.* USA: American Mathematical Society.

Singh, K. Granville, M. Dika, S. (2002). *Mathematics and Science Achievement: Effects of Motivation, Interest, and Academic Engagement.* The Journal of Educational Research. 95:6. pp. 323-332.

Skolinspektionen (2010). *Undervisningen i matematik i gymnasieskolan.* Stockholm: Skolinspektionen.

Skolverket (2003). *Lusten att lära - med fokus på matematik.* Stockholm: Skolverket.

Skolverket (2005). *Nationella utvärderingen av grundskolan.* Stockholm: Skolverket.

Skolverket (2013). *PISA 2012 - 15-åringars kunskaper i matematik, läsförståelse och naturvetenskap.* Stockholm: Skolverket.

Skolverket (2012). *TIMSS 2011 Svenska grundskoleelevers kunskaper i matematik och naturvetenskap i ett internationellt perspektiv.* Stockholm: Skolverket.

Säljö, R. (2000). *Lärande i praktiken: Ett sociokulturellt perspektiv*. Stockholm: Nordstedts Akademiska Förlag.

Weary, J. Thomson, M. M. (2013). *Motivational strategies to enhance effective learning in teaching struggling students.* Support for Learning. 28:3. pp. 103-108.

Wibeck, V. (2000). *Fokusgrupper - Om fokuserade gruppintervjuer som undersökningsmetod.* Lund: Studentlitteratur.

Yin, R, K. (2007). *Fallstudier: Design och Genomförande.* Stockholm: Liber.

Elektroniska källor

Lunds universitet:
http://www.med.lu.se/laekarutbildning/om_laekarutbildningen/problembaserat_laerande (hämtad 2015-10-01).

Nationalencyklopedin: http://www.ne.se/uppslagsverk/encyklopedi/lång/motivation (hämtad 2015-10-08).

Vetenskapens hus: http://www.vetenskapenshus.se/vision-och-mål (hämtad 2015-09-21).

9. Bilagor

9.1 Elevenkät

1. Jag är:

☐ Kvinna ☐ Man

2. Jag är intresserad av matematik. (1-6)

Stämmer ej	1	2	3	4	5	6	Stämmer väl

3. Jag känner mig motiverad för att lära mig mer matematik. (1-6)

Stämmer ej	1	2	3	4	5	6	Stämmer väl

4. Vad är det som motiverar dig till att lösa matematikuppgifter? Du kan välja flera förslag. Gradera dina svar genom att skriva 1 i rutan för förslaget som motiverar dig mest, osv.

☐ Få bra betyg

☐ För att inte göra andra besvikna

☐ För att träna min matematiska förmåga

☐ Uppgiften är intressant

☐ Tillfredsställelsen av att klara av en uppgift

☐ Annat…….....

……....

5. Vilken typ av undervisning inom matematik är du mest van vid.

……....

……

6. Vad tycker du om matematikundervisningen i skolan?

Ointressant	1	2	3	4	5	6	Intressant
Omotiverande	1	2	3	4	5	6	Motiverande
Tråkigt	1	2	3	4	5	6	Roligt

Kommentar …….....

7. Vad tyckte du om laborationen?

Ointressant 1 2 3 4 5 6 Intressant

Varför/Varför inte …….

…….....

…….....

Omotiverande 1 2 3 4 5 6 Motiverande

Varför/Varför inte …….

…….....

…….....

Tråkig 1 2 3 4 5 6 Rolig

Varför/Varför inte …….

…….....

…….....

Inte lärolik 1 2 3 4 5 6 Lärorik

Varför/Varför inte …….

…….....

…….....

8. Fick du grepp om kopplingen mellan matematiken och tavelproblemet?

☐ Ja

☐ Nej

☐ Vet ej

Kommentar……

……

9. Har du fått ett nytt perspektiv på vad matematik kan vara?

☐ Ja

☐ Nej

☐ Vet ej

Kommentar……....

……

10. Jag går ifrån laborationen med ett större intresse för matematik.

☐ Ja

☐ Nej

☐ Vet ej

Kommentar……

……

11. Jag går ifrån laborationen med en större motivation för matematikämnet.

☐ Ja

☐ Nej

☐ Vet ej

Kommentar……

……...

12. Jag tycker att matematikämnet skulle bli mer intressant om man arbetade mer med problemlösning i grupp och laborativt arbete.

☐ Ja

☐ Nej

☐ Vet ej

Kommentar……

……

13. Jag skulle få större motivation mot matematikämnet om man arbetade mer med problemlösning i grupp och laborativt arbete.

☐ Ja

☐ Nej

☐ Vet ej

Kommentar……

……..

9.2 Besöksledarhandledning

9.2 Besöksledarhandledning

2 december 2015

Konsten att hänga upp en tavla

Handledning för besöksledare

VETENSKAPENS HUS
AlbaNova universitetscentrum, 106 91 Stockholm
08 - 553 784 60, vh@vetenskapenshus.se, www.vetenskapenshus.se

VETENSKAPENS HUS

Introduktion

Laborationen "Hänga upp en tavla" grundar sig i udda och roliga problem som att hänga en tavla på två nålar så att tavlan faller när valfri nål dras ut. Eleverna jobbar tillsammans genom att testa sig fram, diskutera, och systematisera problemen så att de är hanterbara med hjälp av matematiken. Laborationen ämnar att bygga broar mellan det konkreta och det abstrakta genom att visualisera matematiken i ett annorlunda perspektiv. Problemet är hämtat ur det matematiska området algebraisk topologi, som laborationens teori kommer att snudda vid. Eleverna utvecklar sina förmågor i samarbete och problemlösning. Förmågan att översätta problem mellan olika representationsformer är central för labben och dess fördelar blir tydliga genom arbetssättet som används.

Målgrupp	Tid	Lokal	Antal elever
Gy	90 min	Vetenskapens Hus	Halvklass

Anknytning till läroplan: Ytterst så handlar matematiken om att upptäcka mönster och formulera generella samband, som det formuleras i läroplanen. Laborationen i fråga knyter an till just detta samt knyter naturligt an till problemlösning vilket är ett centralt innehåll i varje matematikkurs. Eleverna kommer att få arbeta i grupp med problemlösning där de även kommer att träna sin förmåga till att uttrycka, och se matematiken i olika representationsformer.

Nyckelord: Problemlösning, topologi, algebra

Förkunskaper: Inga

Laboration: Hur kan man hänga upp en tavla på två nålar så att tavlan faller ner när valfri nål dras ut? Detta är huvudproblemet som eleverna ska försöka lösa i mindre grupper där de först själva får resonera kring strategier för att lösa problemet. Senare så kommer elever och besöksledare tillsammans komma fram till ett matematiskt språk för det topologiska rummet som är väggen som tavlan hänger på med två nålar i, och eleverna kommer att använda detta för att lösa problemet. Under laborationens senare del kommer laborationen att förankras mer i matematiken och om möjlighet ges så kommer elever få chansen att lösa mer komplexa problem som exempelvis tre nålar eller n > 2 många.

Konsten att hänga upp en tavla…

Denna handledning riktar sig mot besöksledare i matematik på Vetenskapens Hus och beskriver hur laborationen "Hänga en tavla" genomförs samt översiktligt om den relevanta teorin som är bakgrunden till laborationen.

Syfte och mål
Laborationen *Hänga en tavla* går ut på att eleverna ska handledas genom problemlösningen vid olika problem i typen av att hänga en tavla över två nålar så att den faller när valfri nål dras ut. Variationer på problemet som att lägga till en nål, eller att kräva att två valfria nålar ska dras ut varierar komplexiteten på problemet och används för att bilda en progression mot större utmaningar utan sätta käppar i hjulen för förståelsen. Syftet med laborationen är att uppnå följande mål:

1. Laborationen är utvecklad med *problembaserat lärande* som grund där undersökande arbete i grupp skall tydliggöra värdet av att kommunicera matematiken och öka intresset och motivationen för matematikämnet.

2. Laborationens struktur och materialet som besökaren kommer få bekanta sig med under laborationen syftar till att leda arbetet mot *hands on - minds on* där tydliga mål och återkoppling motiverar och intresserar besökaren.

3. Dessa olika instrument för att visualisera det matematiska problemet, samt tyngdpunkten på att översätta problemet mellan olika representationsformer syftar till att besökaren skall se värdet i det matematiska språket och att svåra problem kan lösas enklare med det som hjälpmedel.

4. Visa besökaren att det går att hitta matematik nästan överallt och att svåra problem går att lösa enkelt med matematiken som hjälpmedel.

5. Under besöket skall besökaren tillsammans gruppen under besöksledarens ledning komma fram till ett sätt att beskriva olika upphängningar av tavlan på nålarna i algebraiska uttryck, samt metoder för att hitta lösningar till problemen.

6. Efter laborationen ska besökaren få en ny bild av arbete i matematik, samt av matematiken själv på ett sådant sätt att besökaren känner ett ökat intresse och motivation inför fortsatta studier i ämnet.

Teori
Topologi kan beskrivas som en modern typ av geometri som likt andra geometrier lägger tonvikt på hur objekt kan relateras till varandra. När vi relaterar objekt till varandra med den

Euklidiska geometrin de flesta av oss känner till bäst, så kan vi exempelvis mäta, eller väga två objekt för att svara på hur de är relaterade till varandra och vi tänker oss objektens egenskaper som längd och vikt och kan se avstånd mellan dem osv. Inom topologi så läggs tonvikten dock inte på dessa mer bekanta egenskaper. Inom topologi är det exempelvis acceptabelt att töja ut eller böja objekt så länge vi inte klipper sönder dem. Vad som behövs då, är ett annat sätt att säga hur nära relaterade två objekt är till varandra och ett exempel är att fokusera på antalet *hål* som objekt har. Ett hål är ett ganska vagt begrepp men kan tänkas på som tom rymd omfattat av något.

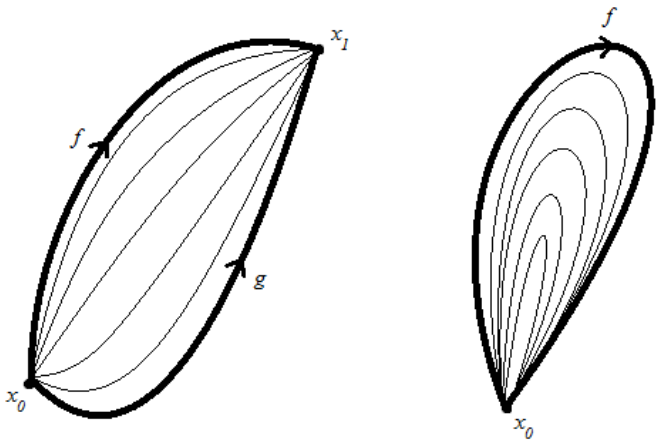
I laborationen i fråga så arbetar eleverna i det topologiska rummet $\mathbf{R}^2$ med två hål i; $\mathbf{R}^2 \setminus \{a, b\}$.

Nedan följer nu en del definitioner kopplade till teorin.

En *stig* i $\mathbf{R}^2$ är en kontinuerlig avbildning, $f : [0,1] \to X$. En stig har en startpunkt samt en slutpunkt och således även en riktning.

En *ögla* är en stig sådan att $f(0) = f(1) = x_0$ där x_0 kallas för baspunkten av öglan f.

En *homotopi* av stigar är en familj av avbildningar $f_t : [0,1] \to X$, $0 \leq t \leq 1$, sådana att $f_t(0) = x_0$ och $f_t(1) = x_1$ är oberoende av t och $F : [0,1] \times [0,1] \to X$, givet av $F(s,t) = f_t(s)$ är kontinuerlig. Om två stigar f och g är sammankopplade av en homotopi, så är f och g *homotopa,* vilket brukar betecknas genom $f \simeq g$.



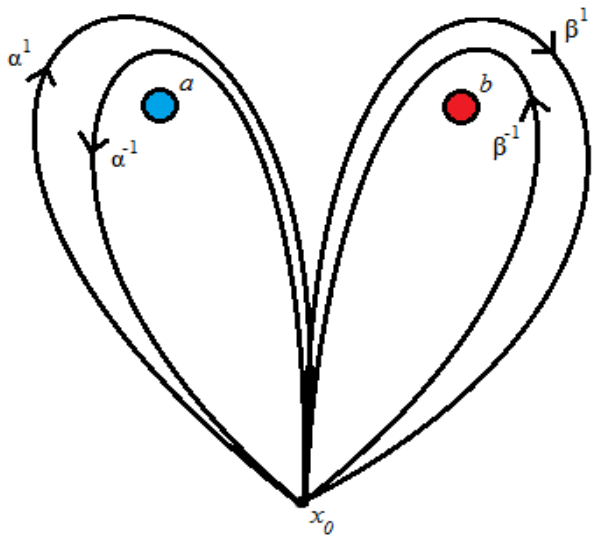
Figuren ovan visar två *homotopa* stigar f och g. För att få en mental bild går det att tänka på det som att två stigar är *homotopa* om den ena kan förflyttas till den andra på ett kontinuerligt vis, alltså genom böjningar och uttöjningar men utan att ta isär dem, medan ändpunkterna är fixa.
Även *öglor* kan vara *homotopa* vilket illustreras i figur 2 där vi ser att öglan, f är *homotop* med den konstanta öglan, alltså den som inte rör alls. Om öglan går runt ett hål finns det inte en sådan *homotopi* med den konstanta öglan, men olika öglor runt samma hål kan vara *homotopa* med varandra.

Utifrån idén om homotopi är det möjligt att definiera *homotopiklasser. Homotopiklasser* definieras som mängden av alla öglor, *g* sådana att *g* är homotopa med *f* :
$[f] = \{ g : g \simeq f \}$

Låt X vara ett topologiskt rum, och $x_0 \in X$. Mängden av homotopiklasser av öglor med baspunkt x_0 , med operationen$*$, kallas för *fundamentalgruppen* av X i relation till baspunkten x_0 , och betecknas $\pi_1 (X , x_0)$.

I det topologiska rummet, $\mathbf{R}^2 \setminus \{a\}$, alltså väggen med ett hål (en nål) så innehåller fundamentalgruppen för punkten, x_0 alla möjliga homotopiklasser av öglor runt detta hål med utgångspunkt x_0. Om vi låter en ögla som går medsols runt hålet två gånger betecknas med α^2och en ögla som går motsols runt hålet med α^{-1}så kan vi skriva mängden av homotopiklasser som $\{..., \alpha^{-3}, \alpha^{-2}, \alpha^{-1}, \alpha^0, \alpha^1,...\}$. Fundamentalgruppen för $\mathbf{R}^2 \setminus \{a\}$ är således den fria gruppen med en generator och på samma sätt är fundamentalgruppen för $\mathbf{R}^2 \setminus \{a, b\}$ den fria gruppen med två generatorer.

Således så kan "upphängningar" av tavlan ses som element ur fundamentalgruppen av $\mathbf{R}^2 \setminus \{a, b\}$ i relation till, x_0 , vilket motsvarar fästpunkten på tavlan.
För att lösa problemet med två nålar är målet är att försöka att finna ett element $y \in Y := \pi_1(X_2 , x_0)$, som är homotop med den konstanta öglan när elementet betraktas som ett element i antingen $\mathbf{R}^2 \setminus \{a\}$ eller $\mathbf{R}^2 \setminus \{b\}$. Detta omformande av det topologiska rummet sker genom att man drar ut en av spikarna som kan tolkas som att ett hål "täpps" till.
Om vi tittar på "upphängningen"; $\alpha * \beta * \alpha^{-1} * \beta^{-1}$.



Vid utdragning av en spik, exempelvis *b*, så kollapsar öglorna runt hålet *b* vilket medför att den sammansatta stigen $\alpha * \beta * \alpha^{-1} * \beta^{-1}$ istället övergår till $\alpha * \alpha^{-1}$ som i sin tur är homotop med den konstanta öglan och således faller tavlan till marken. En viktigt anmärkning är att fundamentalgruppen i detta fall inte är kommutativ.

En lösning för två nålar och utdragning av godtycklig nål är huvudproblemet för laborationen, men i tavelproblemsbiblioteket som går att hitta i slutet av handledingen finns mer avancerade uppgifter. Gemensamt för dessa uppgifter är idén om att se två, eller flera nålar som en sammansatt nål.
En möjlig lösning för exempelvis tre nålar där utdragning av godtycklig nål fäller tavlan kan fås genom lösningen för två nålar:
$L_2 = [L_1,\beta] = [\alpha,\beta] := \alpha * \beta * \alpha^{-1} * \beta^{-1} \Rightarrow L_3 = [L_2,\gamma\ \ ] = L_2 * \gamma\ \ * L_2^{-1} * \gamma^{-1} =$
$= \alpha * \beta * \alpha^{-1} * \beta^{-1} * \gamma\ \ * \beta * \alpha * \beta^{-1} * \alpha^{-1} * \gamma^{-1}$

På samma sätt går det att resonera om problemet med fyra nålar, och genom induktionsbevis går det att bevisa att det finns en lösning för n > 2 nålar.

Genomförande
Under detta avsnitt så presenteras ett möjligt upplägg för laborationen. Värt att nämna emellertid är att det som följer är ett förslag och således valfritt att följa.

1. **Presentera problemet**
   Det första steget är att introducera huvudproblemet för laborationen vilket är scenariot när vi har två nålar och utdragning av specifik och senare godtycklig nål ska leda till att tavlan faller till marken. Utför detta genom att hänga upp tavlan på det “normala” viset, alltså tråden går medurs runt båda nålarna. Visa vad som händer när en nål dras ut, alltså att tavlan hänger kvar. Presentera problemet på så sätt att eleverna ska försöka hänga upp tavlor så att om en nål dras ut så faller tavlan till marken.

2. **Fritt arbete med tavlorna**
   I det andra steget så delas eleverna in i grupper om 2-3 personer. Varje grupp får varsin tavla. Eleverna får nu arbeta fritt med problemet genom att pröva sig fram där de hänger upp tavlan på en gruppkamrats pekfingrar. Låt eleverna arbeta fritt i 10-15 minuter. Om någon grupp hittar en lösning där en specifik nål dras ut så låt dem försöka hitta lösningen för godtycklig nål.

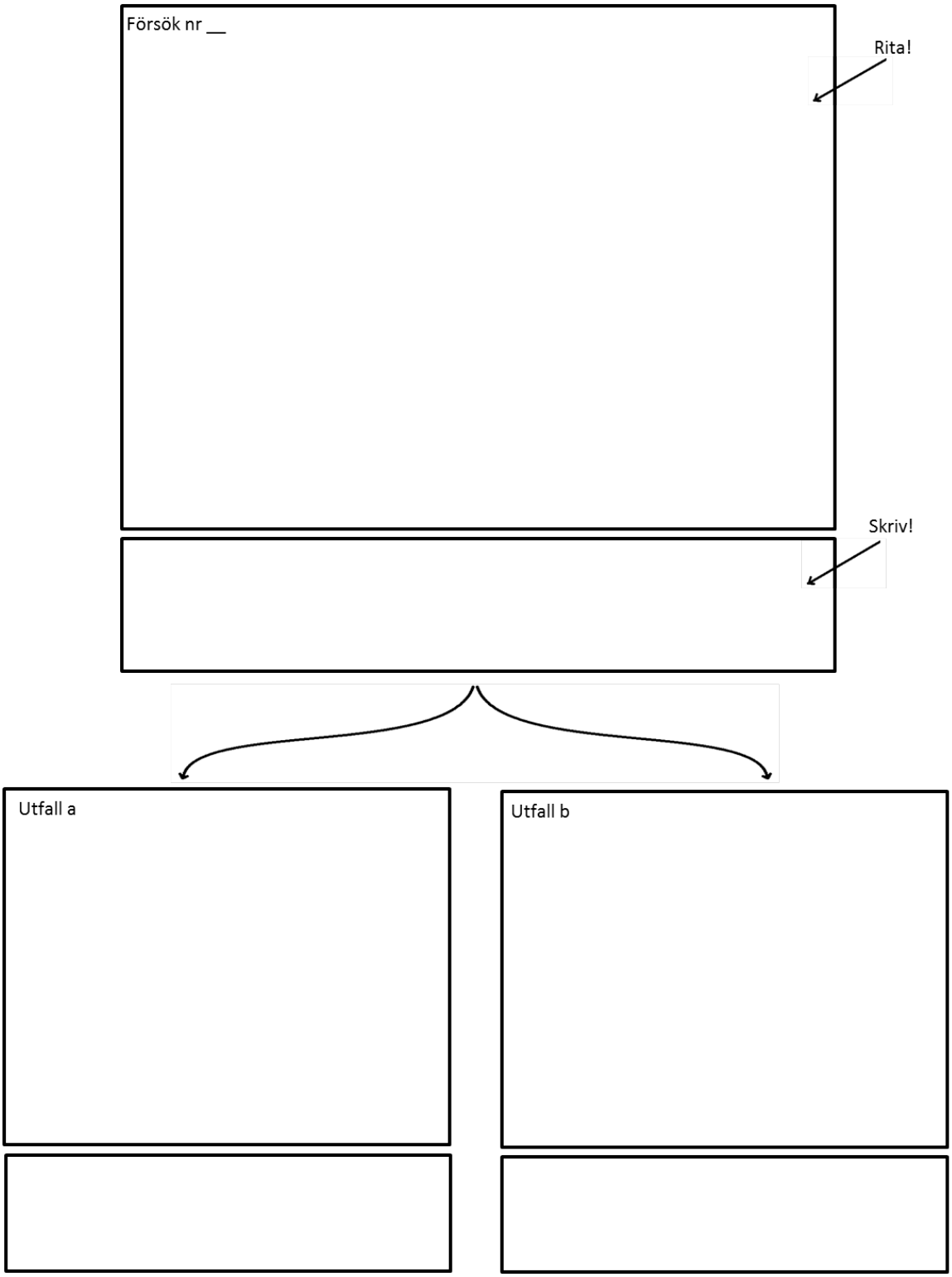
3. **För in matematiken**
   Problemet kan vara svårt att lösa genom att endast pröva sig fram, vilket troligtvis visades under steg två. Vi behöver införa ett hjälpmedel för att lösa problemet, nämligen matematik. Detta utförs gemensamt med klassen. Förslagsvis så fråga någon grupp om de kan beskriva en “upphängning” de prövade utan fokus på om det faktiskt var en lösning eller ej. Här kan man även låta en elev ur en annan grupp komma upp till tavlan för att samtidigt försöka återskapa den beskrivna upphängningen. Det är möjligt att det nu uppstår problem med kommunikationen av en upphängning. Då blir det tydligt att det behövs ett enkelt sätt att uttrycka sig med. Led in diskussionen på vad vi kan kalla nålarna för, vad vi kan kalla medurs samt moturs öglor runt de två olika nålarna för något. Diskutera om det behövs olika sätt att beskriva medurs och moturs. Målet är att gemensamt komma fram till ett bra sätt att beskriva en upphängning som klassen känner sig bekväm med. Skrivsättet som används för att beskriva upphängningarna kommer att vara en grupp som inte är kommutativ.

4. **Problemlösning**
   Nu när klassen kommit överens om ett skrivsätt så är det möjligt för dom att börja anteckna sitt arbete. För att underlätta detta arbete delas det nu ut arbetsblad (se bilaga 1). Detta arbetsblad är strukturerat för att underlätta det undersökande arbetet av vad som händer med upphängningen när endast den vänstra nålen dras ut, respektive endast den högra. När detta antecknas i både bild och matematiskt uttryck så blir det enklare att komma till insikten att en ögla försvinner om den kommer i kontakt med sin invers, och vidare att lösa problemet. Då laborationen är baserad på problembaserat lärande är meningen att eleverna ska försöka komma fram till mycket på egen hand genom reflektion och diskussion. För grupper som behöver extra ledning så kan gruppen få hjälp med att undersöka en lösning för uppgift 1 ur tavelproblemsbiblioteket. Grupper som löser problemet kan tilldelas extra uppgifter ur samma dokument (se bilaga 2). Dessa sätter högre prov på gruppens förmåga att se mönster. Vid arbetet med dessa uppgifter kan eleverna jobba med ett blankt papper, men det är fortfarande viktigt att problemen och lösningsförslag skrivs på matematisk form. Om ledning behövs för de mer komplexa uppgifterna så ge ledningar, men försök få det till att grupperna ändå kommer fram till en lösning själva.

5. **Avslutande diskussion**
   Den sista delen av laborationen ämnar att förankra vad eleverna har arbetat med i matematiken. Eleverna har arbetat med topologi som är en typ av geometri, men olik den de är vana vid sen tidigare. Till skillnad från euklidisk geometri där vi kan jämföra objekt beroende på t.ex. längd eller form så jämförs objekt på andra sätt inom topologi. Berätta kort om homotopier då det på tavlorna som eleverna arbetat med finns olika exempel på objekt som är homotopa med varandra. Eleverna har tagit fram ett språk vilket motsvarar fundamentalgruppen för det topologiska rummet. Det topologiska rummet de har arbetat i är planet med olika antal hål i. Hål i detta fallet kan ses som nålarna. Precis som att cirkeln är homotop med en triangel så faller tavlan när upphängningen är homotop med den konstanta öglan i det omformade topologiska rummet. Om det finns tid och grupperna hann påbörja problemet med tre nålar och utdraging av godtycklig nål, för tillbaka fokus på det ursprungliga problemet och fråga om det går att hitta lösningar för tio nålar, hundra nålar och oändligt antal nålar. På samma sätt som man hittar lösningen för tre nålar genom att se två av nålarna som en sammansatt nål, kan man lätt resonera fram till att det går att fortsätta så om och om igen. Längden av dessa lösningar finns i tabellen nedan. Dessa är inte nödvändigtvis de kortaste lösningarna.

antal nålar k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
antal termer i	4	10	22	46	94	190	382	766	1534

Bilaga 1: Arbetsblad



Bilaga 2: Tavelproblemsbibliotek

Problem

1. Två nålar. Utdrag av en specifik nål fäller tavlan.
2. Två nålar. Utdrag av godtycklig nål fäller tavlan.
3. Tre nålar. Utdrag av specifik nål fäller tavlan.
4. Tre nålar. Utdrag av godtycklig nål fäller tavlan.
5. Tre nålar. Utdrag första godtycklig nål fäller inte tavlan men utdrag av andra godtyckliga fäller tavlan.
6. Fyra nålar. Utdrag av tre nålar fäller tavlan.
7. Två nålar. Finn ett ord av längd >= 8 som fäller tavlan vid utdrag av godtycklig nål.
8. Fyra nålar. Utdrag av godtycklig nål fäller tavlan.
9. Fyra nålar varav två röda och två blå. Utdrag av antingen båda röda eller båda blå fäller tavlan, men utdrag av en blå och en röd fäller inte tavlan.

Möjliga lösningar

1. aba^{-1}
2. $aba^{-1}b^{-1}$
3. $abcb^{-1}a^{-1}$
4. $aba^{-1}b^{-1} = S_2 = [a,b] \rightarrow S_3 = [S_2, c] = S_2cS_2^{-1}c^{-1} = (aba^{-1}b^{-1})c(aba^{-1}b^{-1})^{-1}c^{-1} = aba^{-1}b^{-1}cbab^{-1}a^{-1}c^{-1}$
5. Enklast är att utgå från lösningen till problem 2. $S_2 = aba^{-1}b^{-1}$ och lägga till c och c^{-1} så att öglor har två termer mellan sig och sin invers.
   $\rightarrow abca^{-1}b^{-1}c^{-1}$
6. Analogt med 5. $\rightarrow abcda^{-1}b^{-1}c^{-1}d^{-1}$
7. $aaaba^{-1}a^{-1}a^{-1}b^{-1}$
8. $[S_3,d] = aba^{-1}b^{-1}cbab^{-1}a^{-1}c^{-1}dcaba^{-1}b^{-1}c^{-1}bab^{-1}a^{-1}d^{-1}$
9. Se paren av röda och blå nålar som varsin sammansatt nål vilket ger de sammansatta stigarna $X = ab$, $Y = cd$, $X^{-1} = (ab)^{-1}$, $Y^{-1} = (cd)^{-1}$. En lösning analogt med problem 2 är då: $XYX^{-1}Y^{-1} = abcdb^{-1}a^{-1}d^{-1}c^{-1}$