Beteckning:________________

HÖGSKOLAN
I GÄVLE

Akademin för teknik och miljö

Analytic Hierarchy Process – en kritisk genomgång

Anders Hermansson

juni 2014

Examensarbete, 15 hp
Besluts-, risk- och policyanalys

Magisterprogrammet i Besluts-, risk- och policyanalys
Handledare: Ulla Ahonen-Jonnarth
Examinator: Jan Odelstad

Analytic Hierarchy Process – en kritisk genomgång

av

Anders Hermansson

Akademin för teknik och miljö
Högskolan i Gävle

S-801 76 Gävle, Sweden

Email:
nfk04ahs@student.hig.se

Abstrakt

Analytic Hierarchy Process, AHP, är en spridd och mycket omdiskuterad metod för att analysera multikriterieproblem. Syftet med uppsatsen är göra beslutsfattare som använder AHP uppmärksamma på några av de problem som kan finnas med att använda AHP. Uppsatsen redogör detaljerat för hur beslutsfattarens indata behandlas av AHP och visar både med ett konkret exempel och med en formell beskrivning hur en rangordning av alternativ genereras av AHP. Den detaljerade redogörelsen illustrerar att AHP bygger på additiv nyttofunktion vilket döljs för användare av programvaror utvecklade för AHP. Vidare belyses andra drag i AHPs behandling av indata, drag som i flera fall döljs för användaren.
Nyckelord: AHP, kriterier, alternativ, viktkoefficienter, additiv nyttofunktion

Innehåll

1 Inledning

1.1 Introduktion

Multikriterieanalys, *multi criteria decision analysis,* förkortat MCDA, handlar om analys av problem där beslutsfattaren måste ta hänsyn till och kompromissa mellan flera olika mål och intressen, vanligtvis kallade kriterier, under processen som leder fram till beslutet. En viss handling eller visst alternativ a_1 kan bedömas som mer önskvärd än en annan handling eller annat alternativ a_2 med hänsyn taget till ett visst kriterium medan med avseende på ett annat kriterium kan a_2 vara mer önskvärt än a_1. Detta gör multikriterieproblem svåra.

Det finns en stor mängd beslutsmetoder som används för multikriterieanalys. Att ta reda på vilken, eller vilka, av dessa metoder som är mest lämpad för ett visst beslutsproblem är i sig ett multikriterieproblem. Ett exempel på en artikel som behandlar den frågeställningen är *Tentative guidelines to help choosing the appropriate MCDA method* [1] där författarna försöker lägga grunden till hur en beslutsfattare ska välja metod.

Generellt kan sägas att alla metoder inom MCDA syftar till att dela upp multikriterieproblemet i mindre delproblem för att låta beslutsfattaren behandla beslutsproblemet bit för bit i ett antal mindre beslut. Alla delbeslut vägs sedan samman, aggregeras, till ett resultat där det framgår vilket av alternativen som, enligt den av beslutsfattaren skapade problemmodellen och de givna förutsättningarna, uppfyller det övergripande målet med beslutet bäst.

En beslutsfattare som använt någon metod för MCDA får stöd i hur beslut bör fattas men inte vilket beslut som bör fattas. Beslutsfattaren kommer inte att få en beslutsanalys som befriar beslutsfattaren från ansvar rörande svåra beslut. MCDA kommer inte heller att göra det mindre besvärligt att ta ställning till svåra avvägningar när ett beslut ska fattas men beslutet bör vara mer genomtänkt och väl övervägt [2] (p 2-3). Beslutsfattande är ett område som innehåller en mängd värderingar och två beslutsfattare som ställs inför samma problem med samma grunddata kan komma fram till olika beslut eftersom deras subjektiva värderingar skiljer sig åt.

1.2 Problemformulering och syfte

I den här uppsatsen undersöks en MCDA-metod kallad Analytic Hierarchy Process, AHP [3], och det exemplifieras delvis med hjälp av programvaran Expert Choice™. I AHP skapar beslutsfattaren en hierarki av kriterier och alternativ. Uppdelningen i mindre beslut görs genom att beslutsfattaren jämför kriterierna respektive alternativen parvis och svarar på vilket av de två kriterierna eller alternativen som är viktigare eller bättre med avseende på ett kriterium. Dessutom ska beslutsfattaren också svara på hur många gånger viktigare eller bättre ett kriterium respektive alternativ är i förhållande till ett annat kriterium eller alternativ. I denna uppsats diskuteras de problem som finns med dessa ställningstaganden och det ställs i relation till att AHP bygger på en additiv nyttofunktion [4] (p. 758).

Syftet med uppsatsen är att göra beslutsfattare som använder sig av AHP uppmärksamma på en del av de problem som kan finnas med AHP och att visa att de resultat som genereras av AHP kan ifrågasättas.

2 Metod

För arbetet har relevant litteratur gällande bakgrund och den matematiska grunden för AHP använts.

För beräkningar av jämförelsematrisernas egenvärden och konsistenskvoter har Microsoft Excel med tillägget ”MATRIX 2.3 - Matrix and Linear Algebra functions for Excel” [5] använts. MATRIX 2.3 är ett fritt tillgängligt tillägg till Microsoft Excel som innehåller en mängd funktioner och makron för att bearbeta matriser. För att verifiera de egenvärden som beräknats av makrot i MATRIX 2.3 har Mathematica version 9 använts.

För att höja en matris till *large powers* har Microsoft Excel och en funktion kallad PowerMatrix() [6] använts. Funktionen PowerMatrix() utnyttjar möjligheten att i Excel skapa s.k. matrisformler, *array formulas* [7] (p. 367ff), för att multiplicera en $n \times n$-matris med sig själv ett valfritt antal gånger. För att verifiera resultatet av PowerMatrix() har även här Mathematica version 9 använts.

Skrivbordsversionen av Expert Choice™, version 11.5, har använts som referensprogramvara för en jämförelse av resultaten från Microsoft Excel och Mathematica.

3 Analytic Hierarchy Process

AHP utvecklades under 1970-talet av professor Thomas L Saaty. AHP publicerades i sin första version i sin helhet 1980 i boken ”The analytic hierarchy process: planning, priority setting, resources allocation” [3]. En programvara, Expert Choice™, har utvecklats av företaget med samma namn. I företaget Expert Choice står Thomas L Saaty som en av medgrundarna.

I detta avsnitt ges beskrivning av Analytic Hierarchy Process, AHP, med hjälp av den teknologi som används inom ramen för Expert Choice™.

3.1 Inledning

AHP är uppdelat i fyra delar. Den första delen, problemstruktureringen (avsnitt 3.2) innebär att de kriterier som beslutsfattaren anser vara relevanta för beslutet ordnas i en kriteriehierarki. I den andra delen, parvisa jämförelser (avsnitt 3.3) utför beslutsfattaren parvisa jämförelser av kriterier och alternativ. AHPs tredje del är en konsistenskontroll av beslutsfattarens jämförelser (avsnitt 3.4). Efter konsistenskontrollen beräknas kriteriernas och alternativens s.k. prioriteringar (avsnitt 3.5) utifrån de parvisa jämförelser som beslutsfattaren utfört. Prioriteringarna är de ”poäng” som avgör den relativa rangordningen av kriterier och alternativ. Den fjärde delen, sensitivitetsanalysen, berörs inte i denna uppsats.

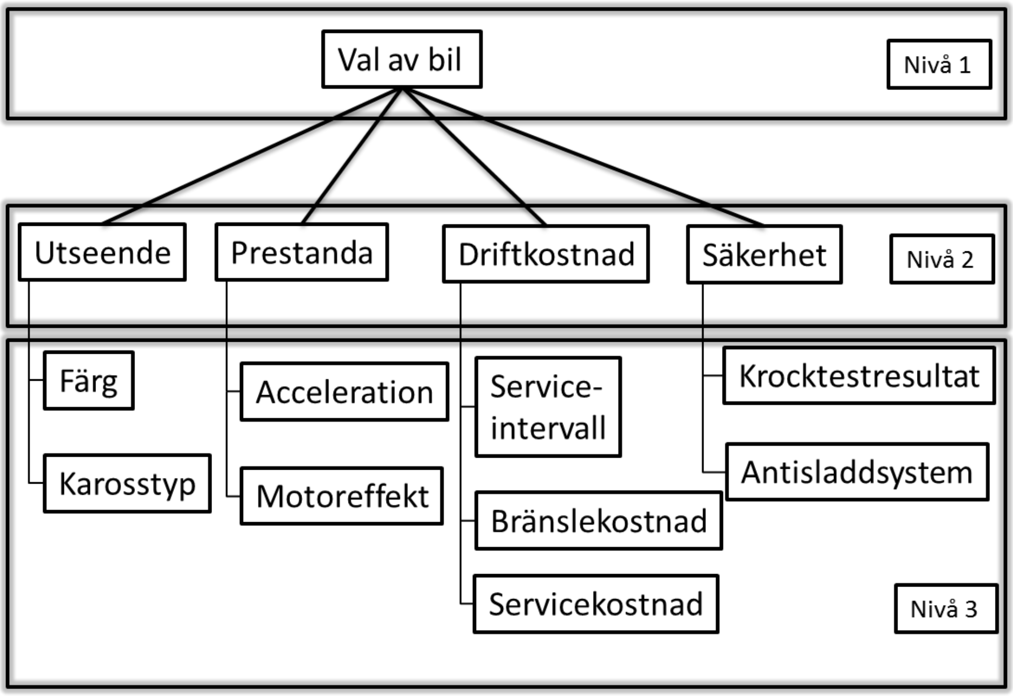
3.2 Problemstrukturering

AHP utgår från principen ”söndra och härska”: dela upp problemet i mindre delar för att analysera en del i taget. I AHP delas beslutsproblemet upp genom att beslutsproblemets mål, kriterier och alternativ ordnas i en hierarkisk struktur.

Det första beslutsfattaren ska göra är, enligt AHP, att identifiera målet med beslutet. Vad vill beslutsfattaren uppnå? Det övergripande målet sätts överst i hierarkin, på nivå 1.

Nästa steg är att identifiera de kriterier som påverkar beslutet. Ett kriterium är en av de aspekter som har betydelse för att nå målet med beslutet. Kriterierna ordnas så att de från att vara övergripande huvudkriterier, nedåt genom hierarkin blir mer och mer specifika i sin formulering.

I figur 1 finns ett exempel på hur en kriteriehierarki kan se ut för ett beslutsproblem där en presumtiv bilköpare vill använda AHP för att rangordna tre bilar av olika modeller. På nivå 1 i hierarkin finns målet med beslutet, att välja en av de tre bilarna. På nivå 2 finns huvudkriterierna för beslutet. På underliggande nivåer delas huvudkriterierna upp i underkriterier.



Figur 1 En kriteriehierarki i AHP

Kriteriestrukturen är viktig eftersom resultatet kan bero av strukturen. Ett beslutsproblem med en kriteriestruktur ger ett resultat men samma beslutsproblem med samma alternativ kan ge ett annat resultat om kriterierna formuleras och struktureras annorlunda.

3.3 Parvisa jämförelser

När struktureringen av problemet är klar tar utvärderingen av kriterier och alternativ genom parvisa jämförelser vid.

3.3.1 Parvisa jämförelser av kriterier

På varje nivå i strukturen jämförs kriterierna parvis med avseende på deras betydelse för närmast högre liggande nivå. Det innebär att kriterierna på nivå 2 jämförs parvis med avseende på målet på nivå 1 och kriterierna på nivå 3 jämförs parvis med avseende på överliggande kriterium på nivå 2.

I bilexemplet jämförs kriterierna utseende, prestanda, driftkostnad och säkerhet parvis med avseende på deras betydelse för målet för beslutet. På nivå tre kommer t.ex. kriterierna serviceintervall, bränslekostnad och servicekostnad jämföras parvis med avseende på det överliggande kriteriet driftkostnad. Övriga kriterier på nivå tre jämförs parvis med avseende på respektive närmast överliggande kriterium (figur 1).

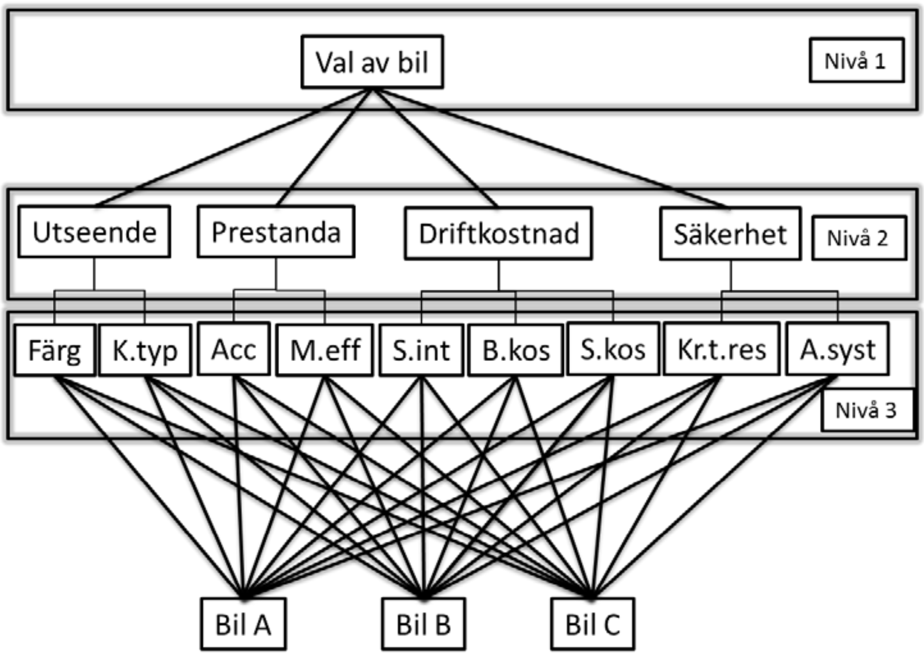
De parvisa jämförelserna uttrycks som svar på frågor eller påståenden. Vid en jämförelse av serviceintervall och bränslekostnad i bilexemplet är påståendet som beslutsfattaren ska ta ställning till: ”Jämför den relativa betydelsen med avseende på: Driftkostnaden”. Användarens svar skulle kunna vara ”Serviceintervallet är måttligt viktigare för driftkostnaden än vad bränslekostnaden är”.

3.3.2 Parvisa jämförelser av alternativ

De alternativ som är aktuella för beslutet jämförs parvis med avseende på deras brahet med avseende på de kriterier som finns på nivån längst ner i kriteriehierarkin. I beslutsproblemet som strukturerats i figur 1 kommer beslutsfattaren att parvis jämföra alternativen med avseende på de nio kriterierna på nivå tre (figur 2). Kriteriernas namn har förkortats (tabell 1) för att få plats i figuren.

Tabell 1 Förkortningar av kriterienamn i figur 2

Kriterium	Förkortning
Färg	Färg
Karosstyp	K.typ
Acceleration	Acc
Motoreffekt	M.eff
Serviceintervall	S.int
Bränslekostnad	B.kos
Servicekostnad	S.kos
Krocktestresultat	Kr.t.res
Antisladdsystem	A.syst



Figur 2 Kriteriehierarki och alternativ

Om något eller några av kriterierna på nivå två skulle sakna underkriterier kommer alternativen att parvis jämföras med avseende på kriterier på både nivå två och nivå tre. Om något av kriterierna på nivå tre skulle ha ytterligare underkriterier kommer alternativen att jämföras med kriterier på tre nivåer, d.v.s. nivå två, tre och fyra.

3.3.3 Skalor för jämförelser

I grunden till AHP finns två skalor för att uttrycka de parvisa jämförelserna, en verbal skala och en numerisk skala. För användare av programvaran Expert Choice™, finns möjlighet att använda en tredje skala, här kallad alternativ numerisk skala.

3.3.3.1 Verbal och numerisk skala

Den verbala och den numeriska skalan har båda nio steg. Fem av stegen har av Saaty definierats som huvudsakliga skalsteg och har namngivits med lika, måttlig, stark eller viktig, mycket stark eller mycket viktig och extrem (tabell 2).

Tabell 2 Skalan för parvisa jämförelser i AHP

Numeriskt värde	Verbal motsvarighet
1	Lika
3	Måttlig, svag
5	Viktig
7	Mycket viktig
9	Extrem
2, 4, 6, 8	Mellannivåer mellan stegen ovan

Beslutsfattaren kan välja en numerisk skala istället för den verbala skalan. De namngivna stegen i den verbala skalan representeras av de numeriska värdena 1 (lika), 3 (måttligt), 5 (viktig), 7 (mycket viktig) och 9 (extrem). Skalstegen mellan dessa steg representeras av 2, 4, 6 och 8. Den numeriska skalan ligger till grund för de beräkningar som utförs för att bestämma prioriteringarna. I de fall beslutsfattaren använder den verbala skalan kommer jämförelserna att transformeras till den numeriska skalan.

3.3.3.2 Alternativ numerisk skala

Den tredje skalan som finns i Expert Choice™ går från 1 till 99 med två decimalers noggrannhet. I jämförelsen mellan färg och karossform kan med denna skala färgen sägas vara t.ex. 1,25 eller 42,8 gånger mer betydelsefull för utseendet än vad karossformen är.

3.3.3.3 Byte av skala i Expert Choice™

Vid användning av Expert Choice™ kan beslutsfattaren växla fritt mellan skalorna. Om beslutsfattaren ska utföra tre parvisa jämförelser kan den första jämförelsen göras med den verbala skalan, den andra jämförelsen utföras med den numeriska skalan och den tredje jämförelsen utföras med den alternativa numeriska skalan. Beslutsfattaren kan också välja att ändra värdet på en redan utförd jämförelse utförd med en av skalorna till någon av de övriga skalorna. Notera att värden angivna på den alternativa numeriska skalan inte kommer att transformeras proportionellt till de andra två skalorna. Är värdet på jämförelsen mellan två element på den alternativa numeriska skalan större än 9, kommer detta motsvaras av värdet 9 på den numeriska skalan oavsett storleken på jämförelsen. Omvänt gäller att om värdet av en jämförelse mellan två element på den numeriska skalan är 9 kommer detta att motsvaras av värdet 9 på den alternativa numeriska skalan.

Detta kan exemplifieras med situationen att vid en jämförelse mellan A och B svarar beslutsfattaren att A, på den numeriska skalan, är 5 gånger bättre eller mer betydelsefull än B med avseende på ett visst kriterium K. Efter att genomfört ett antal jämförelser vill nu beslutsfattaren av någon anledning ändra sitt svar på jämförelsen av betydelsen mellan A och B med avseende på K, men då använda den alternativa numeriska skalan istället. Det tidigare värdet av jämförelsen av A och B (att A är 5 gånger mer betydelsefull än B*)* kvarstår som värde hos jämförelsen även på den alternativa numeriska skalan trots att den alternativa numeriska skalan går från 1-99 istället för den numeriska skalans 1-9. Anta nu att beslutsfattaren ändrar värdet för jämförelsen till ett värde högre än 9, så att beslutsfattaren finner att A är t.ex. 55 gånger mer betydelsefull än B med avseende på K. Vid en återgång till den numeriska skalan, som inte kan visa värden högre än 9, kommer nu Expert Choice™ redovisa värdet av jämförelsen som just 9.

3.3.4 Utförande av parvisa jämförelser

De parvisa jämförelserna sammanställs i jämförelsematriser. Jämförelsematriserna har storleken $n \times n$, där n är antalet element som parvis jämförs. Jämförelsematriserna är reciproka, d.v.s. om man i en parvis jämförelse mellan element A och B finner att förhållandet mellan A och B är 5 så kommer den omvända jämförelsen, d.v.s. förhållandet mellan B och A, vara $1/5$. En utförligare redogörelse för reciproka matriser görs av t.ex. Saaty i [8] (pp. 401-402). Förfaringssättet för de parvisa jämförelserna illustreras nedan med utgångspunkt i bilexemplet.

De första parvisa jämförelserna rör huvudkriterierna på nivå 2 med avseende på målet med beslutet. Påståendet beslutsfattaren ska svara på lyder i samtliga dessa jämförelser: ”Jämför den relativa betydelsen (viktigheten) med avseende på: Val av bil”[1]. Den första jämförelsen gäller förhållandet mellan utseende och prestanda. I detta exempel svarar användaren att prestandan är två gånger viktigare än utseendet.

Det finns problem med denna typ av överväganden. Varför detta är problematiskt återkommer vi till senare i uppsatsen.

För kriterierna utseende och prestanda gäller i detta exempel att användaren svarat att prestanda är två gånger viktigare än utseende. Svaret på den omvända jämförelsen är att utseende är $1/2$ gånger så viktigt som prestanda.

Cellen som representerar jämförelsen mellan utseende och prestanda fylls med värdet $1/2$ och cellen som representerar jämförelsen mellan prestanda och utseende fylls med värdet 2 (tabell 3). I diagonalen i matrisen står värdet 1. En jämförelse av ett element med sig självt är definierat som att ha värdet 1.

Tabell 3 Jämförelsematrisen för nivå 1 i bilexemplet efter första parvisa jämförelsen

	Utseende	Prestanda	Driftkostnad	Säkerhet
Utseende	1	$1/2$		
Prestanda	2	1		
Driftkostnad			1	
Säkerhet				1

[1] Formuleringen i skrivbordversionen av Expert Choice™ lyder: ”Compare the relative importance with respect to: Val av bil”

I den andra parvisa jämförelsen ska kriterierna utseende och driftkostnad jämföras. Vid denna jämförelse svarar beslutsfattaren att kriteriet driftkostnad är två gånger viktigare än kriteriet utseende. I jämförelsematrisen ifylls värdet 2 i den cell som representerar jämförelsen och $1/2$ i den cell som innehåller den omvända jämförelsen (tabell 4).

Tabell 4 Jämförelsematrisen för nivå 1 i bilexemplet efter andra parvisa jämförelsen

	Utseende	Prestanda	Driftkostnad	Säkerhet
Utseende	1	$1/2$	$1/2$	
Prestanda	2	1		
Driftkostnad	2		1	
Säkerhet				1

Beslutsfattaren fortsätter sedan att utföra parvisa jämförelser tills alla celler i matrisen är ifyllda. I tabell 5 har beslutsfattaren slutfört de sex parvisa jämförelser som krävs för att fylla jämförelsematrisen.

Tabell 5 Jämförelsematrisen för nivå 1 i bilexemplet

	Utseende	Prestanda	Driftkostnad	Säkerhet
Utseende	1	$1/2$	$1/2$	$1/4$
Prestanda	2	1	2	$1/3$
Driftkostnad	2	$1/2$	1	$1/4$
Säkerhet	4	3	4	1

Eftersom jämförelsematrisen är reciprok är antalet parvisa jämförelser som krävs för varje jämförelsematris

$$\frac{n^2 - n}{2}$$

där n är antal element i matrisen.

3.4 Konsistenskontroll

När en jämförelsematris är fullständigt ifylld genomförs en konsistenskontroll för att se om beslutsfattaren har varit konsistent i sina parvisa jämförelser. Samma typ av konstinenskontroll används för parvisa jämförelser av kriterier och alternativ. Nedan lämnas bilexemplet och texten är en allmän beskrivning över hur konsistenskontrollen går till.

3.4.1 Konsistenskvot

En jämförelsematris kallas konsistent när

- de parvisa jämförelserna uppfyller det som i AHP kallas transitivitetsregeln, *transitivity rule*
- matrisen är reciprok [9] (p. 31)

AHPs transitivitetsregel innebär följande:

Låt a_{ij} vara den parvisa jämförelsen mellan i och j. $a_{ij} = 2$ betyder att beslutsfattaren i den parvisa jämförelsen mellan i och j sagt att i är två gånger ”viktigare än” eller ”bättre än” j. Om $a_{ij} = 2$ och $a_{jk} = 2$ gäller för att AHPs transitivitetsregel ska vara uppfylld att $a_{ik} = 4$. Mer allmänt kan detta uttryckas $a_{ik} = a_{ij} \cdot a_{jk}$ [9] (p. 31). Detta kan också benämnas kardinal konsistens, *cardinal consistency* [10] (p. 420). Ett annat förslag på benämning av transitivitetsregeln för att undvika sammanblandning med begreppet transitivitet hos binära relationer, är ”proportionsvillkoret” [11] (p. 3).

Tabell 6 visar ett exempel på en konsistent matris med tre element x, y och z där svaren på jämförelserna är kardinalt konsistenta och därmed uppfyller AHPs transitivitetsregel: $a_{xy} \cdot a_{yz} = a_{xz}$.

Tabell 6 Konsistent jämförelsematris med tre kriterier

	x	y	z
x	1	2	4
y	1/2	1	2
z	1/4	1/2	1

$\lambda_{max} = 3$
$CI = 0$
$CR = 0$

3.4.2 Beräkning av konsistenskvoten

CR beräknas enligt

$$CR = \frac{CI}{RI}$$

där CI är jämförelsematrisens så kallade *consistency index* och RI är ett så kallat *random index*.

CI beräknas som

$$CI = \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1}$$

där λ_{max} är matrisens största egenvärde[2] och *n* är antal rader i jämförelsematrisen [12] (p. 205). För en konsistent matris gäller att $CI = 0$ och därmed även $CR = 0$ eftersom $\lambda_{max} = n$.

[2] λ_{max} har i den här uppsatsen beräknats i Microsoft Excel med hjälp av tillägget MATRIX 2.3 - Matrix and Linear Algebra functions for EXCEL [5].

Random index, RI, är medelvärdet av *consistency* index, CI, hos ett stort antal slumpmässigt genererade jämförelsematriser med storlekar $n \geq 3$. Ett flertal sekvenser av RI-värden har tagits fram genom åren. Sekvenserna skiljer sig åt beroende på vilken metod som använts vid genereringen av matriserna och antalet matriser som genererades. I tabell 7 (Saaty, 500 simuleringar) och tabell 8 (Alonso och Lamata, 100 000 simuleringar) visas två exempel på de sekvenser av värden på RI som finns redovisade i litteraturen [13] (p. 450).

Tabell 7 Slumpmässiga index, RI, genererade av Saaty [13] (p. 450)

n	3	4	5	6	7	8	9
RI	0,58	0,90	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45

Tabell 8 Slumpmässiga index, RI, genererade av Alonso och Lamata [13] (p. 450)

n	3	4	5	6	7	8	9
RI	0,5245	0,8815	1,1086	1,2479	1,3417	1,4056	1,4499

3.4.3 Inkonsistenta matriser

Om en jämförelsematris inte är konsistent kallas den inkonsistent. För en inkonsistent jämförelsematris gäller att $CR > 0$. Ju större konsistenskvoten är desto mer inkonsistent är matrisen. Saaty har rekommenderat att för en jämförelsematris med tre element bör konsistenskvoten inte vara större än 0,05, för en jämförelsematris med fyra element bör konsistenskvoten inte överstiga 0,08 och för jämförelsematriser som är större än fyra element bör konsistenskvoten inte vara större än 0,1 [14] (p. 85) för att jämförelsematriserna ska vara rimliga att använda vidare i AHP [15] (p. 13).

I programvaran Expert Choice™ redovisas konsistenskvoten i samband med att de parvisa jämförelserna utförs. Konsistenskvoten redovisas på samma sätt oavsett hur lågt eller högt värdet är. Användaren uppmärksammas alltså inte på ett värde som är högre än de värden som rekommenderas av Saaty som största värden på konsistenskvoten enligt ovan.

3.4.3.1 Inkonsistent matris med tre element och CR < 0,05

Tabell 9 visar en jämförelsematris som inte är fullständigt konsistent men som är inkonsistent med en konsistenskvot under det av Saaty rekommenderade största värdet, 0,05, för en jämförelsematris med tre element. De parvisa jämförelserna uppfyller inte AHPs transitivitetsregel eftersom $a_{xy} \cdot a_{yz} \neq a_{xz}$. Användarens preferensordning är dock ordinalt konsistent (som vanligtvis är det som avses med transitivitet), *ordinal consistent*, [10] (p. 420) eftersom $x \succ y$, $y \succ z$ och $x \succ z$ där $\succ$ betyder ”viktigare än” eller ”bättre än”.

Tabell 9 Inkonsistent matris med tre element och CR < 0,05

	x	y	z
x	1	3	5
y	1/3	1	3
z	1/5	1/3	1

$\lambda_{max} = 3{,}04$
$CI = 0{,}01$
$CR = 0{,}04$

3.4.3.2 Inkonsistent matris med tre element och CR > 0,05

Tabell 10 visar en jämförelsematris där beslutsfattarens parvisa jämförelser inte uppfyller AHPs transitivitetsregel. Preferensordningen är inte heller ordinalt konsistent eftersom det av matrisen nedan går att utläsa preferensordningen till att vara $x \succ y$, $y \succ z$ och $z \succ x$.

Tabell 10 Inkonsistent matris med tre element och CR > 0,05

	x	y	z
x	1	3	$1/5$
y	$1/3$	1	3
z	5	$1/3$	1

$\lambda_{max} = 4{,}83$
$CI = 0{,}92$
$CR = 1{,}75$

Jämförelsematriser med stor konsistenskvot likt matrisen ovan kommer att ge ett resultat som i AHP redovisningsmässigt inte skiljer från ett resultat från en konsistent jämförelsematris, vilket nämndes ovan. Ett problem med detta är att om användaren av misstag har svarat på ett sätt som inte motsvarar användarens preferenser, i någon mån ”fel”, lätt kan missa att uppmärksamma detta eftersom det höga värdet på konsistenskvoten inte påpekas tydligt i Expert Choice™.

3.5 Beräkning av prioriteringar

I detta avsnitt visas hur elementens normerade prioriteringar beräknas.

3.5.1 Prioriteringar i en konsistent jämförelsematris

Prioriteringarna i en konsistent matris beräknas i två steg med hjälp av radsummorna [8] (p. 411) och [9] (p. 33). Först summeras cellvärdena i jämförelsematrisen radvis enligt

$$r_i = \sum_j a_{ij}$$

där r_i är radsumman för rad i och a_{ij} är de parvisa jämförelserna på rad i inklusive värdet av den parvisa jämförelsen där elementet jämförs med sig självt. Radsummorna i den konsistenta jämförelsematrisen i tabell 6 är

$$r_x = a_{xx} + a_{xy} + a_{xz} = 1 + 2 + 4 = 7$$

och analogt för r_y och r_z (tabell 11).

Tabell 11 Konsistent jämförelsematris med radsummor

	x	y	z	Radsumma
x	1	2	4	7
y	$1/2$	1	2	3,5
z	$1/4$	$1/2$	1	1,75

Steg två är att normera radsummorna genom att varje radsumma divideras med summan av alla radsummor

$$p_i = \frac{r_i}{\sum_j r_j}$$

där p_i är den normerade prioriteringen för element i [9] (p. 33). Den normerade prioriteringen för element *x* från tabell 11 blir

$$p_x = \frac{r_x}{r_x + r_y + r_z} = \frac{7}{7 + 3{,}5 + 1{,}75} \approx 0{,}571$$

och analogt för p_y och p_z (tabell 12).

Tabell 12 Jämförelsematrisen i tabell 6 med normerade prioriteringar

	x	y	z	Prioritering
x	1	2	4	$\frac{7}{12{,}25} \approx 0{,}571$
y	½	1	2	$\frac{3{,}5}{12{,}25} \approx 0{,}286$
z	¼	$1/2$	1	$\frac{1{,}75}{12{,}25} \approx 0{,}143$

3.5.2 Prioriteringar i en inkonsistent jämförelsematris

I det följande kommer ska termen ”prioritering” läsas som ”normerad prioritering” om inget annat anges.

Om det vid beräkning med egenvärdesmetoden visar sig att jämförelsematrisens största egenvärde $\lambda_{max} > n$ är jämförelsematrisen inkonsistent. En inkonsistent jämförelsematris höjs till *large* powers, d.v.s. matrisen multipliceras med sig med en faktor k ($k > 1$) antal gånger, innan prioriteringarna beräknas i den multiplicerade jämförelsematrisen. Saaty skriver [8] (p. 411) om prioriteringarna beräknade från en jämförelsematris höjd till *large powers:*

> ”If the judgments are inconsistent but have a tolerable level of inconsistency, we obtain the priorities by raising the matrix to large powers, which is known to take into consideration all intransitivities between the elements…”

Höjningen av en jämförelsematris utförs så länge differenserna i prioriteringarna mellan två matriser inte är 0, där den ena matrisen har multiplicerats med sig själv med en faktor k antal gånger och den andra matrisen har multiplicerats med sig själv med en faktor $k - 1$ antal gånger. Nedan visas detta med ett exempel. Beräkningarna av prioriteringarna är utförda i Excel med hjälp av *MATRIX 2.3 - Matrix and Linear Algebra functions for Excel* [5] och funktionen *PowerMatrix()* [6]. Dessa beräkningar har sedan jämförts med resultatet som ges av programvaran Expert Choice™.

I tabell 13 visas den inkonsistenta jämförelsematrisen från tabell 9 med prioriteringarna tillagda, och där prioriteringarna beräknats på samma sätt som prioriteringarna i tabell 12, innan matrismultiplikationerna påbörjats.

Tabell 13 Matris M med prioriteringar före höjning av matrisen till *large powers*

	x	y	z	Prioritering
x	1	3	5	0,605
y	$1/3$	1	3	0,291
z	$1/5$	$1/3$	1	0,103

$\lambda_{max} = 3{,}04$
$CI = 0{,}01$
$CR = 0{,}04$

I tabell 14 visas jämförelsematrisen från tabell 13 efter en höjning med faktor 2. För varje rad i den nya matrisen kontrolleras skillnaden i prioritering till motsvarande rad i den föregående matrisen.

Tabell 14 Matris M efter höjning av matrisen med faktor 2

	x	y	z	Prioritering efter höjning med faktor 2	Differens mot ursprungsmatrisen
x	3	7,667	19	0,640	0,035
y	1,267	3	7,667	0,257	0,034
z	0,511	1,267	3	0,103	0

Om varje differens mellan prioriteringarna är 0 avbryts höjningen. Är någon av differenserna större än 0 multipliceras matrisen med ursprungsmatrisen en gång till och en radvis beräkning av differenserna i prioriteringar mellan matrisen höjd med faktor 3 och matrisen höjd med faktor 2 utförs. I tabell 15 ses jämförelsematrisen efter en höjning med faktor 3.

Tabell 15 Matris M efter höjning av matrisen med faktor 3

	x	y	z	Prioritering efter höjning med faktor 3	Differens mot höjning med faktor 2
x	9,356	23,000	57,000	0,637	0,003
y	3,800	9,356	23,000	0,258	0,001
z	1,533	3,800	9,356	0,105	0,002

Efter höjningen av matrisen med faktor 3 är inte alla differenser i prioriteringar 0. Matrisen multipliceras därför med ursprungsmatrisen ytterligare en gång (tabell 16). Differenserna mellan prioriteringarna för samtliga kriterier vid en höjning från faktor 3 till faktor 4 är 0 och höjningarna kan avbrytas.

Tabell 16 Matris M efter höjning av matrisen med faktor 4

	x	y	z	Prioritering efter höjning med faktor 4	Differens mot höjning med faktor 3
x	28,422	70,067	172,778	0,637	0
y	11,519	28,422	70,067	0,258	0
z	4,671	11,519	28,422	0,105	0

Notera att λ_{max}, CI och CR beräknas från jämförelsematrisens ursprungsvärden före höjningen medan de prioriteringar som redovisas som resultat är prioriteringarna efter höjningen av matrisen varför λ_{max}, CI och CR endast redovisades vid ursprungsmatrisen.

Notera också att i Expert Choice™ redovisas de parvisa jämförelserna från den inkonsistenta matrisen från tabell 13 tillsammans med prioriteringarna från tabell 16 så att jämförelsematrisen ser ut som i tabell 17. Matriserna som skapas genom matrismultiplikationer redovisas inte. Det går i Expert Choice™ inte heller att se hur många gånger en inkonsistent jämförelsematris multiplicerats med sig själv.

Tabell 17 Matris M som den redovisas i Expert Choice™

	x	y	z	Prioritering
x	1	3	5	0,637
y	$1/3$	1	3	0,258
z	$1/5$	$1/3$	1	0,105

Om tabell 16 divideras med diagonalelementvärdet kan vi se hur de parvisa jämförelserna ändrats jämfört med ursprungsmatrisen (tabell 18). Som synes finns skillnader mellan användarens svar på de parvisa jämförelserna (se tabell 17) och de värden i matrisen i tabell 18 som har 1 som diagonalelement och samma prioriteringsvärden som Expert Choice™ ger som resultat. Det är inte säkert att användaren skulle ha ändrat matrisen på samma sätt för att få en lägre konsistenskvot.

Tabell 18 Matris M höjd fyra gånger och sedan dividerad med diagonalelementvärdet

	x	y	z	Prioritering
x	1	2,465	6,079	0,637
y	0,405	1	2,465	0,258
z	0,164	0,405	1	0,105

3.5.3 Lokala och globala prioriteringar

I AHP finns två typer av prioriteringar, lokala och globala prioriteringar. I detta avsnitt beskrivs hur prioriteringarna beräknas och i följande avsnitt visas hur prioriteringarna beräknas med hjälp av bilexemplet.

3.5.3.1 Lokala prioriteringar

De prioriteringar som hittills beskrivits kallas lokala prioriteringar och beräknas på samma sätt för både kriterier och alternativ. Prioriteringarna kallas lokala eftersom de gäller inom en jämförelsematris. Lokala prioriteringar visar viktigheten eller braheten (beroende på om det är kriterier eller alternativ) med avseende på ett kriterium för de i jämförelsematrisen ingående elementen.

3.5.3.2 Globala prioriteringar för kriterier

Ett kriteriums globala prioritering är kriteriets viktkoefficient vid sammanvägningen av kriterier och alternativ, oavsett vilken nivå i hierarkin kriteriet befinner sig på.

För att beräkna ett kriteriums globala prioritering multipliceras dess lokala prioritering med närmast överliggande kriteriums globala prioritering. Se 3.5.4.2 för ett exempel på denna beräkning. För kriterier på nivå två, som har målet med beslutet på närmast överliggande nivå, sammanfaller de globala prioriteringarnas värde med de lokala prioriteringarna.

3.5.3.3 Globala prioriteringar för alternativ

Alternativens globala prioriteringar visar den totala braheten för varje alternativ med avseende på målet med beslutet. Den globala prioriteringen för ett alternativ i, p_i, beräknas som

$$p_i = \sum_j w_j \cdot l_{ij}$$

där w_j är kriteriets globala prioritering och l_{ij} är den lokala prioriteringen för alternativ i med avseende på kriterium j [9] (p. 39). Alternativens globala prioriteringar ligger till grund för den rangordning som är slutresultatet från AHP. Ett exempel på beräkningen av globala prioriteringar för alternativ finns i 3.5.4.4.

3.5.4 Prioriteringar i bilexemplet

I texten nedan har Microsoft Excel med tidigare nämnda tillägg använts för att beräkna det största egenvärdet λ_{max}, konsistensindex, konsistentskvot och prioriteringarna. Jämförelsematrisernas största egenvärden, λ_{max}, och konsistensindex har tagits från Microsoft Excel eftersom dessa värden inte redovisas i Expert Choice™. Konsistentskvoten och prioriteringarna från Excel har jämförts med de värden som genereras av Expert Choice™ för att kontrollera att dessa överensstämmer med varandra, vilket de också gjorde.

3.5.4.1 Huvudkriteriernas prioriteringar

I tabell 19 visas beslutsfattarens jämförelser för kriterierna på nivå två i bilexemplet med kriteriernas prioriteringar och jämförelsematrisens konsistenskvot tillagda.

Tabell 19 Bilexemplets huvudkriterier med prioriteringar

	Utseende	Prestanda	Driftkostnad	Säkerhet	Prioriteringar
Utseende	1	$1/2$	$1/2$	$1/4$	0,102
Prestanda	2	1	2	$1/3$	0,218
Driftkostnad	2	$1/2$	1	$1/4$	0,145
Säkerhet	4	3	4	1	0,534

$\lambda_{max} = 4{,}08$
$CI = 0{,}03$
$CR = 0{,}03$

Tabell 19 och alla följande tabeller redovisas på det sätt som sker i Expert Choice™. De värden på parvisa jämförelser som syns i tabellerna är de svar som användaren lämnade vid jämförelsen. Prioriteringarna är de prioriteringar som beräknats efter att matrisen multiplicerats med sig själv ett antal gånger, på det sätt som beskrivs i 3.5.2. Om läsaren av denna uppsats beräknar prioriteringar från de parvisa jämförelserna i tabell 19 kommer läsarens prioriteringar inte att stämma med de prioriteringar som redovisas i tabell 19. Prioriteringarna i tabell 19 är beräknade sedan matrisen multiplicerats med sig själv så många gånger att prioriteringar mellan två efterföljande höjningar inte skiljer sig från varandra.

3.5.4.2 Underkriteriernas globala prioriteringar

I tabell 20 visas resultatet av de parvisa jämförelserna för av de tre underkriterierna till kriteriet driftkostnad och de lokala prioriteringarna för dessa kriterier.

Tabell 20 Jämförelsematrisen för underkriterierna till driftkostnad

	Serviceintervall	Bränslekostnad	Servicekostnad	Prioriteringar
Serviceintervall	1	$1/3$	$1/2$	0,157
Bränslekostnad	3	1	3	0,594
Servicekostnad	2	$1/3$	1	0,249

$\lambda_{max} = 3{,}05$
$CI = 0{,}03$
$CR = 0{,}05$

Tabell 21 visar beräkningen av de globala prioriteringarna för underkriterierna till kriteriet driftkostnad. De till driftkostnad underliggande kriteriernas lokala prioriteringar multipliceras med den globala prioriteringen för driftkostnad, 0,145 (se tabell 19).

Tabell 21 Beräkning av globala prioriteringar för serviceintervall, bränslekostnad och servicekostnad

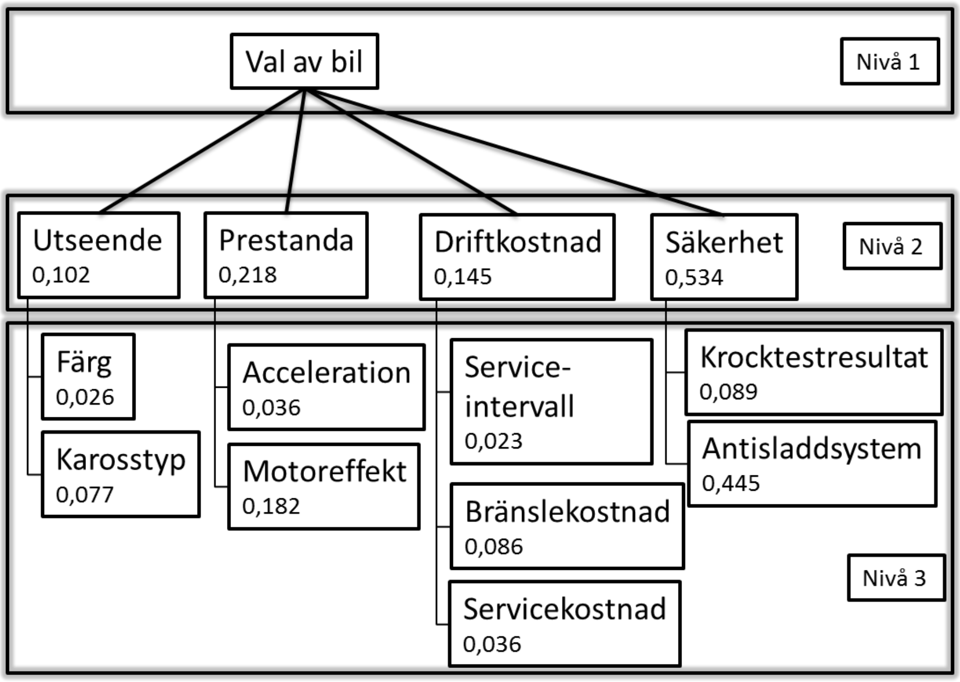
	Lokal prioritering	Beräkning av global prioritering	Global prioritering
Serviceintervall	$0{,}157$	$0{,}157 \cdot 0{,}145$	$0{,}023$
Bränslekostnad	$0{,}594$	$0{,}594 \cdot 0{,}145$	$0{,}086$
Servicekostnad	$0{,}249$	$0{,}249 \cdot 0{,}145$	$0{,}036$
Summa	$1{,}000$		$0{,}145$

Summan av underkriteriernas globala prioriteringar är lika med överliggande kriteriums globala prioritering.

För övriga kriterier på nivå 3 beräknas de globala prioriteringarna på samma sätt: för varje kriterium multipliceras den lokala prioriteringen med den globala prioriteringen för närmast överliggande kriterium. Resterande globala prioriteringar i bilexemplet redovisas i tabell 22 och figur 3.

Tabell 22 Beräkning av övriga globala prioriteringar i bilexemplet

Kriterium	Underkriterium	Lokal prioritering	Beräkning av global prioritering	Global prioritering
Utseende	Färg	0,250	$0{,}250 \cdot 0{,}102$	0,026
	Karosstyp	0,750	$0{,}750 \cdot 0{,}102$	0,077
Prestanda	Acceleration	0,167	$0{,}167 \cdot 0{,}218$	0,036
	Motoreffekt	0,833	$0{,}833 \cdot 0{,}218$	0,182
Säkerhet	Krocktestresultat	0,167	$0{,}167 \cdot 0{,}534$	0,089
	Antisladdsystem	0,833	$0{,}833 \cdot 0{,}534$	0,445



Figur 3 Kriterier med globala prioriteringar

3.5.4.3 Alternativens lokala prioriteringar

I bilexemplet står valet mellan tre bilar: bil A, bil B och bil C. Dessa tre alternativ jämförs parvis med avseende på vart och ett av kriterierna på nivån längst ner i hierarkin. Jämför med 3.3.2 och figur 2.

Beslutsfattaren ska ta ställning till ett påstående eller en fråga som liknar den formulering som ställdes för kriterierna, ”Jämför den relativa preferensen med avseende på: färg?”[3] Beslutsfattarens svar kan då vara att ”Bil B är 4 gånger bättre än Bil A med avseende på braheten hos färgen”.

I tabell 23 redovisas de lokala prioriteringarna som följer av användarens svar på de parvisa jämförelserna med avseende på kriteriet färg.

Tabell 23 Jämförelsematris för alternativen med avseende på kriteriet färg

	Bil A	Bil B	Bil C	Prioritering
Bil A	1	$1/4$	1	0,160
Bil B	4	1	5	0,691
Bil C	1	$1/5$	1	0,149

$\lambda_{max} = 3{,}01$
$CI = 0{,}00$
$CR = 0{,}01$

[3] Formuleringen på engelska i skrivbordversionen av Expert Choice™ lyder: Compare the relative preference with respect to: Färg

Beslutsfattaren gör sedan parvisa jämförelser av alternativen för vart och ett av kriterierna på nivå tre vilka redovisas i följande jämförelsematriser i tabell 24 till tabell 31.

Tabell 24 Jämförelsematris för alternativen med avseende på kriteriet karosstyp

	Bil A	Bil B	Bil C	Prioritering
Bil A	1	3	$1/2$	0,320
BIL B	$1/3$	1	$1/4$	0,122
Bil C	2	4	1	0,558

$\lambda_{max} = 3{,}02$
$CI = 0{,}01$
$CR = 0{,}02$

Tabell 25 Jämförelsematris för alternativen med avseende på kriteriet acceleration

	Bil A	BIL B	Bil C	Prioritering
Bil A	1	$1/5$	2	0,167
Bil B	5	1	7	0,740
Bil C	$1/2$	$1/7$	1	0,094

$\lambda_{max} = 3{,}01$
$CI = 0{,}01$
$CR = 0{,}01$

Tabell 26 Jämförelsematris för alternativen med avseende på kriteriet motoreffekt

	Bil A	Bil B	Bil C	Prioritering
Bil A	1	$1/3$	$1/2$	0,169
Bil B	3	1	1	0,443
Bil C	2	1	1	0,387

$\lambda_{max} = 3{,}02$
$CI = 0{,}01$
$CR = 0{,}02$

Tabell 27 Jämförelsematris för alternativen med avseende på kriteriet serviceintervall

	Bil A	Bil B	Bil C	Prioritering
Bil A	1	4	3	0,625
Bil B	$1/4$	1	$1/2$	0,136
Bil C	$1/3$	2	1	0,238

$\lambda_{max} = 3{,}02$
$CI = 0{,}01$
$CR = 0{,}02$

Tabell 28 Jämförelsematris för alternativen med avseende på kriteriet bränslekostnad

	Bil A	Bil B	Bil C	Prioritering
Bil A	1	5	3	0,637
Bil B	$1/5$	1	$1/3$	0,105
Bil C	$1/3$	3	1	0,258

$\lambda_{max} = 3{,}04$
$CI = 0{,}02$
$CR = 0{,}04$

Tabell 29 Jämförelsematris för alternativen med avseende på kriteriet servicekostnad

	Bil A	Bil B	Bil C	Prioritering
Bil A	1	4	3	0,634
Bil B	$1/4$	1	1	0,174
Bil C	$1/3$	1	1	0,192

$\lambda_{max} = 3{,}01$
$CI = 0{,}00$
$CR = 0{,}01$

Tabell 30 Jämförelsematris för alternativen med avseende på kriteriet krocktestresultat

	Bil A	Bil B	Bil C	Prioritering
Bil A	1	5	8	0,742
Bil B	$1/5$	1	3	0,183
Bil C	$1/8$	$1/3$	1	0,075

$\lambda_{max} = 3{,}04$
$CI = 0{,}02$
$CR = 0{,}04$

Tabell 31 Jämförelsematris för alternativen med avseende på kriteriet antisladdsystem

	Bil A	Bil B	Bil C	Prioritering
Bil A	1	$1/4$	3	0,211
Bil B	4	1	7	0,705
Bil C	$1/3$	$1/7$	1	0,084

$\lambda_{max} = 3{,}03$
$CI = 0{,}02$
$CR = 0{,}03$

3.5.4.4 Alternativens globala prioriteringar

Alternativens globala prioriteringar och den rangordning av alternativen som prioriteringar ger upphov till är slutresultatet för AHP. Den globala prioriteringen beräknas som

$$p_i = \sum_j w_j \cdot l_{ij}$$

där p_i är den globala prioriteringen för alternativ i, w_j är kriteriets globala prioritering och l_{ij} är den lokala prioriteringen för alternativ i med avseende på kriterium j [9] (p. 39). I tabell 32 redovisas de globala prioriteringarna med avseende på varje kriterium för alternativet Bil A.

Tabell 32 Globala prioriteringar med avseende på varje kriterium för alternativet Bil A

	Bil As lokala prioritering m.a.p.[4] resp. kriterium	Kriteriets globala prioritering	Bil As globala prioritering m.a.p. resp. kriterium
Färg	0,160	0,026	$0{,}160 \cdot 0{,}026 = 0{,}004$
Karosstyp	0,320	0,077	$0{,}320 \cdot 0{,}077 = 0{,}025$
Acceleration	0,167	0,036	$0{,}167 \cdot 0{,}036 = 0{,}006$
Motoreffekt	0,169	0,182	$0{,}169 \cdot 0{,}182 = 0{,}031$
Serviceintervall	0,625	0,023	$0{,}625 \cdot 0{,}023 = 0{,}014$
Bränslekostnad	0,637	0,086	$0{,}637 \cdot 0{,}086 = 0{,}055$
Servicekostnad	0,634	0,036	$0{,}634 \cdot 0{,}036 = 0{,}023$
Krocktestresultat	0,742	0,089	$0{,}742 \cdot 0{,}089 = 0{,}066$
Antisladdsystem	0,211	0,445	$0{,}211 \cdot 0{,}445 = 0{,}094$

Summan av de globala prioriteringarna med avseende på respektive kriterium i tabell 32 är den globala prioriteringen för bil A. I detta exempel är den globala prioriteringen för bil A 0,317.

Prioriteringarna för bil B och bil C beräknas på samma sätt som för bil A. Prioriteringen är 0,483 för bil B och 0,199 för bil C.

3.6 AHPs koppling till den additiva nyttofunktionen

Ovan beskrivs hur AHP beräknar de prioriteringar som ligger till grund för rangordningen av alternativen. I detta avsnitt kopplas AHPs beräkningsmetoder till den additiva nyttofunktionen. Avsnittet inleds med kort redogörelse för begreppen nytta och additiv nyttofunktion. Efter detta följer en beskrivning av AHPs koppling till additiv nyttofunktion med hjälp av bilexemplet och vad det innebär för det sätt AHP använder för att samla in information om multikriterieproblem.

[4] Med avseende på

3.6.1 Nytta

I bilexemplet utvärderas bilarna med avseende på ett antal kriterier eller om man så vill, aspekter. En av dessa aspekter är motoreffekten. Motoreffekten, som troligen mäts i hästkrafter eller kW, är en deskriptiv aspekt. Denna deskriptiva aspekt har en objektiv avgörningsmetod för att mäta effekten. Braheten med motoreffekten hos var och en av dessa motorer är en värdering av var och en av motorernas motoreffekt. Olika människor tycker olika bra om varje nivå på aspekten motoreffekt. En del tycker att högre motoreffekt alltid är bättre än lägre motoreffekt medan andra kanske anser att braheten hos motoreffekten avtar efter ett visst antal kW. Måttet på värderingen, braheten, kan representeras numeriskt och kallas nyttan med motoreffekten.

Generellt kan sägas att nyttovärdet kan, men behöver inte, beräknas med utgångspunkt från nivån på den deskriptiva aspekten. Det är vanligt att skalan för nyttovärdet går från 0 till 1 eller 0 till 100.

3.6.2 Additiv nyttofunktion

Additiv nyttofunktion är vanligt förekommande inom multikriterieanalys. Den additiva nyttofunktionen aggregerar nyttomått från flera aspekter, d.v.s. delnyttofunktioner till ett sammanvägt nyttomått för den totala braheten.

Ett exempel på en additiv nyttofunktion är [4] (pp. 720-721)

$$U(x_1 \dots x_m) = k_1 U_1(x_1) + \cdots + k_m U_m(x_m) = \sum_{i=1}^{m} k_i U_i(x_i) \tag{3.1}$$

i vilken det gäller att

m är olika aspekter. I bilexemplet är några aspekter färg, karossform, motoreffekt

U är totalnyttan, måttet på den samlade nyttan

U_m är nyttomåttet för aspekten α_i, t.ex. för effekten 145 kW i aspekten motoreffekt.

k_m är koefficienten för nyttofunktionen U_m vid sammanvägningen av delnyttofunktionerna. Ofta bestämmer man k så att $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = 1$.

Det är viktigt att skilja viktkoefficienten för varje nyttofunktion från viktigheten hos aspekten. Viktkoefficienten är beroende av måttet på nyttofunktionen och ändras om måttet för nyttofunktionen ändras. Att detta gäller kan visas genom att anta att i en enkel additiv nyttofunktion gäller att totalnyttan U är den sammanvägda nyttan av värdet hos två aspekter, så att[5]

$$U(x_1, x_2) = k_1 U_1(x_1) + k_2 U_2(x_2)$$

Anta $k_1 = k_2 = 1$ så att den additiva nyttofunktionen är

$$U(x_1, x_2) = U_1(x_1) + U_2(x_2)$$

[5] Exemplet kommer från kursmaterialet till kursen Teorier och verktyg för komplexa beslut, höstterminen 2013, Högskolan i Gävle

Detta innebär inte att viktigheten hos aspekt 1 är lika med viktigheten hos aspekt 2. Anta att

$$U_1' = 0{,}5U_1$$

Då gäller

$$U(x_1, x_2) = 2U_1'(x_1) + U_2(x_2)$$

Koefficienten för nyttofunktionen U_1' är nu dubbelt så stor som koefficienten för nyttofunktionen U_2. Av detta kan vi se att viktkoefficienten för nyttan med aspektnivåerna beror av vilket mått som används. Vi kan också se att viktkoefficienterna för nyttomåtten inte har något samband med viktigheten hos aspekt 1 och 2. Det är alltså nödvändigt att skilja ett kriteriums viktighet från viktkoefficienten för dess nyttomått i den additiva totala nyttofunktionen.

3.6.3 En additiv nyttofunktion för bilexemplet

Här konstrueras en additiv nyttofunktion för att beräkna totalnyttan för varje bil i bilexemplet. Totalnyttan, som vi kan kalla U, är ett mått på aspekten total brahet, här kallad α_0.

Vid de parvisa jämförelserna av alternativ i AHP avgör beslutsfattaren hur braheten (nyttan) hos ett alternativ förhåller sig till braheten (nyttan) hos ett annat alternativ med avseende på ett kriterium. Låt, för aspekterna $\alpha_i, i > 0$,

α_1 vara aspekten brahet med avseende på utseende
α_2 vara aspekten brahet med avseende på prestanda
α_3 vara aspekten brahet med avseende på driftkostnad
α_4 vara aspekten brahet med avseende på säkerhet
Aspekten α_0, den totala braheten, är ett aggregat av aspekterna $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ och α_4.

Vidare låter vi $U_i, i > 0$, vara nyttomåttet för nivåer i aspekten α_i. För bilexemplet gäller därför att vi låter

U_1 vara nyttomåttet för braheten med avseende på utseende
U_2 vara nyttomåttet för braheten med avseende på prestanda
U_3 vara nyttomåttet för braheten med avseende på driftkostnad
U_4 vara nyttomåttet för braheten med avseende på säkerhet

Beräkningen av totalnyttan U kan därmed uttryckas som en additiv nyttofunktion bestående av fyra delnyttofunktioner enligt

$$U(x_1, \dots, x_4) = k_1U_1(x_1) + k_2U_2(x_2) + k_3U_3(x_3) + k_4U_4(x_4) = \quad (3.2)$$

$$= \Sigma_{\mathrm{i}=1}^{4} k_iU_i(x_i)$$

där

k_m är en viktkoefficient för funktionen U_m
$U_m(x_m)$ är nyttomåttet för aspektnivåer med avseende på aspekten α_m.

Analogt med resonemanget ovan om braheten med avseende på kriterierna på nivå 2 låter vi följande gälla för aspekten brahet med avseende på kriterierna på nivå 3:

$a_{1,1}$ vara aspekten brahet med avseende på färg

$\alpha_{1,2}$ vara aspekten brahet med avseende på karosstyp

$\alpha_{2,1}$ vara aspekten brahet med avseende på acceleration

$\alpha_{2,2}$ vara aspekten brahet med avseende på motoreffekt

$\alpha_{3,1}$ vara aspekten brahet med avseende på serviceintervall

$\alpha_{3,2}$ vara aspekten brahet med avseende på bränslekostnad

$\alpha_{3,3}$ vara aspekten brahet med avseende på servicekostnad

$\alpha_{4,1}$ vara aspekten brahet med avseende på krocktestresultat

$\alpha_{4,2}$ vara aspekten brahet med avseende på antisladdsystem

Analogt med resonemanget ovan om nyttomåttet U_i för aspekterna α_i låter vi följande gälla för nyttomåtten $U_{i,j}$ för aspekterna α_{ij}:

$U_{1,1}$ vara nyttomåttet för braheten med avseende på färg

$U_{1,2}$ vara nyttomåttet för braheten med avseende på karosstyp

$U_{2,1}$ vara nyttomåttet för braheten med avseende på acceleration

$U_{2,2}$ vara nyttomåttet för braheten med avseende på motoreffekt

$U_{3,1}$ vara nyttomåttet för braheten med avseende på serviceintervall

$U_{3,2}$ vara nyttomåttet för braheten med avseende på bränslekostnad

$U_{3,3}$ vara nyttomåttet för braheten med avseende på servicekostnad

$U_{4,1}$ vara nyttomåttet för braheten med avseende på krocktestresultat

$U_{4,2}$ vara nyttomåttet för braheten med avseende på antisladdsystem

I AHP beräknas för varje alternativ en prioritering med avseende på varje kriterium på nivån längst ner i kriteriehierarkin. Det innebär att nyttomåttet U_i i ekvation (3.2) i sin tur består av delnyttomått. För bilexemplet gäller då att:

$$U_1(x_{1,1}, x_{1,2}) = k_{1,1}U_{1,1}(x_{1,1}) + k_{1,2}U_{1,2}(x_{1,2})$$

$$U_2(x_{2,1}, x_{2,2}) = k_{2,1}U_{2,1}(x_{2,1}) + k_{2,2}U_{2,2}(x_{2,2})$$

$$U_3(x_{3,1}, x_{3,2}, x_{3,3}) = k_{3,1}U_{3,1}(x_{3,1}) + k_{3,2}U_{3,2}(x_{3,2}) + k_{3,3}U_{3,3}(x_{3,3})$$

$$U_4(x_{4,1}, x_{4,2}) = k_{4,1}U_{4,1}(x_{4,1}) + k_{4,2}U_{4,2}(x_{4,2})$$

Således gäller

$$U\left(x_{1,1},x_{1,2},x_{2,1},x_{2,2},x_{3,1},x_{3,2},x_{3,3},x_{4,1},x_{4,2}\right)$$
$$= k_1\left[k_{1,1}U_{1,1}\left(x_{1,1}\right)+k_{1,2}U_{1,2}\left(x_{1,2}\right)\right]+$$
$$+k_2\left[k_{2,1}U_{2,1}\left(x_{2,1}\right)+k_{2,2}U_{2,2}\left(x_{2,2}\right)\right]+$$
$$+k_3\left[k_{3,1}U_{3,1}\left(x_{3,1}\right)+k_{3,2}U_{3,2}\left(x_{3,2}\right)+k_{3,3}U_{3,3}\left(x_{3,3}\right)\right]+$$
$$+k_4\left[k_{4,1}U_{4,1}\left(x_{4,1}\right)+k_{4,2}U_{4,2}\left(x_{4,2}\right)\right]=$$

$$= k_1k_{1,1}U_{1,1}\left(x_{1,1}\right)+k_1k_{1,2}U_{1,2}\left(x_{1,2}\right)+$$
$$+k_2k_{2,1}U_{2,1}\left(x_{2,1}\right)+k_2k_{2,2}U_{2,2}\left(x_{2,2}\right)+$$
$$+k_3k_{3,1}U_{3,1}\left(x_{3,1}\right)+k_3k_{3,2}U_{3,2}\left(x_{3,2}\right)+k_3k_{3,3}U_{3,3}\left(x_{3,3}\right)+$$
$$+k_4k_{4,1}U_{4,1}\left(x_{4,1}\right)+k_4k_{4,2}U_{4,2}\left(x_{4,2}\right) \tag{3.3}$$

Samtliga viktkoefficienter k_i och $k_{i,j}$ är lika med den lokala prioriteringen för respektive kriterium. Viktkoefficienterna k_1, k_2, k_3 och k_4 hämtas från tabell 19, $k_{3,1}, k_{3,2}$ och $k_{3,3}$ hämtas från tabell 20 och övriga viktkoefficienter $k_{1,1}$, $k_{1,2}$, $k_{2,1}$, $k_{2,2}$, $k_{4,1}$ och $k_{4,2}$ hämtas från kolumnen ”Lokal prioritering” i tabell 22.

$U_{1,1}(A)$ nedan är nyttan av A med avseende på aspekten $\alpha_{1,1}$, d.v.s. färg och analogt för övriga aspekter och alternativ B och C.

$U_{1,1}(A), U_{1,1}(B)$ och $U_{1,1}(C)$ hämtas från tabell 23
$U_{1,2}(A), U_{1,2}(B)$ och $U_{1,2}(C)$ hämtas från tabell 24
$U_{2,1}(A), U_{2,1}(B)$ och $U_{2,1}(C)$ hämtas från tabell 25
$U_{2,2}(A), U_{2,2}(B)$ och $U_{2,2}(C)$ hämtas från tabell 26
$U_{3,1}(A), U_{3,1}(B)$ och $U_{3,1}(C)$ hämtas från tabell 27
$U_{3,2}(A), U_{3,2}(B)$ och $U_{3,2}(C)$ hämtas från tabell 28
$U_{3,3}(A), U_{3,3}(B)$ och $U_{3,3}(C)$ hämtas från tabell 29
$U_{4,1}(A), U_{4,1}(B)$ och $U_{4,1}(C)$ hämtas från tabell 30
$U_{4,2}(A), U_{4,2}(B)$ och $U_{4,2}(C)$ hämtas från tabell 31

Totalnyttorna för bil A, B och C kan nu beräknas med den additiva nyttofunktionen i ekvation (3.3)

Beräkning av totalnyttan för bil A:
$U(A) =$
$$= 0{,}102\cdot 0{,}250\cdot 0{,}160+0{,}102\cdot 0{,}750\cdot 0{,}320+$$
$$+0{,}218\cdot 0{,}167\cdot 0{,}167+0{,}218\cdot 0{,}833\cdot 0{,}169+$$
$$+0{,}145\cdot 0{,}157\cdot 0{,}625+0{,}145\cdot 0{,}594\cdot 0{,}637+0{,}145\cdot 0{,}249\cdot 0{,}634+$$
$$+0{,}534\cdot 0{,}167\cdot 0{,}742+0{,}534\cdot 0{,}833\cdot 0{,}211\approx 0{,}317$$

Beräkning av totalnyttan för bil B:
$U(B) =$
$$= 0{,}102\cdot 0{,}250\cdot 0{,}691+0{,}102\cdot 0{,}750\cdot 0{,}122+$$
$$+0{,}218\cdot 0{,}167\cdot 0{,}740+0{,}218\cdot 0{,}833\cdot 0{,}443+$$
$$+0{,}145\cdot 0{,}157\cdot 0{,}136+0{,}145\cdot 0{,}594\cdot 0{,}105+0{,}145\cdot 0{,}249\cdot 0{,}174+$$
$$+0{,}534\cdot 0{,}167\cdot 0{,}183+0{,}534\cdot 0{,}833\cdot 0{,}705\approx 0{,}483$$

Beräkning av totalnyttan för bil C:

$$U(C) =$$
$$= 0{,}102 \cdot 0{,}250 \cdot 0{,}149 + 0{,}102 \cdot 0{,}750 \cdot 0{,}558 +$$
$$+ 0{,}218 \cdot 0{,}167 \cdot 0{,}094 + 0{,}218 \cdot 0{,}833 \cdot 0{,}387 +$$
$$+ 0{,}145 \cdot 0{,}157 \cdot 0{,}238 + 0{,}145 \cdot 0{,}594 \cdot 0{,}258 + 0{,}145 \cdot 0{,}249 \cdot 0{,}192 +$$
$$+ 0{,}534 \cdot 0{,}167 \cdot 0{,}075 + 0{,}534 \cdot 0{,}833 \cdot 0{,}084 \approx 0{,}199$$

Resultatet av de tre additiva nyttofunktionerna visar att beräkningarna av prioriteringarna i AHP bygger på en additiv nyttofunktion. Som nämndes i 3.6.1.2 så ska viktkoefficienterna bero av delnyttofunktionerna. I AHPs additiva nyttofunktion är så inte fallet eftersom det som används som viktkoefficienter är vad som i AHP anses vara kriteriernas viktighet givet i form av kriteriernas prioriteringar. Att påstå t.ex. att bränslekostnaden är 3 gånger viktigare än serviceintervallet, vilket är meningsfullt inom ramen för AHP, är något som Ralph Keeney i sin bok *Value Focused Thinking* [16] (pp. 147-148) i samband med ”*prioritizing objectives*” kallar ”*the most common critical mistake*”. Keeney exemplifierar det så här:

> ”As an illustration, consider an air pollution problem where the concerns are air pollution concentrations and the cost of regulating air pollution emissions. Administrators, regulators, and members of the public are asked questions such as ‘In this air pollution problem, which is more important, costs or pollution concentrations?’ […] For instance, a respondent might state that pollutant concentrations are three times as in important as costs. […] Does it mean, for example, that lowering pollutant concentrations in a metropolitan area by one part per million would be worth the cost of $2 billion? The likely answer is ’of course not.’”

4 Rank reversal – ett problemkomplex inom AHP

Vid användning av AHP kan ett fenomen kallat *rank reversal* uppkomma. *Rank reversal* innebär att en omformulering av beslutsproblemet leder till en förändring i rangordningen som omformuleringen inte borde leda till.

4.1 Exempel på en 4x4-matris och dess delmängder

Fyra alternativ, *a*, *b*, *c* och *d* utvärderas med avseende på ett kriterium. I ett första exempel illustreras en situation där beslutsfattarens svar på en parvis jämförelse inte stämmer överens med det sammanvägda resultatet från AHP. I ett andra exempel illustreras en situation där ett av fyra alternativ tas bort från alternativmängden.

4.1.1 Ett första exempel

Beslutsfattarens parvisa jämförelser redovisas i tabell 33.

Tabell 33 Jämförelsematris med alternativen a, b, c, och d

	a	b	c	d	Prioritering
a	1	$6/5$	$3/4$	$4/3$	0,260
b	$5/6$	1	$5/8$	$45/64$	0,190
c	$4/3$	$8/5$	1	$7/8$	0,289
d	$3/4$	$64/45$	$8/7$	1	0,261

$\lambda_{max} = 4{,}05$
$CI = 0{,}02$
$CR = 0{,}02$

De fyra alternativen rangordnas som $c \succ d \succ a \succ b$. Notera att skillnaden i prioritering mellan alternativ *d* och *a* är mycket låg, 0,001. Alternativ *a* och *d* är alltså i prioriteringen med avseende på kriteriet mycket lika varandra trots att beslutsfattaren i jämförelsen mellan *d* och *a* svarat att a är $4/3$ (1,333) gånger bättre eller viktigare än *d* med avseende på kriteriet.

Ändras jämförelsen mellan *a* och *d* så att den istället är 1, d.v.s. *a* och *d* lika bra eller viktiga med avseende på kriteriet ändras prioriteringarna för *a* och *d* så att de istället blir 0,241 respektive 0,279 (tabell 34).

Tabell 34 Jämförelsematris med alternativen a, b, c och d efter förändring av jämförelsen av *a* och *d*

	a	b	c	d	Prioritering
a	1	$6/5$	$3/4$	1	0,241
b	$5/6$	1	$5/8$	$45/64$	0,191
c	$4/3$	$8/5$	1	$7/8$	0,289
d	1	$64/45$	$8/7$	1	0,279

$\lambda_{max} = 4{,}02$
$CI = 0{,}01$
$CR = 0{,}01$

Efter denna förändring skiljer sig a och d åt i slutlig prioritering trots att de i jämförelsen med varandra sägs vara likvärdiga med avseende på den inbördes jämförelsen. Ovanstående två matriser illustrerar en situation där resultatet i AHP, trots beslutsfattarens svar på jämförelsen av de två alternativen är att alternativen inte likvärdiga med avseende på ett kriterium, kan tolkas som att alternativen i förhållande till övriga alternativ är likvärdiga. Även den omvända situationen kan inträffa, att beslutsfattaren svarar att alternativen är likvärdiga, men det sammanvägda resultatet i AHP kan tolkas som att det ena alternativet är viktigare eller bättre än det andra.

4.1.2 Ett andra exempel

I de följande fyra jämförelsematriserna (tabell 35 till tabell 38) visas prioriteringarna när ett av alternativen från den första jämförelsematrisen (tabell 33) i tur och ordning tagits bort. I tabell 39 visas en sammanställning över rangordningarna.

Tabell 35 Jämförelsematris med alternativen b, c och d

	b	c	d	Prioritering
b	1	$5/8$	$45/64$	0,249
c	$8/5$	1	$7/8$	0,367
d	$64/45$	$8/7$	1	0,385

$\lambda_{max} = 3{,}01$
$CI = 0{,}00$
$CR = 0{,}01$

Rangordningen av alternativen när alternativ *a* tagits bort blir $d \succ c \succ b$.

Tabell 36 Jämförelsematris med alternativen a, c och d

	a	c	d	Prioritering
a	1	$3/4$	$4/3$	0,333
c	$4/3$	1	$7/8$	0,351
d	$3/4$	$8/7$	1	0,316

$\lambda_{max} = 3{,}06$
$CI = 0{,}03$
$CR = 0{,}05$

Rangordningen av alternativen när alternativ *b* tagits bort blir $c \succ a \succ d$.

Tabell 37 Jämförelsematris med alternativen a, b och d

	a	b	d	Prioritering
a	1	$6/5$	$4/3$	0,386
b	$5/6$	1	$45/64$	0,277
d	$3/4$	$64/45$	1	0,338

$\lambda_{max} = 3{,}02$
$CI = 0{,}01$
$CR = 0{,}02$

Rangordningen av alternativen när alternativ *c* tagits bort blir $a \succ d \succ b$.

Tabell 38 Jämförelsematris med alternativen a, b och c

	a	b	c	Prioritering
a	1	$6/5$	$3/4$	0,316
b	$5/6$	1	$5/8$	0,263
c	$4/3$	$8/5$	1	0,421

$\lambda_{max} = 3{,}00$
$CI = 0{,}00$
$CR = 0{,}00$

Rangordningen av alternativen när alternativ *d* tagits bort blir $c \succ a \succ b$.

Tabell 39 Sammanställning över rangordningarna

	Rangordning
Alla alternativ är med (tabell 33)	$c \succ d \succ a \succ b$
Alternativ a tas inte med (tabell 35)	$d \succ c \succ b$
Alternativ b tas inte med (tabell 36)	$c \succ a \succ d$
Alternativ c tas inte med (tabell 37)	$a \succ d \succ b$
Alternativ d tas inte med (tabell 38)	$c \succ a \succ b$

I sammanställningen i tabell 39 kan vi se att alternativ *a* får högre prioritering än *d* i de två delmängder där *a* och *d* ingår som två av tre element. Trots detta får *d* en högre prioritering än *a* när alla fyra alternativen tas med i samma matris. Ordningen mellan *c* och *d* är olika mellan de två delmängderna där *c* och *d* ingår som två av elementen.

Detta illustrerar att ordningen mellan element kan variera när ett av elementen tas bort från matrisen, trots att de parvisa jämförelserna av de kvarvarande alternativen inte har förändrats.

4.2 Rank reversal

Rank reversal kan uppkomma av många olika orsaker, där en typ av *rank reversal* kan inträffa när, precis som i avsnittet ovan, ett alternativ läggs till eller tas bort från alternativmängden. Belton och Gear [17] (pp. 228-230) har ett mycket citerat exempel på sådan *rank reversal*.

Tre alternativ *A*, *B* och *C* utvärderas med avseende på tre kriterier. Rangordningen av dessa tre alternativ blir i exemplet $B \succ A \succ C$. Ett fjärde alternativ *D* introduceras. Detta fjärde alternativ får samma värden som *B* i de parvisa jämförelserna med alternativ *A* och *C* och vidare är *B* och *D* lika. Rangordningen blir nu istället $A \succ B, D \succ C$, d.v.s. A rangordnas före B och D som i sin tur rangordnas före C. Ordningen mellan A och B ändras vid införandet av alternativ som får samma värden i de parvisa jämförelserna som B, trots att införandet av ett sådant alternativ inte förändrar de parvisa jämförelser där A eller B ingår.

För att komma tillrätta med *rank reversal* orsakad av förändringar i alternativmängden föreslog Belton el. al [17] (pp. 228-230) en annan metod, senare av Saaty kallad *ideal mode* [14] (pp. 138-146), för att beräkna prioriteringarna. I *ideal mode* divideras den lokala prioriteringen för varje alternativ med den högsta lokala prioriteringen för alla alternativ med avseende på varje kriterium varpå de nya prioriteringarna normeras radvis. Den ursprungliga metoden att ta fram alternativens globala prioriteringar kallas efter införandet av *ideal mode* för *distributive mode*.

Beräkningarna av prioriteringarna med *ideal mode* beskrivs nedan med ett exempel [18] (p. 10ff). Tabell 40 visar de prioriteringar som beräknats med *distributive mode*. I kolumnerna finns kriterierna för beslutet, fyra stycken i det här fallet. I rad 1 finns de globala prioriteringarna för kriterierna. I rad två till fem finns de lokala prioriteringarna för de fyra alternativen. I källan för exemplet redovisas prioriteringarna med två decimaler, vilket gör att det skiljer sig från övriga exempel i uppsatsen som genomgående använder tre decimaler för prioriteringarna.

Tabell 40 Exempel på beslutsmatris före normering med *ideal mode*

	Kriterium 1	Kriterium 2	Kriterium 3	Kriterium 4	Global prioritering
Kriteriernas globala prioriteringar	0,42	0,19	0,12	0,27	
Alternativ A lokal prioritering	0,30	0,21	0,30	0,32	0,29
Alternativ B lokal prioritering	0,17	0,11	0,04	0,49	0,23
Alternativ C lokal prioritering	0,07	0,36	0,46	0,15	0,19
Alternativ D lokal prioritering	0,46	0,32	0,20	0,04	0,29

Alternativens lokala prioriteringar divideras med den största lokala prioriteringen i varje kolumn

$$l_i^{ideal} = \frac{l_i^{dist}}{l_g^{dist}}$$

där l_i^{ideal} är den lokala prioriteringen enligt *ideal mode* för alternativ *i*, l_i^{dist} är den lokala prioriteringen enligt *distributive mode* för alternativ *i* och l_g^{dist} är den största lokala prioriteringen enligt *distributive mode* (tabell 41). För alternativ A och kriterium 1 gäller alltså att den lokala prioriteringen med *ideal mode* är

$$l_A^{ideal} = \frac{l_A^{dist}}{l_D^{dist}} = \frac{0{,}30}{0{,}46} = 0{,}66$$

Ett av alternativen i varje kolumn kommer därför att få värdet 1,000 som lokal prioritering: för kriterium 1 är det alternativ D, som har den största prioriteringen i *distributive mode,* som får den nya lokala prioriteringen 1,000.

Tabell 41 Exempel på beslutsmatris efter normering med *ideal mode*

	Kriterium 1	Kriterium 2	Kriterium 3	Kriterium 4	Global prioritering
Kriteriernas globala prioriteringar	0,42	0,19	0,12	0,27	
Alternativ A ny lokal prioritering	0,66	0,59	0,66	0,66	0,28
Alternativ B ny lokal prioritering	0,38	0,31	0,10	1,00	0,22
Alternativ C ny lokal prioritering	0,15	1,00	1,00	0,30	0,20
Alternativ D ny lokal prioritering	1,00	0,90	0,43	0,09	0,30

Radsummorna normeras för att få fram alternativens globala prioriteringar

$$p_i = \frac{r_i}{\Sigma_j r_j}$$

Där p_i är den globala prioriteringen, r_i är radsumman för alternativ *i* och $\Sigma_j r_j$ är summan av alla radsummor. Se 3.5.1 för detaljer.

För alternativ A blir radsumman $0{,}66 + 0{,}59 + 0{,}66 + 0{,}66 = 2{,}57$ och den normerade globala prioriteringen beräknad enligt *ideal mode*

$$p_A = \frac{2{,}57}{2{,}57 + 1{,}79 + 2{,}45 + 2{,}42} = 0{,}28$$

Vid en jämförelse av tabell 40 och tabell 41 framgår att prioriteringarna skiljer sig något. Alternativ A och D har inte samma prioritering längre utan D har en högre prioritering än A i tabell 41. Det har visats att förändringar i rangordningen av alternativ mellan *ideal mode* och *distributive mode* kan vara större än så, t.ex. [12] (pp. 206-207).

Saaty redovisar detaljerna i skillnaderna mellan *distributive mode* och *ideal mode* i t.ex. [8] (p 420-421). Saaty redogör i samma avsnitt också för riktlinjer för när *ideal mode* respektive *distributive mode* bör användas. *Distributive mode* bör användas när beslutsfattaren är intresserad av att veta i vilken utsträckning ett alternativ dominerar de övriga alternativen. *Ideal mode* bör användas när beslutsfattaren är intresserad av att veta hur alternativen förhåller sig till en fast punkt, *benchmark*, som t.ex. det alternativ som har den högsta prioriteringen med avseende på ett kriterium. Saaty verkar anse att man först bestämmer vikten hos, d.v.s. prioriteringen av, aspekterna och sedan tar ställning till hur man väljer nyttomåttet enligt *distributive mode* eller *ideal mode*. Som framgår av 3.6.1.1 är det detta ett tveksamt förfaringssätt.

Ett annat exempel på *rank reversal* är s.k. *right-left rank reversal* [9] (p. 37) som kan inträffa om egenvärdesmetoden används för att beräkna prioriteringarna. *Right-left rank reversal* innebär att om alla jämförelser ersätts med sina reciproka värden så bör också den nya rangordningen vara omvändningen av den ursprungliga rangordningen. Alternativt kan *right-left rank reversal* inträffa om påståendet som beslutsfattaren ska ta ställning till ändras, så att svaren på påståendet är motsatsen till svaren på det ursprungliga påståendet. Ishizaka et al. [9] (p. 37) diskuterar ett exempel och kommenterar det på följande sätt:

> ”…asking ’Which alternative is most economical?’. The calculated priorities give the following ranking of the alternatives: $D > B > C > A > E$. If the question is inverted: ‘Which alternative is most expensive?’, then the comparisons are simply inverted. […] The calculated priorities give the following ranking of the alternatives: $B > D > C > A > E$. In this case alternative B is preferred, but before it was alternative D.”

För att undvika denna typ av *rank reversal* kan man istället för att använda egenvärdesmetoden för att beräkna prioriteringarna använda det geometriska medelvärdet [9] (p. 38). Prioriteringen för element *i*, p_i beräknas då istället som

$$p_i = n\sqrt{\prod_{j=1}^{n} a_{ij}}$$

där p_i är prioriteringen för *i*, *n* är antalet element och a_{ij} är värdet av den parvisa jämförelsen mellan elementen i och j. Möjligheten att använda det geometriska medelvärdet vid beräkningar av prioriteringar finns inte i programvaran Expert Choice™ [12] (p.213).

5 Sammanfattning och diskussion

AHP är ett ofta använt beslutsstöd för att hantera multikriterieproblem. Det uppfattas inte sällan som lättanvänt och det finns implementerat i flera kommersiella produkter. Det kan antas att AHP har blivit så populärt eftersom AHP ger en rangordning, som bestäms av något som kan tolkas som mycket exakta prioritieringar med tre decimalers noggrannhet. AHP, som i den här uppsatsen delvis har exemplifierats med Expert Choice™, har dock flera problematiska drag, som bör framhållas och som (i varierande grad) berörts i det föregående. Det gäller bl.a. följande:

(1) Om en jämförelsematris är inkonsistent görs matrisen konsistent enligt AHP genom att multiplicera matrisen med sig själv ett antal gånger men vad som då egentligen händer är i hög grad dolt för användaren. Man överlåter till AHP att lösa upp inkonsistenser, d.v.s. att justera intransitiviteter. Detta är något som beslutsfattaren borde göra men som i AHP döljs för användaren. Se avsnitt 3.5.2.

(2) I AHP används två s.k. skalor för parvisa jämförelser, nämligen en verbal skala och en numerisk, båda har 9 skalsteg. I Expert Choice™ finns ännu en numerisk skala med möjliga värden 1-99 med två decimaler. Se avsnitt 3.3.3.

(3) Sammansättning av skalsteg, se avsnitt 3.3.3. Om a är svagt bättre el. viktigare än (i fortsättningen förkortat viktigare än) b och b står i samma relation till c, så är a extremt viktigare än c. Ty a är då 3 gånger så viktig som b och b är 3 gånger så viktig som c och alltså a $3 \times 3 = 9$ gånger så viktig som c. Detta tycks inte vara helt oproblematiskt.

(4) Användaren bör vara uppmärksam när det gäller problemkomplexet *rank reversal*, se avsnitt 4.1 och 4.2. Prioriteringsrangordningen mellan två alternativ kan ändras beroende på om ett tredje alternativ tas med i analysen eller inte.

(5) I avsnitt 3.6 visas genom ett exempel hur AHP baseras på den additiva nyttomodellen, vilket dock är dold för användaren.

(6) Utsagor om viktigheten hos aspekter får mening genom kopplingen till vilket mått som valts för aspekterna. Detta framgår av avsnitt 3.6. Detta förbises i AHP och därigenom begås det som Keeney [16] (pp. 147-148) kallar för ”*the most common critical mistake*”. För att avgöra hur viktigheten hos ett kriterium förhåller sig till viktigheten hos ett annat kriterium krävs två sammanvägningar, se vidare [19] (ch. 4, pp. 154ff).

(7) I AHP förutsätts att nyttan mäts på kvotskala. Detta framgår av att nyttomåtten erhålls ur kvotjämförelser (se avsnitt 3.3) och övergången mellan mått enligt ideal och distributive mode, se avsnitt 4.2. För den additiva nyttomodellen, som AHP baseras på, räcker att nyttan mäts på intervallskala.

AHP utgår i de parvisa jämförelserna från att det som alternativen jämförs utifrån mäts på kvotskala. Det kan dock diskuteras eftersom jämförelserna mellan alternativen handlar om nyttojämförelser och det är problematiskt att mäta nytta på kvotskala. Differenser mellan värden för en intervallskala mäts dock på kvotskala. Ett förslag till fortsatt forskning är därför att utreda vad det skulle innebära och om det överhuvudtaget är möjligt med nuvarande utformning av AHP att använda nyttodifferenser som indata till AHP.

6 Referenser

[1] A. Guitouni and J. Martel, "Tentative guidelines to help choosing an appropriate MCDA method," *European Journal of Operational Research,* vol. 109, pp. 501-521, 9/1, 1998.

[2] V. Belton and T. J. Stewart, *Multiple Criteria Decision Analysis: An Integrated Approach.* Springer, 2002.

[3] T. L. Saaty, "The analytic hierarchy process: planning, priority setting, resources allocation", *McGraw-Hill*, 1980.

[4] R. T. Clemen and T. Reilly, *Making Hard Decisions with Decision Tools®.* SOUTH-WESTERN CENGAGE Learning, 2013.

[5] *MATRIX 2.3 - Matrix and Linear Algebra functions for Excel*. http://digilander.libero.it/foxes/index.htm (besökt 2013-12-11)

[6] *Matrix Raised to a Power in Excel*. http://social.technet.microsoft.com/Forums/office/en-US/1b088152-0e6f-4924-b94b-78b8824d5956/matrix-raised-to-a-power-in-excel?forum=excel (besökt 2013-12-14)

[7] J. Walkenbach, *Excel 2010 Formulas.* Hoboken, NJ: Wiley Pub, 2010.

[8] T. L. Saaty, "Basic theory of the analytic hierarchy process: how to make a decision", *Revista De La Real Academia De Ciencias Exactas, Físicas Y Naturales,* vol. 93, pp. 395-423, 1999.

[9] A. Ishizaka and P. Nemery, *Multi-Criteria Decision Analysis: Methods and Software.* John Wiley & Sons, 2013.

[10] S. Siraj, L. Mikhailov and J. Keane, "A heuristic method to rectify intransitive judgments in pairwise comparison matrices", *European Journal of Operational Research,* vol. 216, pp. 420-428, 1/16, 2012.

[11] J. Odelstad, "Eudoxos - A Research Programme in Decision Analysis", Teknisk rapport, Högskolan i Gävle, 2013.

[12] A. Ishizaka and A. Labib, "Analytic hierarchy process and expert choice: Benefits and limitations", *OR Insight*, vol. 22, pp. 201-220, 2009.

[13] J. A. Alonso and M. T. Lamata, "Consistency in the analytic hierarchy process: a new approach", *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems,* vol. 14, pp. 445-459, 2006.

[14] T. L. Saaty, *Fundamentals of Decision Making and Priority Theory with the Analytic Hierarchy Process.* RWS publications Pittsburgh, 1994.

[15] T. L. Saaty, "How to make a decision: the analytic hierarchy process", *European Journal of Operational Research,* vol. 48, pp. 9-26, 1990.

[16] R. L. Keeney, *Value-Focused Thinking : A Path to Creative Decision making.* Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1992.

[17] V. Belton and T. Gear, "On a short-coming of Saaty's method of analytic hierarchies," *Omega,* vol. 11, pp. 228-230, 1983.

[18] A. van der Merwe, "Ideal mode Analytic Hierarchy Process Pairwise Comparison Model" http://www.nampower.com.na/docs/media/Annexure%20C%20-%20Pairwise%20Comparison%20Model%20Description.pdf (besökt 2013-11-12).

[19] J. Odelstad, *Mätning och beslut: Sju uppsatser om meningsfullhet, amalgamering och begreppet funktion.* Uppsala: Uppsala universitet; Philosophical studies (Filosofiska studier), 1990.