Från operationell till relationell förståelse

En interventionsstudie som undersöker hur icke-standardiserade ekvationer påverkar elevernas förståelse för likhetstecknets innebörd

---

From operational to relational understanding

An intervention study on how non-standard equations affect students' understanding of the equal sign

---

Susanne Backman
Sandra Cillerwall

Fakultet för hälsa, natur- och teknikvetenskap

Grundlärarprogrammet: Förskoleklass och grundskolans årskurs 1-3

Avancerad nivå/30 hp

Handledare: David Taub

Examinator: Yvonne Liljekvist

Datum: 2025-06

Sammanfattning

Elever utvecklar ofta operationell förståelse för likhetstecknet, där symbolen tolkas som en uppmaning att utföra en beräkning. Detta kan skapa hinder i deras fortsatta matematiska utveckling, särskilt inom algebra. Tidigare forskning har visat att icke-standardiserade ekvationer kan utmana denna föreställning och i stället stödja relationell förståelse, där likhetstecknet ses som en symbol för ekvivalens mellan två uttryck.

Syftet med denna studie var att undersöka hur undervisning med icke-standardiserade ekvationer i årskurs 1 kan bidra till att utveckla elevers relationella förståelse för likhetstecknet. Studien inkluderade även en analys av vilka möjligheter och begränsningar det använda testinstrumentet hade att synliggöra elevers operationella respektive relationella förståelse. Studien genomfördes som en interventionsstudie med för-, efter- och uppföljningstest. Totalt deltog 41 elever från två klasser. Undervisningen utformades med stöd av procept-teorin, variationsteorin samt Carpenter m.fl.:s (2003) milstolpar.

Resultaten visade en signifikant och varaktig förbättring i elevernas förståelse för likhetstecknet efter interventionen. Elevernas svar tydde på en förflyttning från operationell till relationell förståelse, samt på en ökad variation i korrekta lösningar. Testinstrumentet fungerade ändamålsenligt för att fånga denna utveckling, även om vissa uppgifter visade att ytterligare förbättringar kan göras för att tydligare särskilja elevers förståelse.

Studien visar att undervisning som inkluderar icke-standardiserade ekvationer redan i årskurs 1 kan stärka elevers relationella förståelse och lägga en viktig grund för fortsatt arbete med algebra och utvecklingen av *mathematical literacy*.

Nyckelord: Likhetstecknet, relationell förståelse, icke-standardiserade ekvationer, årskurs 1, procept-teorin, variationsteorin, tidig algebra.

Abstract

Pupils often develop an operational understanding of the equal sign, interpreting it as an instruction to calculate an answer. This view can hinder their future mathematical development, particularly in algebra. Previous research has shown that non-standard equations can challenge this misconception and instead support the development of a relational understanding, where the equal sign is seen as representing an equivalence between two expressions.

The aim of this study was to investigate how teaching with non-standard equations in Year 1 can contribute to the development of pupils' relational understanding of the equal sign. The study also included an analysis of the possibilities and limitations of the test instrument in capturing pupils' operational and relational understanding. The study was conducted as an intervention with pre-, post- and follow-up tests. A total of 41 pupils from two classes participated. The teaching was designed based on procept theory, variation theory, and Carpenter et al.'s (2003) milestones.

The results showed a significant and lasting improvement in pupils' understanding of the equal sign following the intervention. Pupils' responses suggested a shift from operational to relational understanding, along with increased variation in correct solutions. The test instrument proved to be effective in capturing this development, although some tasks indicated that further refinements could enhance its sensitivity.

The study suggests that teaching incorporating non-standard equations as early as Year 1 can strengthen pupils' relational understanding and lay an important foundation for further work in algebra and the development of mathematical literacy.

Keywords: Equal sign, relational understanding, non-standard equations, Year 1, procept theory, variation theory, early algebra.

Innehållsförteckning

1 Inledning ... 1

1.1 Introduktion ... 1

1.2 Syfte ... 3

1.3 Forskningsfråga ... 3

2 Bakgrund ... 4

2.1 Begreppsdefinition ... 4

2.1.1 Aritmetik ... 4
2.1.2 Likhetstecknet ... 4
2.1.3 Uttryck ... 4
2.1.4 Ekvation ... 5
2.1.5 Algebra ... 5
2.1.6 Generaliserad aritmetik ... 5
2.1.7 Tidig algebra ... 5
2.1.8 Operationell och relationell förståelse ... 6
2.1.9 Standardiserade- och icke-standardiserade ekvationer ... 6

2.2 Likhetstecknet i undervisningen ... 6

2.3 Elevers utmaningar med likhetstecknets betydelse ... 7

2.4 Sätt att stärka relationell förståelse för likhetstecknet ... 8

2.5 Sammanfattning av bakgrund ... 10

3 Teori ... 11

3.1 Procept-teorin ... 11

3.2 Variationsteorin ... 13

3.3 Tillämpning av teorier ... 14

4 Metod ... 17

4.1 Val av metod ... 17

4.2 Urval ... 18

4.3 Testinstrument ... 19

4.3.1 Pilotstudier ... 20

4.4 Uppgiftsdesign ... 21

4.4.1 Utformning av undervisningsuppgifter ... 21
4.4.2 Implementering i undervisningen ... 23

4.5 Datainsamling och analysmetoder ... 23

4.5.1 Detaljanalyser ... 26

4.6 Reliabilitet, validitet och generaliserbarhet ... 28

4.6.1 Reliabilitet ... 28
4.6.2 Validitet ... 28
4.6.3 Generaliserbarhet ... 29

4.7 Forskningsetiska aspekter ... 30

4.7.1 Informationskrav och samtycke ... 30
4.7.2 Lagring och säkerhet ... 30

5 Resultat och analys ... 31

5.1 Resultat av Repeated Measures ANOVA ... 31

5.1.1 Analys av Repeated Measures ANOVA ... 34

5.2 Resultat av McNemar-tester ... *35*
5.2.1 Analys av McNemar-tester ... 36
5.3 Detaljanalyser av elevsvar ... *37*
5.3.1 Uppgift 10, 18 och 19 ... 38
5.3.2 Övriga uppgifter ... 40
5.4 Analys av testinstrumentet ... *43*
6 Diskussion ... 47
6.1 Sammanfattning av resultat ... *47*
6.2 Metoddiskussion ... *47*
6.3 Resultatdiskussion ... *49*
6.3.1 Testinstrumentets möjligheter och begränsningar ... 50
7 Slutsats ... 53
7.1 Sammanfattande resultat av studien ... *53*
7.2 Pedagogiska implikationer ... *54*
7.3 Förslag till vidare forskning ... *55*
Referenser ... 56
Bilaga 1 ... *60*
Bilaga 2 ... *61*
Bilaga 3 ... *62*
Bilaga 4 ... *64*
Bilaga 5 ... *67*
Bilaga 6 ... *73*
Bilaga 7 ... *75*

1 Inledning

I följande avsnitt ges en introduktion till ämnet och studien, denna följs av studiens syfte och forskningsfråga.

1.1 Introduktion

En central uppgift inom matematikundervisning är att stödja elevers utveckling av *mathematical literacy* – en grundläggande förmåga som handlar om att tolka och använda matematik i olika sammanhang för att kunna fatta välgrundade beslut i vardagen (Skolverket, 2022; Skolverket, 2023). Den senaste PISA-undersökningen visar dock att svenska elevers matematikresultat har försämrats jämfört med PISA 2018 (Skolverket, 2023). Något som väcker frågor om vilka matematiska förmågor som behöver stärkas tidigt i undervisningen för att ge elever en stabil grund att bygga vidare på. Skolverket (2023) menar att en aspekt av *mathematical literacy* är förståelsen av matematiska symboler och relationer, där en grundläggande kunskap är likhetstecknets betydelse. Detta ska enligt kursplanen för matematik undervisas om redan i årskurs 1–3 (Skolverket, 2022; Skolverket, 2024). Skolverket (2022) förtydligar att syftet med denna undervisning är att ge elever möjlighet att utveckla sina kunskaper i algebra och främja ett *algebraiskt tänkande* – vilket enligt Kaput (2008) innebär ett sätt att tänka som omfattar att identifiera och uttrycka generaliseringar, samt att resonera om matematiska relationer

Våra erfarenheter från undervisning visar att många elever kan svara att likhetstecknet innebär att det ska vara lika mycket på båda sidor om symbolen. I sina faktiska beräkningar tolkar dock eleverna likhetstecknet som en signal att räkna ut svaret. Något vi uppmärksammade i uppgifter där eleverna förväntas fylla i en saknad del i en uppgift, som exempelvis $2 + 3 = _ + 1$, där de ofta försöker addera alla tal snarare än att tänka på balansen mellan uttrycken. Detta kan ses som en *operationell förståelse*, vilket Kieran (1981) och Powell (2015), menar innebär att eleverna tolkar likhetstecknet som en uppmaning att utföra en beräkning. Det kan till exempel visa sig genom att elever adderar samtliga tal i en ekvation oavsett struktur, eller genom att endast addera vänster sida (Carpenter m.fl., 2003). En sådan förståelse kan skapa svårigheter i bland annat algebraiska uppgifter senare i skolan. Att i stället förstå likhetstecknets *relationella betydelse*, som en symbol för ekvivalens mellan två

uttryck, är grundläggande för flera områden inom matematiken, såsom aritmetik och algebra (e.g. Knuth m.fl., 2008; Powell & Fuchs, 2010; Matthews & Fuchs, 2020).

Skolinspektionen (2020) framhåller att matematikundervisning ofta har präglats av enskilt arbete i läromedel, som sedan även ligger till grund för både lärarens planering och matematikundervisningens innehåll. Helenius och Ahl (2024, s. 27) menar att läraren måste ”göra något algebraiskt” av uppgifterna för att undvika att dessa uppfattas som ren aritmetik. Att arbeta på detta sätt ställer höga krav på lärarens pedagogiska färdigheter och ämneskunskaper, för att kunna identifiera och motverka att elever utvecklar en begränsad förståelse för exempelvis likhetstecknets betydelse (Vermeulen & Meyer, 2017). Leavy m.fl. (2013) visade i sin studie med tredjeklassare hur elevers relationella förståelse kan utvecklas redan på lågstadiet. Genom att successivt bygga vidare på tidigare kunskaper kan elever tidigt utveckla både relationell förståelse och algebraiskt tänkande (Leavy m.fl., 2013).

Forskning stödjer idéen om att relationella förståelse kan stärkas redan från tidig ålder även genom undervisning som integrerar *tidig algebra*, där elever får arbeta med mönster, relationer och variabler, samt *generaliserad aritmetik*, som fokuserar på att identifiera matematiska mönster snarare än enskilda beräkningar (Blanton m.fl., 2015; Bråting & Madej, 2017). Elever som ges explicit undervisning om likhetstecknet och arbetar med *icke-standardiserade ekvationer,* där likhetstecknet inte står i standardposition*,* visar en djupare förståelse för symbolen (e.g. Powell, 2015; Powell & Fuchs, 2010).

Tidigare forskning har främst genomförts i en internationell kontext, med elever från årskurs 2 och uppåt (e.g. Knuth m.fl., 2008; Powell, 2015). Det finns därför ett behov av fler studier som undersöker hur icke-standardiserade ekvationer kan stödja relationell förståelse, inte minst inom svensk matematikundervisning i årskurs 1. Carpenter m.fl. (2003) menar att även yngre elever, redan i årskurs 1 kan tillägna sig relationell förståelse för likhetstecknet. Vår studie fokuserar på just detta och syftar till att bidra med insikter om hur införandet av icke-standardiserade ekvationer kan främja relationell förståelse. Detta kan i sin tur kan ha långsiktiga positiva effekter på elevers matematiska utveckling (Carpenter m.fl., 2003).

1.2 Syfte

Syftet med studien är att undersöka hur användningen av icke-standardiserade ekvationer inom matematikundervisningen i årskurs 1, kan bidra till att utveckla elevers förståelse för likhetstecknets relationella betydelse.

1.3 Forskningsfråga

- Hur förändras elevers förståelse för likhetstecknet i årskurs 1 vid undervisning med icke-standardiserade ekvationer?

Under studiens gång väcktes även ett intresse för att undersöka det använda testinstrumentet: Vilka möjligheter och begränsningar har testinstrumentet att synliggöra elevers operationella och relationella förståelse för likhetstecknet? Resultatet av denna undersökning diskuteras i avsnittet *Resultatdiskussion*.

2 Bakgrund

I följande avsnitt presenteras centrala begrepp och tidigare forskning som är relaterad till studiens syfte och forskningsfråga. Begreppen behandlas för att ge en förståelse för den matematiska grund som studien bygger på. Den tidigare forskningen visar på didaktiska utmaningar som kan uppkomma i undervisningen, samt hur dessa kan hanteras genom att främja relationell förståelse för likhetstecknet.

2.1 Begreppsdefinition

Nedan definieras och förtydligas begreppen.

2.1.1 Aritmetik

Aritmetik är en del inom matematik som handlar om grundläggande räkneoperationer såsom addition, subtraktion, multiplikation och division (Kiselman & Mouwitz, 2008). Dessa grundläggande räkneoperationer är avgörande för fortsatt matematikutveckling (Löwing, 2017).

2.1.2 Likhetstecknet

Likhetstecknet betecknas med symbolen = och används för att symbolisera ekvivalens, att två uttryck är likvärdiga (Kieran, 1981). Kiselman och Mouwitz (2008) beskriver att symbolen används för att visa att två matematiska uttryck representerar samma värde, antingen direkt eller efter en beräkning. Det läses ofta som "är lika med" eller enbart "är". En vanlig missuppfattning uppstår när uttryck som "åtta plus sju blir femton", eftersom ordet "blir" indikerar en förändring, som att 8 + 7 *är* något som omvandlas till 15 (Kiselman & Mouwitz, 2008, s. 16).

2.1.3 Uttryck

Ett uttryck är en "kombination av tal och operationer utan ett likhetstecken" (Powell, 2012, s. 628). Ett matematiskt uttryck kan vara aritmetiskt, om det enbart består av tal och operationer, eller algebraiskt om det även innehåller variabler. Uttryck används ofta för att skapa likheter, olikheter och ekvationer, där likheter representerar en form av ekvivalens (Kiselman & Mouwitz, 2008).

2.1.4 Ekvation

Powell (2012) beskriver att en ekvation är ett matematiskt påstående där likhetstecknet används för att visa ekvivalens mellan uttryck och/eller tal. En ekvation har två sidor, en vänster och en höger, där likhetstecknet fungerar som delningspunkt (Powell, 2012). Ofta innehåller en ekvation obekanta variabler, som kan betecknas med bokstäver som x, y eller z. En lösning till en ekvation är ett eller flera tal som gör att den vänstra sidan är lika med den högra sidan (Kiselman & Mouwitz, 2008).

2.1.5 Algebra

Algebra är en gren inom matematiken som studerar strukturer såsom grupper, ringar och kroppar, men i skolmatematiken introduceras den främst genom bokstavsräkning, där variabler ersätter tal och samma räkneregler tillämpas (Kiselman & Mouwitz, 2008). Skolverket (2022) beskriver algebra som ett område där elever utvecklar kunskap om likhetstecknets innebörd, hantering av obekanta tal och variabler, algebraiska uttryck samt lösning av ekvationer. Algebra används för att beskriva och analysera samband och är ett viktigt verktyg inom matematiska modeller och problemlösning (Skolverket, 2022).

2.1.6 Generaliserad aritmetik

Bråting och Madej (2017) beskriver att generaliserad aritmetik handlar om att identifiera och resonera kring matematiska mönster och strukturer snarare än att enbart utföra beräkningar. Exempelvis kan elever upptäcka och förstå generella egenskaper hos addition av udda och jämna tal – exempelvis *udda + udda = jämn*. Genom att fokusera på dessa mönster i stället för enskilda tal bereds vägen för algebraiskt tänkande. Bråting och Madej (2017) betonar vikten av att börja med generalisering tidigt, eftersom generaliserad aritmetik kan fungera som en brygga mellan aritmetik och algebra.

2.1.7 Tidig algebra

Tidig algebra syftar till att föra in algebraiskt tänkande i de tidiga skolåren, grundtanken är att underlätta övergången från aritmetik till algebra genom att bygga vidare på elevers redan existerande kunskaper i aritmetik (Kieran m.fl., 2016). Madej (2021b) menar att det handlar om att introducera de grundläggande algebraiska idéerna – såsom variabler, mönster och relationer.

2.1.8 Operationell och relationell förståelse

Enligt Kieran (1981) kan elevers förståelse för likhetstecknet delas in i två kategorier: operationell och relationell förståelse. Den operationella innebär att eleverna ser likhetstecknet som en symbol för att utföra en beräkning, där de exempelvis adderar tal på vänster sida och skriver svaret på höger sida om likhetstecknet, som 2 + 5 = 7. Att introducera likhetstecknet på detta sätt är vanligt förekommande i skolan och leder till att många elever ser likhetstecknet som en operationell symbol (Kieran, 1981). Knuth m.fl. (2008) förklarar att relationell förståelse innebär att likhetstecknet ses som en symbol för ekvivalens, där båda sidor av en ekvation representerar samma värde. En elev med relationell förståelse förstår att uttrycken på båda sidor om likhetstecknet är likvärdiga och kan byta plats utan att ekvationen förändras matematiskt (Matthews & Fuchs, 2020). Exempelvis att 1 + 2 = 4 – 1 är samma som 4 - 1 = 1 + 2.

2.1.9 Standardiserade- och icke-standardiserade ekvationer

Standardiserade ekvationer är, enligt Powell (2012), matematiska uttryck där en operation leder till ett svar, exempelvis 5 + 4 = _ eller 5 + _ = 9. Ekvationen läses från vänster till höger och likhetstecknet placeras alltid näst sist, där svaret följer direkt efter. Standardiserade ekvationer kan vara antingen *öppna*, där ett eller flera tomrum eller variabler ska lösas, eller *slutna* utan några saknade värden. Icke-standardiserade ekvationer avviker från denna form, exempelvis 5 + 4 = _ + 7, och kan precis som standardiserade ekvationer, vara antingen öppna eller slutna (Powell, 2012).

2.2 Likhetstecknet i undervisningen

Skolverket (2024) menar att matematisk verksamhet är nära kopplad till den samhälleliga utvecklingen och att kunskaper i matematik ska hjälpa elever att aktivt kunna delta i samhälleliga beslutsprocesser. I det centrala innehållet för årskurs 1–3 framgår att elever ska få undervisning om matematiska likheter, likhetstecknets betydelse samt obekanta tal och hur dessa kan betecknas med en symbol (Skolverket, 2024). Detta menar Skolverket (2024) är för att elever ska kunna använda likhetstecknet på ett fungerande sätt.

I den svenska skolan har aritmetik en framträdande roll på lågstadiet, då det lär ut de fyra räknesätten som kan ses som grunden till andra områden inom matematiken (Skolverket, 2022). Helenius och Ahl (2024) lyfter fram att svensk matematikundervisning traditionellt har

prioriterat algebra i mindre utsträckning än många andra länder. Här kan ett tänkbart problem uppstå, då algebra är nära länkat till aritmetik och forskning visar på att dessa områden inte bör åtskiljas (Brorsson, 2012; Häggström m.fl., 2019). Brorsson (2012) understryker vikten av att lärare är medvetna om vad kunskaper i aritmetik och algebra ska leda fram till i elevers fortsatta matematiska utveckling.

I övergången från lågstadiet till mellanstadiet blir likhetstecknets roll än mer central. Till skillnad från formuleringarna riktade mot årskurs 1–3, menar Skolverket (2024) att elever i årskurs 4–6 ska använda likhetstecknet för att skriva och tolka enkla ekvationer. De ska även kunna omvandla verbala beskrivningar av matematiska samband till ekvationer (Skolverket, 2022). Detta innebär att relationell förståelse av likhetstecknet blir viktig för elevernas förmåga att arbeta med algebraiska uttryck.

På både låg- och mellanstadiet används läroboken ofta som utgångspunkt i matematikundervisningen, och är till stor del strukturerad med ett *fråga-svar-upplägg* (Norberg, 2020; Skolinspektionen, 2020). Analyser av amerikanska läromedel har visat att standardiserade ekvationer dominerar innehållet (Powell, 2012). Norberg (2020) påpekar att det råder brist på forskning av svenska läromedel inom matematik på lågstadiet. Ellénius och Åhlander (2024) analyserade i sitt examensarbete sex olika läromedel riktade mot årskurs 1, och konstaterade att även svenska matematiklärömedel domineras av standardekvationer. Det innebär att elever vanligtvis möter uppgifter av operationell karaktär. De standardiserade ekvationerna leder till att elever associerar likhetstecknet med en aritmetisk operation där svaret alltid följer efter likhetstecknet, vilket i sin tur befästs genom fortsatt exponering för standardekvationer (Knuth m.fl., 2008). Därmed tenderar elever att generalisera regeln att likhetstecknet uppmanar till en beräkning (Carpenter m.fl., 2003).

2.3 Elevers utmaningar med likhetstecknets betydelse

Skolverket (2024) betonar vikten av att elever utvecklar tilltro till sin egen matematiska förmåga. Samtidigt kan svårigheter med att tolka och använda matematiska symboler uppstå redan vid 7–8 års ålder, vilket i sin tur kan påverka elevers självbild och deras långsiktiga utveckling inom ämnet (Norberg, 2020). I en studie genomförd i USA uppmärksammade Byrd m.fl. (2015) att elever i årskurs 3 och 5 hade missuppfattningar kring grundläggande matematiska begrepp, såsom likhetstecknets betydelse. Dessa missuppfattningar kan enligt forskarna utgöra betydande hinder för elevers fortsatta lärande, då de riskerar att leda till

felaktiga strategier och en begränsad förståelse för matematiska samband. Carpenter m.fl. (2003) lyfter särskilt fram att en felaktig uppfattning om just likhetstecknet betydelse kan skapa stora hinder i elevers matematiska utveckling. Även om sådana missuppfattningar kan verka enkla, menar Carpenter m.fl. (2003) att de ofta är svåra att överkomma.

Forskning har visat att elever i olika åldrar har befäst en operationell förståelse (e.g. Byrd m.fl., 2015; Knuth m.fl., 2008). I en kanadensisk översiktsstudie visade Kieran (1981) att denna typ av förståelse är vanlig bland elever från förskoleklass till college. En sådan förståelse kan leda till att elever ser likhetstecknet som en avgränsning mellan en uppgift och dess lösning, vilket i sin tur kan försvåra utvecklingen av algebraiskt tänkande (Byrd m.fl., 2015; Kieran, 1981).

Häggström m.fl. (2019) menar att svårigheter med algebra ofta uppstår i övergången från aritmetiskt till algebraiskt tänkande. En central aspekt i detta skifte är hur elever tolkar likhetstecknet – om det ses som en uppmaning att räkna ut något, eller som en symbol för att uttrycken på båda sidor representerar samma värde. Den senare tolkningen kräver ett mer utvecklat tänkande kring relationer och samband, som ligger nära det som i annan forskning benämns som relationell förståelse (Häggström m.fl., 2019).

Byrd m.fl. (2015) och Carpenter m.fl. (2003) påpekar att även om många elever initialt visar relationell förståelse, har de svårt att tillämpa denna kunskap på nya uppgifter – och tenderar i stället att falla tillbaka i ett operationellt tankesätt. Madej (2021a) identifierade i sin studie en liknande problematik hos svenska elever i årskurs 3 och 6, där de ofta kan definiera likhetstecknets relationella betydelse i teorin, men i praktiken tillämpar de en operationell strategi när de löser matematiska uppgifter. Detta kan bero på att elever ser likhetstecknet som en uppmaning att räkna ut ett svar, och att de generaliserar sina tidigare erfarenheter (Carpenter m.fl., 2003).

2.4 Sätt att stärka relationell förståelse för likhetstecknet

För att främja relationell förståelse behövs undervisning som vilar på vetenskaplig grund och beprövad erfarenhet, vilket skollagen betonar att undervisning ska göra (SFS 2010:800, 1 kap. 5 §). För att skapa en stabil grund för algebra är det viktigt att elever får möjlighet att utveckla algebraiskt tänkande redan från tidiga skolår (Carpenter m.fl., 2003; Kieran m.fl., 2016).

Häggström m.fl. (2019) påpekar att många elever har svårt att acceptera algebraiska uttryck som giltiga svar eftersom de är vana vid att matematiska uppgifter alltid ska avslutas med en numerisk lösning. Brorson (2012) framhåller att sättet likhetstecknet introduceras på har stor betydelse för elevers fortsatta arbete med algebra. Undervisningen bör därför inkludera uppgifter som uppmuntrar elever att upptäcka och resonera kring matematiska strukturer, snarare än att enbart utföra beräkningar (Carpenter m.fl., 2003; Häggström m.fl., 2019). Genom att utmana den operationella förståelsen kan undervisningen skapa bättre förutsättningar för att elever utvecklar ett mer flexibelt och generaliserande sätt att tänka om aritmetiska uttryck (Carpenter m.fl., 2003).

Då undervisningen ofta utgår från läroboken, där uppgifterna inte främjar relationell förståelse, ställs det krav på läraren och dennes förmåga att anpassa innehållet i undervisningen (Vermeulen & Meyer, 2017). Powell (2015) menar att läraren behöver kombinera standardiserade och icke-standardiserade exempel på ekvationer. Dessutom bör elever uppmuntras att själva göra om standardiserade till icke-standardiserade ekvationer – för att lära sig den relationella definitionen av symbolen och för att kunna använda den i olika kontexter (Powell, 2015). Bråting och Madej (2017) har undersökt varför svenska elever har svårt med algebra och analyserat svenska kursplaner samt läromedel från årskurs 1–9. Utifrån sina resultat förespråkar de ett arbetssätt baserat på generaliserad aritmetik, där elever får upptäcka generella egenskaper.

Carpenter m.fl. (2003) har identifierat några milstolpar i elevers utveckling av relationell förståelse för likhetstecknet:

1. Eleven kan uttryckligt förklara vad likhetstecknet representerar.
2. Eleven accepterar att ekvationer kan skrivas på olika sätt, exempelvis $x + y = z$, $z = x + y$, eller $z = z$.
3. Eleven förstår att likhetstecknet symboliserar en relation mellan två lika stora tal och räknar ut uppgifterna på båda sidor av symbolen.
4. Eleven kan jämföra matematiska uttryck på båda sidor av likhetstecknet utan att utföra en beräkning.

Genom att låta elever arbeta mot dessa milstolpar och successivt introducera mer avancerade algebraiska idéer i enlighet med Leavy m.fl. (2013), kan undervisningen bidra till relationell

förståelse. Knuth m.fl. (2008) betonar att det är viktigt att fortsätta arbetet med icke-standardiserade ekvationer även på mellanstadiet för att upprätthålla denna förståelse.

Ett effektivt sätt att stärka relationell förståelse är att arbeta med matematiska diskussioner, där elever får möjlighet att formulera och försvara sina matematiska resonemang (Carpenter m.fl., 2003). Genom klassrumsinteraktion kring matematiska idéer, både i smågrupper och helklass, kan elever tillsammans utvärdera och rättfärdiga hypoteser, vilket hjälper dem att upptäcka regelbundenheter och utveckla algebraiskt tänkande (Kieran m.fl., 2016). Ett sätt att arbeta med detta är genom *sant/falskt*-uppgifter där elever explicit måste redogöra för sina tankesätt, vilket i sin tur kan ge andra elever nya perspektiv och en djupare förståelse (Carpenter m.fl., 2003).

Vidare kan undervisningen stärkas genom att aktivt utmana elevers förståelse av likhetstecknet med alternativa representationer av ekvationer. Exempelvis kan elever få undersöka ekvationer i olika former, såsom 4 + 5 = _ + 6, eller 8 = 3 + 5, för att bryta den operationella uppfattningen (Carpenter m.fl., 2003; Knuth m.fl., 2008; Matthews & Fuchs, 2020). Blanton m.fl. (2015) visade i sin undersökning att amerikanska elever i årskurs 3 som deltar i undervisning med fokus på tidig algebra utvecklar relationell förståelse. Dessa elever kan även representera obekanta tal med variabler på ett meningsfullt sätt samt identifiera strukturer i ekvationer för att motivera sina resonemang (Blanton m.fl., 2015). Norberg (2020) menar att matematikundervisning måste vara begriplig för att upplevas som meningsfull. Genom att ge elever verktyg att förstå matematiska samband snarare än att enbart memorera procedurer, kan de utveckla relationell förståelse som gynnar deras långsiktiga framgång i ämnet (Norberg, (2020).

2.5 Sammanfattning av bakgrund

Forskning visar att många elever utvecklar operationell förståelse för likhetstecknet, vilket kan skapa hinder i deras matematiska utveckling, särskilt vid övergången till algebra. Trots att forskning betonar vikten av att elever utvecklar relationell förståelse, är undervisningen ofta präglad av aritmetiska uppgifter som befäster den operationella synen. En möjlig lösning är att integrera generaliserad aritmetik och tidig algebra i undervisningen, då dessa områden kan fungera som en bro mellan aritmetik och algebra. För att stärka relationell förståelse behöver undervisningen innehålla icke-standardiserade ekvationer och matematiska diskussioner där elever får resonera om likhetstecknets betydelse.

3 Teori

I följande avsnitt presenteras *procept-teorin*, som belyser vikten av att kunna växla mellan att se matematiska uttryck både som processer och koncept. Därefter beskrivs *variationsteorin*, en pedagogisk ram som beskriver faktorer som underlättar lärande och effektiva inlärningsprocesser. Slutligen diskuteras hur dessa teoretiska perspektiv, tillsammans med Carpenter m.fl.:s (2003) milstolpar för relationell förståelse, ligger till grund för designen av undervisnings- och testuppgifter, samt hur den senare typen av uppgifter kan analyseras. Även perspektiv från generaliserad aritmetik och tidig algebra inkluderas för att belysa hur undervisningen kan främja ett flexibelt och relationellt matematiskt tänkande.

3.1 Procept-teorin

I matematisk inlärning spelar samspelet mellan process och koncept en betydande roll. Gray och Tall (1994) introducerade begreppet *procept* för att beskriva hur matematiska symboler kan representera både en procedur (*pro*cess) och en idé (kon*cept*). Till exempel kan uttrycket 3 + 4 tolkas på två olika sätt: som en *process* om eleven ser det som en operation där talen ska adderas, eller som ett *koncept* om eleven uppfattar det som en matematisk enhet, det vill säga summan 7 som ett objekt i sig (Gray & Tall, 1994).

Flexibiliteten mellan att se matematiska uttryck både som processer och objekt –proceptuellt tänkande – är viktig för utvecklingen av en djupare matematisk förståelse, särskilt i relation till likhetstecknets innebörd (Gray & Tall, 1994). Denna typ av tänkande motsvarar flera av de milstolpar som Carpenter m.fl. (2003) identifierat som viktiga för elevers utveckling mot relationell förståelse. Det handlar bland annat om att elever börjar se likhetstecknet som en symbol för balans snarare än som en uppmaning att räkna ut ett svar. Detta innebär också att de förstår att likhetstecknet kan stå *mellan* två uttryck, inte bara mellan ett uttryck och ett svar. Dessutom utvecklar de en förmåga att jämföra och resonera om värdet av två uttryck, oavsett deras position i ekvationen – såsom i 3 + 4 = 5 + 2. Att nå dessa milstolpar innebär att elever inte enbart genomför beräkningar, utan även behandlar matematiska uttryck som objekt som kan jämföras, analyseras och omformas (Carpenter m.fl., 2003).

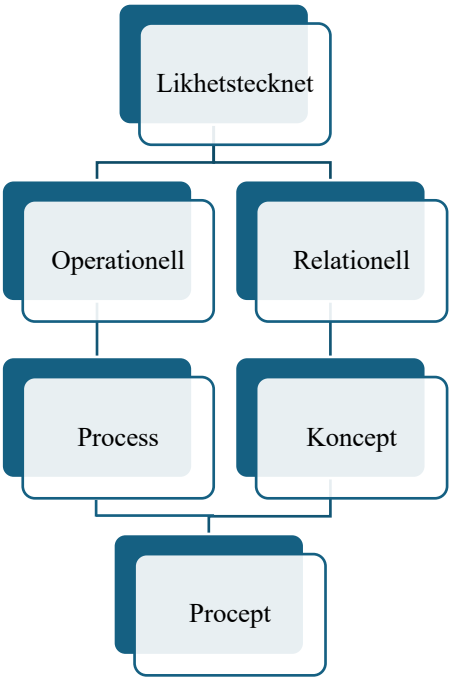
Gray och Tall (1994) menar att framgångsrika matematikelever kan växla mellan att se matematiska uttryck både som processer och objekt, vilket är kärnan i procept-teorin. De

argumenterar för att detta flexibla tänkande underlättar matematikinlärningen och förståelsen av matematiska relationer. Som Kieran (1981) påpekar är det vanligt att elever missuppfattar likhetstecknet, och tolkar det som en signal att utföra en beräkning. Ett sådant operationellt synsätt, begränsar möjligheten att utveckla relationell förståelse (Kieran, 1981). Det proceptuella tänkandet kan därmed bidra till att motverka dessa begränsningar (Gray & Tall, 1994).

I denna studie tolkas proceptuellt tänkande – i de fall det innebär att eleven ser likhetstecknet som en symbol för ekvivalens – som ett uttryck för relationell förståelse. På motsvarande sätt tolkas ett ensidigt processinriktat tänkande som ett uttryck för operationell förståelse.
I Figur 1 presenteras vår tolkning av hur begreppen inom procept-teorin relaterar till förståelsen av likhetstecknet.

Figur 1

Egen tolkning av hur begreppen relaterar till varandra



3.2 Variationsteorin

Enligt Runesson (2017) är variationsteorin en teori om lärande som betonar att förståelse utvecklas genom att elever får erfara systematiska variationer av ett begrepp. För att urskilja och förstå kritiska aspekter av ett lärandeobjekt, exempelvis likhetstecknets relationella betydelse, måste vissa aspekter varieras medan andra hålls konstanta. Detta gör det möjligt för elever att identifiera vad som är väsentligt i begreppet och undvika vanliga missuppfattningar (Runesson, 2017).

Lärandeobjektet i matematik handlar om att utveckla en djup förståelse för ett specifikt begrepp eller en förmåga (Marton m.fl., 2004). I denna studie är fokus på att utveckla elevers relationella förståelse för likhetstecknet. För att uppnå en sådan förståelse bör undervisningen struktureras så att eleverna får möjlighet att urskilja och fokusera på de kritiska aspekterna av likhetstecknet – det vill säga de egenskaper som är avgörande för att förstå dess matematiska funktion (Marton m.fl., 2004).

Enligt Marton m.fl. (2004) och Runesson (2017) kan lärandeobjektet delas in i tre delar:

- **Det avsedda lärandeobjektet** är lärarens mål med undervisningen, exempelvis att elever ska förstå att likhetstecknet representerar en balans mellan två uttryck.
- **Det iscensatta lärandeobjektet** handlar om hur undervisningen genomförs, samt vilka uppgifter och diskussioner som används för att göra den relationella betydelsen tydlig.
- **Det erfarna lärandeobjektet** är det som elever faktiskt lär sig, vilket kan skilja sig från lärarens intention beroende på hur denne tolkar och bearbetar innehållet.

För att elever ska utveckla relationell förståelse behöver de möta variation i undervisningen (Marton m.fl., 2004). Genom *kontrast* kan de exempelvis se skillnaden mellan standardiserade och icke-standardiserade ekvationer, där den senare typen tvingar dem att tänka på likhetstecknets relationella betydelse. *Generalisering* innebär att elever ges möjlighet att se likhetstecknet i olika matematiska sammanhang, exempelvis i aritmetiska och algebraiska uttryck, för att förstå att dess funktion är densamma oavsett kontext. *Separation* hjälper elever att fokusera på just likhetstecknets betydelse genom att variera dess placering i en ekvation, medan andra delar förblir oförändrade. Slutligen behöver flera kritiska aspekter presenteras samtidigt genom *fusion,* exempelvis genom att låta elever diskutera både ekvationers struktur och dess matematiska innebörd inom en och samma uppgift (Marton m.fl., 2004). Genom att

medvetet arbeta med dessa principer i undervisningen skapas förutsättningar för att elever inte bara ska memorera regler utan också utveckla en djupare förståelse för likhetstecknets funktion (Runesson, 2017).

3.3 Tillämpning av teorier

Powell (2015) menar att icke-standardiserade ekvationer kan vara effektiva för att utmana elevers befintliga uppfattningar och stödja deras förmåga att tolka och manipulera matematiska symboler, såsom likhetstecknet. En liknande idé återfinns i Gray och Talls (1994) procept-teori, där elever kan växla mellan att se matematiska uttryck både som processer och objekt. För att lösa ekvationer som 8 + 4 = _ + 5 behöver elever förstå att båda sidor av likhetstecknet representerar samma matematiska objekt, även om de uttrycks genom olika processer (Gray & Tall, 1994). Här blir proceptuellt tänkande centralt, eftersom uttrycken kan tolkas både som operationer och som helheter som är ekvivalenta.

Denna flexibla syn på matematiska uttryck kan kopplas till variationsteorin, som betonar vikten av att elever får erfara variation för att urskilja kritiska aspekter av ett begrepp (Runesson, 2017). För att elever ska förstå likhetstecknets relationella betydelse bör undervisningen systematiskt variera uppgifter där de får jämföra standardiserade och icke-standardiserade ekvationer, exempelvis genom diskussioner (Carpenter m.fl., 2003; Powell, 2015). Genom kontrast kan elever se skillnaden mellan att tolka likhetstecknet som en signal för beräkning och att förstå det som en relationell symbol. Separation kan användas för att lyfta fram likhetstecknets funktion genom att variera dess placering i en ekvation, medan andra delar hålls konstanta (Marton m.fl., 2004).

Genom att arbeta med uppgifter där olika representationer av samma matematiska objekt används, kan elever utveckla en djupare förståelse för matematiska relationer (Powell, 2015). Variationsteorin erbjuder en struktur för hur denna förståelse kan stödjas genom undervisning, där elever aktivt får erfara och jämföra olika representationsformer av ekvationer för att urskilja likhetstecknets betydelse (Runesson, 2017). På så sätt kan variationsteorin och procept-teorin komplettera varandra, då båda syftar till att stärka elevers förmåga att se matematiska strukturer flexibelt och relationellt.

Utformningen av undervisningsuppgifterna har även influerats av Carpenter m.fl.:s (2003) identifierande milstolpar. Dessa beskriver hur elevers förståelse kan utvecklas från att se likhetstecknet som en uppmaning att utföra en beräkning, till att betrakta det som en symbol för balans mellan två uttryck. Uppgifternas utformning syftar till att skapa variation och stimulera proceptuellt tänkande, samt att möjliggöra progression i förståelsen för likhetstecknet i linje med milstolparna.

Utöver dessa teoretiska perspektiv är det även relevant att förstå denna undervisning i relation till begreppen generaliserad aritmetik och tidig algebra. Bråting och Madej (2017) beskriver att generaliserad aritmetik handlar om att identifiera och resonera kring matematiska mönster och strukturer, snarare än att enbart utföra beräkningar. Detta ligger nära procept-teorins idé om att behandla uttryck både som processer och objekt. I likhet med detta syftar tidig algebra till att föra in algebraiskt tänkande i undervisningen i de tidiga skolåren, där elever uppmuntras att arbeta med relationer, mönster och variabler (Kieran m.fl., 2016; Madej, 2021b). Genom undervisning med en variation av standardiserade och icke-standardiserade ekvationer får elever möjlighet att närma sig detta redan i årskurs 1, vilket kan ses som ett första steg mot mer abstrakta matematiska resonemang (Carpenter m.fl., 2003; Powell, 2015).

Sammantaget bidrar procept-teorin, variationsteorin, Carpenter m.fl.:s (2003) milstolpar samt perspektiven från generaliserad aritmetik och tidig algebra till förståelsen av hur undervisning med icke-standardiserade ekvationer kan stödja relationell förståelse. Genom att kombinera dessa perspektiv skapas en teoretisk grund för en undervisning som främjar ett flexibelt och relationellt matematiskt tänkande.

Förutom att procept-teorin och Carpenter m.fl.:s (2003) milstolpar har legat till grund för undervisningsuppgifterna har de även använts vid utformningen och analysen av testuppgifterna. Enligt Gray och Tall (1994) handlar matematisk förståelse om att kunna växla mellan att se matematiska uttryck som något man utför, en process, och som något man kan förstå, jämföra och använda, ett objekt. Detta är centralt för att identifiera om en elevs lösning uttrycker operationell eller relationell förståelse. Milstolparna konkretiserar denna progression genom att beskriva hur elevernas förståelse av likhetstecknet kan utvecklas mot en relationell förståelse. Syftet med testet är inte enbart att mäta prestation, utan att också analysera vilken typ av förståelse som uttrycks i elevsvaren.

En antydan till operationell, processinriktad förståelse, kan vara om eleven exempelvis (Carpenter m.fl., 2003; Gray & Tall, 1994):

- Adderat alla tal i ekvationen utan att ha tagit hänsyn till båda sidor om likhetstecknet, exempelvis om eleven svarat 7 i uppgiften 3 + 3 = _ + 1.
- Fokuserat enbart på vänster sida och behandlat likhetstecknet som en signal för beräkning, exempelvis om eleven svarat 6 i uppgiften 3 + 3 = _ + 1.

En antydan till relationell, proceptuell förståelse, kan vara om eleven möter någon av milstolparna, exempelvis (Carpenter m.fl., 2003; Gray & Tall, 1994):

- Eleven har förstått att likhetstecknet symboliserar en relation mellan två lika stora uttryck, och räknat ut båda sidor för att säkerställa ekvivalens mellan dem.
- Eleven har visat förståelse för likhetstecknet som ekvivalens genom att ha jämfört uttryck utan att räkna ut dem.

Genom att kombinera Carpenter m.fl.:s (2003) milstolpar och Gray och Talls (1994) procept-teori kunde vi i detaljanalyser av elevsvar se tendenser till operationell, processinriktad respektive relationell, proceptuell förståelse, och därmed identifiera styrkor och svagheter i testinstrumentets utformning. Fortsättningsvis används begreppen relationell och operationell förståelse som samlade termer för dessa sätt att tänka, i syfte att förenkla framställningen.

4 Metod

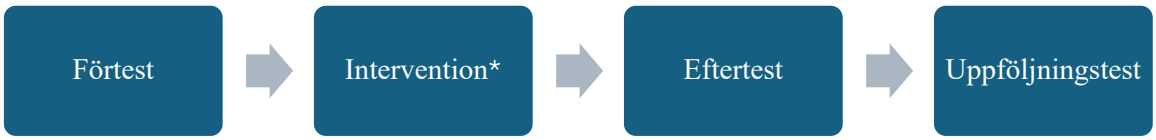
I följande avsnitt beskrivs studiens metod med fokus på val av metod, urval, testinstrument, uppgiftsdesign samt datainsamling och analysmetoder. Därefter diskuteras reliabilitet, validitet och generaliserbarhet i studien samt hur vi tagit hänsyn till forskningsetiska aspekter.

4.1 Val av metod

Syftet med studien var att undersöka hur icke-standardiserade ekvationer kan bidra till att utveckla relationell förståelse för likhetstecknet i årskurs 1. För att besvara forskningsfrågan genomförde vi en interventionsstudie, med en för-, efter- och uppföljningstestdesign som möjliggjorde analyser av förändringar i elevernas förståelse före och efter interventionen. Vi ansvarade själva för undervisningen under fyra lektioner, vilket motsvarade all matematikundervisning under en vecka på den aktuella skolan. I Figur 2 och 3 visas flödesschema respektive tidsschema för interventionen.

Figur 2

Flödesschema



* Införandet av en ny faktor – diskussioner i smågrupper och helklass med fokus på icke-standardiserade ekvationer – samt arbete med dessa ekvationer.

Figur 3

Tidsschema

Vecka 1	Vecka 2	Vecka 3	Vecka 4
• Förtest	• Interventionstillfälle • Interventionstillfälle • Interventionstillfälle • Interventionstillfälle + Eftertest	• Pausvecka	• Uppföljningstest

Studiens genomförande har inte enbart inspirerats av tidigare forskning, utan också vägletts av de teoretiska utgångspunkterna. Variationsteorin tillämpades genom medvetna val av variationsmönster i både undervisning och testinstrument. Exempelvis användes kontrastprincipen för att synliggöra skillnaden mellan standardiserade och icke-standardiserade ekvationer, medan separation tillämpades i uppgifter där endast likhetstecknets placering varierades. Carpenter m.fl.:s (2003) milstolpar fungerade som ett ramverk både vid konstruktion av undervisnings- och testuppgifter samt vid detaljanalyserna av elevsvar – exempelvis för att identifiera om en elev kunde balansera uttryck (milstolpe 3), eller jämföra uttryck utan att utföra en beräkning (milstolpe 4). Gray och Talls (1994) procept-teori användes för att undersöka om elever behandlar matematiska uttryck som processer och/eller objekt. Detta tillämpades i detaljanalyserna. Exempelvis analyserade vi i uppgiften 3 + 5 = _ + 2 om eleven såg uttrycket som en process att utföra en beräkning – vilket svaren 8 eller 10 indikerar – eller som ett objekt, vilket svaret 6 indikerar. Både procept-teorin och milstolparna användes även vid analysen av testinstrumentets möjligheter och begränsningar i att synliggöra relationell förståelse.

Innan interventionen genomförde samtliga elever ett individuellt pappersbaserat förtest. Vi övervakade testtillfället, men eleverna fick ingen hjälp med uppgifterna utan uppmanades att lösa dem självständigt. Veckan efter fick eleverna undervisning med fokus på likhetstecknets relationella betydelse. Undervisningen bestod av diskussioner och uppgifter som utmanade elevernas förståelse för likhetstecknet, både i smågrupper och helklass. Efter interventionen genomfördes ett eftertest, och två veckor senare ett uppföljningstest. Samma test användes vid samtliga testtillfällen för att möjliggöra tillförlitliga jämförelser av elevernas svar mellan de olika testtillfällena. Genom att använda identiska testuppgifter kunde vi analysera förändringar i elevernas förståelse utan att resultatet påverkades av variationer i testets innehåll eller svårighetsgrad. Alla tester genomfördes på samma sätt, och eleverna fick inte ta del av sina resultat för att minimera risken att de skulle memorera svaren.

4.2 Urval

Studien omfattade två klasser i årskurs 1 med sammanlagt 43 elever. Av dessa inkluderades 41 elever (n = 41) i studiens analys. Två elever exkluderades på grund av frånvaro vid förtestet. Urvalet gjordes utifrån ett bekvämlighetsurval, där skolan och klasserna valdes baserat på tillgänglighet och etablerat samarbete med verksamma lärare. Eftersom studien

fokuserade på att undersöka utvecklingen av förståelse för likhetstecknet i tidig matematikundervisning valdes årskurs 1, då Carpenter m.fl. (2003) menar att förstaklassare är benägna att tillägna sig relationell förståelse.

4.3 Testinstrument

Testinstrumentet i studien var ett matematiktest (se bilaga 2) som genomfördes vid tre tillfällen: före, efter och två veckor efter undervisningsinterventionen. Testuppgifterna konstruerades, med stöd av pilotstudier, för att identifiera tendenser till operationell eller relationell förståelse av likhetstecknet hos eleverna. De bestod av en kombination av standardiserade och icke-standardiserade uppgifter, där de icke-standardiserade var fler. Urvalet av uppgifter baserades på tidigare forskning (e.g. Carpenter m.fl., 2003; Powell, 2015), där det framhålls att icke-standardiserade ekvationer är viktiga för att synliggöra och utmana missuppfattningar kring likhetstecknets funktion. Utformningen utgick även från procept-teorin, som betonar vikten av att elever kan växla mellan att se matematiska uttryck både som processer och objekt (Gray & Tall, 1994). Dessutom tillämpades variationsteorin genom en medveten variation i ekvationernas struktur för att synliggöra kritiska aspekter av likhetstecknets betydelse (Runesson, 2017).

Testet bestod av två delar:

1. *Sant/falskt*-uppgifter (4 uppgifter): Eleverna skulle avgöra om påståendet var sant eller falskt. Denna del syftade till att mäta deras intuitiva förståelse av likhetstecknet. För att minska risken att eleverna gissade utan att ha förstått uppgiften, inkluderades svarsalternativet *vet inte*.

2. *Fyll-i-luckan*-uppgifter (16 uppgifter): Eleverna skulle fylla i det saknade talet i ekvationen. Dessa uppgifter konstruerades för att ge insikt i deras förståelse av likhetstecknets betydelse och möjliggjorde detaljanalyser av huruvida deras förståelse var operationell respektive relationell.

Vid testkonstruktionen tog vi hänsyn till att eleverna gick i årskurs 1 och därmed hade begränsad erfarenhet av matematiktester. För att minska kognitiv belastning och säkerställa att eleverna kunde genomföra testet på ett tillförlitligt sätt, valde vi att begränsa antalet

uppgifter till totalt 20. Denna avvägning gjordes för att balansera datainsamlingens omfattning med elevernas ålder och uthållighet.

Genom att inkludera både *sant/falskt*-uppgifter och *fyll-i-luckan*-uppgifter fick vi en bredare bild av elevernas förståelse och kunde analysera om deras svarsmönster förändras över tid genom undervisningsinterventionen.

4.3.1 Pilotstudier

En pilotstudie genomfördes för att pröva testinstrumentet (se bilaga 1). Testet bestod av tio uppgifter och genomfördes av tio elever, varav två svarade korrekt på samtliga tio uppgifter. Sex elever hade 7–8 antal rätt. Resterande två elever svarade rätt på fyra uppgifter, de svarade inte på alla uppgifter och ett uteblivet svar räknades som ett felsvar. Testet tog ca fem minuter att genomföra.

Resultatet visade att testinstrumentets svårighetsgrad var otillräcklig, och att testet genomfördes snabbare än förväntat. Baserat på dessa insikter reviderades testinstrumentets svårighetsgrad och omfång (se bilaga 2). Därefter genomfördes ytterligare en pilotstudie. I denna omgång deltog 25 elever. Den elev som presterade bäst hade 16 av 20 rätt. Tio elever svarade korrekt på 6–10 uppgifter, medan resterande elever hade 1–5 rätt. Även denna gång förekom uteblivna svar, vilka räknades som felsvar. Det reviderade testet tog cirka 20 minuter att genomföra.

Utifrån dessa resultat valdes den senare versionen att behållas (se bilaga 2). Enligt Denscombe (2018) är det fördelaktigt att testa datainsamlingsverktyget i förväg för att identifiera och åtgärda eventuella problem innan studiens genomförande.

4.4 Uppgiftsdesign

I följande avsnitt beskrivs undervisningsuppgifternas utformning. Därefter ges några exempel på uppgifter, samt hur de implementerades i undervisningen.

4.4.1 Utformning av undervisningsuppgifter

För att stödja elevernas utveckling av relationell förståelse utformades undervisningen med utgångspunkt i procept-teorin, variationsteorin och Carpenter m.fl.:s (2003) milstolpar. Dessa tre perspektiv kompletterade varandra. Procept-teorin belyser behovet av kognitiv flexibilitet. Variationsteorin fokuserar på vad som görs tillgängligt för lärande i klassrummet. Milstolparna konkretiserar vilken typ av progression som kan förväntas i elevernas förståelse. Leavy m.fl. (2013) och Löwing (2017) framhåller vikten av att elever gradvis får möta olika typer av uppgifter – från intuitiva lösningar till mer avancerade ekvationer. Undervisningsuppgifterna (se bilaga 5) konstruerades därför för att synliggöra kritiska aspekter av likhetstecknets relationella betydelse genom systematisk variation, samtidigt som de gav eleverna möjlighet att växla mellan att se matematiska uttryck både som processer och objekt (Gray & Tall, 1994). De utformades även utifrån principerna i variationsteorin (Marton m.fl., 2004) för att hjälpa elever att urskilja och fokusera på likhetstecknets relationella betydelse. Designen byggde på fyra centrala variationsmönster:

- **Kontrast**: Eleverna fick jämföra standardiserade och icke-standardiserade ekvationer för att tydligt se skillnaden mellan att tolka likhetstecknet operationellt och relationellt.
- **Separation**: Uppgifter där endast likhetstecknets placering varierade, medan andra komponenter hölls konstanta, användes för att synliggöra dess funktion.
- **Generalisering**: Eleverna fick arbeta med likhetstecknet i olika matematiska sammanhang, såsom addition och subtraktion i ekvationer med olika format – för att stärka en flexibel förståelse.
- **Fusion**: Eleverna fick simultant bearbeta flera kritiska aspekter genom att diskutera och analysera ekvationer där både struktur och matematisk innebörd varierade.

4.4.1.1 Exempel på undervisningsuppgifter

För att tydligt visa hur likhetstecknet representerar ekvivalens användes tre typer av uppgifter (se bilaga 5) som relaterades till variationsmönstren:

4.4.1.1.1 Sant/falskt-uppgifter (kontrast)

Syftet med uppgifterna var att synliggöra skillnaden mellan vad som är en likhet och vad som inte är det.

4 = 4 (sant)	1 – 5 = 4 (falskt)	4 + 6 = 12 – 2 (sant)
7 = 7 + 1 (falskt)	4 + 2 = 8 - 2 (sant)	10 = 5 + 5 = 20 (falskt)

Eleverna fick diskutera *varför* ett påstående var sant eller falskt och motivera sina svar. Carpenter m.fl. (2003) menar att denna typ av uppgifter är effektiva för att utmana elevers befintliga uppfattningar.

4.4.1.1.2 Fyll-i-luckan-uppgifter (separation och generalisering)

Syftet med uppgifterna var att hjälpa elever att se ekvivalens mellan uttryck och förstå att likhetstecknet inte markerar en signal för att utföra en beräkning.

4 + 3 = __ + 1	__ + 6 = 3 + 5	__ - 5 = 4
8 - 5 = __ + 2	7 - __ = __ + 4	9 = _ + 4 = 11 - 2

Enligt Carpenter m.fl. (2003) och Kieran (1981) tenderar elever med operationell förståelse att addera/subtrahera alla tal och skriva summan/differensen i det tomma fältet. Genom aktivt arbete och diskussion kring dessa uppgifter kan elever i stället utveckla relationell förståelse.

4.4.1.1.3 Transformation av ekvationer (fusion)

Syftet med uppgifterna var att öka elevernas flexibilitet i att använda likhetstecknet genom att uttrycka ekvationer på olika sätt.

Gör om ekvationerna genom att flytta på likhetstecknet:

10 - 7 = 3 _____ 10 = 8 + 2 _____

Genom att låta elever manipulera ekvationer blir de medvetna om likhetstecknets roll i att uttrycka ekvivalens (Carpenter m.fl. 2003).

Samtliga uppgifter stärker också elevers proceptuella tänkande, där de lär sig att se uttryck både som en process och som ett objekt (Gray & Tall, 1994).

4.4.2 Implementering i undervisningen

Generell lektionsstruktur:

- Inleddes med gemensam diskussion om likhetstecknets betydelse och/eller konkreta och abstrakta exempel i helklass.
- Eleverna arbetade i par eller smågrupper med uppgifterna för att möjliggöra dialog.
- Avslutades med helklassdiskussion där eleverna gemensamt reflekterade över sina strategier och lösningar.

För detaljerade lektionsplaneringar se bilaga 4.

4.5 Datainsamling och analysmetoder

Datainsamlingen bestod av elevsvar från tre testtillfällen: för-, efter- och uppföljningstest. Resultaten analyserades statistiskt för att ge en övergripande bild av utvecklingen, samtidigt som detaljanalyser av elevsvar genomfördes för att undersöka eventuella förändringar. För att besvara forskningsfrågan formulerades följande noll- och mothypoteser inför de statistiska analyserna:

- **Nollhypotes 1**: Det kommer inte att finnas någon skillnad mellan resultaten på för- och eftertest.
- **Mothypotes 1**: Det kommer att finnas skillnad mellan resultaten på för- och eftertest.
- **Nollhypotes 2**: Det kommer inte att finnas någon skillnad mellan resultaten på för- och uppföljningstest.
- **Mothypotes 2**: Det kommer att finnas skillnad mellan resultaten på för- och uppföljningstest.

För uppgifterna 10, 18 och 19 används även följande hypoteser:

- **Nollhypotes 3**: Lika många elever har rätt på uppgifterna på för- och eftertest.
- **Mothypotes 3**: Det finns en skillnad i antalet elever som har rätt på uppgifterna mellan för- och eftertest.

Om $p < \alpha$ (0.05) kunde vi förkasta respektive nollhypotes på 5 %-nivån och därmed acceptera motsvarande mothypotes.

Nollhypotes och mothypotes 1 och 2 testades på totalpoängnivå över samtliga uppgifter, medan nollhypotes och mothypotes 3 prövades på uppgiftsnivå, varav tre uppgifter – 10, 18 och 19 – valdes ut för fördjupad analys. På så sätt kunde vi undersöka förändringar både i elevernas generella prestationer och i svar på specifika uppgifter.

Testerna rättades med stöd av två rättningsmallar: en som indikerade operationell förståelse och en som indikerade relationell förståelse (se bilaga 3). Uteblivna svar räknades som felsvar. Resultaten fördes in i tabeller i kalkylblad för vidare analyser. Den statistiska analysen baserades på antalet korrekta respektive felaktiga svar, utan att ta hänsyn till hur dessa svar uppnåtts. I de efterföljande detaljanalyserna analyserades däremot elevernas svar, med fokus på vilken typ av förståelse som svaren indikerade.

För att analysera förändringar statistiskt genomfördes en *Repeated Measures ANOVA*, där tidpunkt (för-, efter- och uppföljningstest) utgjorde en inomgruppsfaktor. Denna metod möjliggjorde en analys av både individuella variationer och övergripande förändringar i resultaten över tid. Analysen omfattade:

- **Huvudeffekt av tid**: För att avgöra om det har skett en generell förändring i testresultaten över mättillfällena.
- **Förändringar mellan specifika tidpunkter**: För att undersöka om resultaten förändrats signifikant från för- till eftertest, samt om dessa förändringar kvarstod vid uppföljningstestet.

På uppgiftsnivå användes McNemar-tester för att analysera om andelen korrekta lösningar förändrats signifikant mellan för- och eftertest för de tre uppgifter som analyserades närmare. Detta gjorde det möjligt att identifiera förändringar i elevernas förståelse på en mer detaljerad nivå.

De statistiska analyserna kompletterades med detaljanalyser, vilket innebar en närmare analys av elevernas svar för att identifiera eventuella förändringar i förståelsen av likhetstecknets betydelse. Elevsvaren analyserades för att se indikationer på om eleven behandlade likhetstecknet som en instruktion att utföra en beräkning, eller som en relation mellan två uttryck som ska balanseras – vilket motsvarar milstolpe 3. Exempelvis visar Tabell 1 hur olika lösningar på uppgift 13 och 14 kan tolkas. I uppgift 13 skulle en elev med operationell förståelse svarat 8 om eleven adderat talen på vänster sida om likhetstecknet, eller 10, om eleven adderat samtliga tal i ekvationen. En elev med relationell förståelse hade svarat 6, eftersom eleven förstått att det är 8 på vänster sida och därmed behöver vara det även på höger sida. I uppgift 14 skulle en elev med operationell förståelse svarat 4, då denne fokuserat på vänster sida och subtraherat 5 från 9. En elev med relationell förståelse hade svarat 0, då denne balanserat uttrycken på båda sidor om likhetstecknet.

Tabell 1

Exempel på olika förståelseformer i uppgift 13 och 14

Uppgift		Operationell	Relationell
13	3 + 5 = _ + 2	3 + 5 = 8 + 2	3 + 5 = 6 + 2
		3 + 5 = 10 + 2	
14	9 – 5 = _ + 4	9 – 5 = 4 + 4	9 – 5 = 0 + 4

För att undersöka hur väl testinstrumentet kunde synliggöra elevers operationella respektive relationella förståelse genomfördes en analys av dess möjligheter och begränsningar. Analysen utgick från procept-teorin och Carpenter m.fl.:s (2003) milstolpar och byggde vidare på den bedömning av elevsvar som tidigare gjorts med hjälp av rättningsmallarna. Dessa bidrog till att synliggöra vilka uppgifter som gav indikationer på de olika förståelseformerna samt att uppmärksamma testets begränsningar.

4.5.1 Detaljanalyser

För att analysera elevsvaren i för- och eftertester användes ett kombinerat analysverktyg baserat på Carpenter m.fl.:s (2003) milstolpar för utveckling av relationell förståelse samt Gray och Talls (1994) procept-teori. Syftet var att synliggöra progression i förståelsen för likhetstecknet.

4.5.1.1 Kategorisering utifrån Carpenter m.fl.:s milstolpar

I denna studie har vi utgått från följande två milstolpar när vi analyserat testerna:

3. **Beräkningsbalans**: Eleven förstår att likhetstecknet symboliserar en relation mellan två lika stora tal och beräknar båda sidor av likhetstecknet.
4. **Utan beräkning**: Eleven kan jämföra uttryck på båda sidor av likhetstecknet utan att utföra en beräkning.

Dessa milstolpar användes för att analysera elevsvaren i testuppgifterna och gav en indikation på var i förståelseutvecklingen varje elev befann sig, samt möjliga förflyttningar mellan för- och eftertester. Elevsvaren kunde också ge indikationer kring hur långt eleven kommit i sin relationella förståelse utifrån milstolparna.

4.5.1.2 Tolka tänkandet med hjälp av procept-teorin

För att fördjupa analyserna kompletterades de med Gray och Talls (1994) procept-teori. Vi tolkade elevsvaren utifrån följande:

- **Processinriktat tänkande**: Eleven behandlade uttrycket som en instruktion att utföra en beräkning.
- **Konceptinriktat tänkande**: Eleven behandlade uttrycket som en helhet eller ett objekt.

Procept-teorin gjorde det möjligt att uppmärksamma tecken på kognitiv flexibilitet hos eleverna – alltså om de rörde sig mot att se matematiska uttryck både som process och objekt. Detta sätt att tänka är centralt för en djupare förståelse av ekvivalens och algebraiska samband (Gray & Tall, 1994).

4.5.1.3 Så användes analysverktyget i praktiken

Testerna rättades och fördes in i varsin tabell i ett kalkylblad (Tabell 2) för att få en översikt av resultaten, och för att kunna identifiera en eventuell progression i elevernas relationella förståelse mellan testerna. Grön markering visade ett rätt svar, i uppgifterna 10, 18 och 19 med två tomma luckor skrev vi dessutom in elevens svar. Orange markering visade fel svar, samt elevens svar. Därefter analyserades elevernas felsvar. Först undersöktes om samma fel återkom hos flera elever – vi räknade det som ett gemensamt felmönster om minst tre elever hade samma felsvar. Därefter användes milstolparna och procept-teorin för att tolka hur eleven löst uppgiften samt var de möjligen befann sig i sin utveckling mot relationell förståelse. De korrekta svaren i uppgifterna 10, 18 och 19 analyserades vidare med fokus på variationen av lösningar. Övriga korrekta svar analyserades inte vidare.

Tabell 2

Del av tabell i kalkylblad

Eftertest	Uppgift 1	Uppgift 2	Uppgift 3	Uppgift 4	Uppgift 5	Uppgift 6	Uppgift 7	Uppgift 8	Uppgift 9	Uppgift 10
Elev 1		SANT						6 - 8 = 2		5 + 1 = 2 + 4
Elev 2		SANT	FALSKT	SANT				1 - 8 = 2	4 + 6 = 10 + 3	5 + 0 = 2 + 1
Elev 3										5 + 3 = 2 + 6
Elev 4		SANT								5 + 0 = 2 + 3
Elev 5								6 - 8 = 2	4 + 6 = 3 + 3	5 + 0 = 2 + 3
Elev 6				Vet inte				6 - 8 = 2	4 + 6 = 10 + 3	5 + 2 = 2 + 2
Elev 7										5 + 5 = 2 + 8

4.6 Reliabilitet, validitet och generaliserbarhet

För att säkerställa studiens trovärdighet och noggrannhet har dess reliabilitet, validitet och generaliserbarhet övervägts. Dessa faktorer beaktades genom studiens design, datainsamling och analysmetoder.

4.6.1 Reliabilitet

Reliabiliteten i studien handlar om att säkerställa att de mätinstrument och data som används är pålitliga och ger konsekventa resultat vid upprepade mätningar (Denscombe, 2018). Experiment som genomförs på fältet har begränsningar när det gäller att uppnå samma resultat vid upprepning, eftersom det är svårt att återskapa exakta sociala sammanhang. Trots detta kan verklighetsförankringen göra studiens resultat mer relevanta och tillämpbara i praktiken (Denscombe, 2018). För att stärka reliabiliteten i testerna har samma uppgifter använts vid för-, efter- och uppföljningstest. Detta möjliggjorde jämförelser av elevernas svar över tid och minskade risken för olika tolkningar av svaren i analysen (Denscombe, 2018). En potentiell risk var att eleverna memorerat tidigare svar. För att hantera detta fick eleverna inte tillgång till sina resultat efter respektive testtillfälle, och undervisningsuppgifterna skiljde sig från testuppgifterna. För att ytterligare stärka reliabiliteten utvecklades rättningsmallar med olika tänkbara korrekta lösningar och förväntade felsvar, vilket minskade risken för subjektiva tolkningar av elevsvaren och bidrog till en mer konsekvent bedömning.

4.6.2 Validitet

Enligt Denscombe (2018) är en central aspekt av validitet att säkerställa att en studie verkligen mäter det den avser att undersöka. För att stärka validiteten konstruerades ett testinstrument som fångade elevernas förståelse av likhetstecknet. Testinstrumentet innehöll standardiserade och icke-standardiserade ekvationer utformade enligt variationsteorin, där systematisk variation användes för att synliggöra kritiska aspekter av relationell förståelse. Genom att eleverna konfronterades med uppgifter som utmanade eventuella missuppfattningar kunde vi bättre undersöka hur deras förståelse utvecklats. För att säkerställa att testinstrumentet mätte det avsedda utformades instruktionerna kortfattat och svaren utan fritext, för att minska påverkan av läsförståelse och subjektiva tolkningar. I *sant/falskt* – delen av testet lades svarsalternativet *vet inte* till för att minska risken för slumpsvar. Syftet var att

öka validiteten genom att få en mer tillförlitlig bild av elevernas faktiska förståelse, snarare än att ett korrekt svar skulle kunna bero på gissning.

Två pilotstudier genomfördes för att stärka testinstrumentets innehållsvaliditet. Den första pilotstudien visade att testet var för enkelt och genomfördes för snabbt, vilket ledde till revideringar i både omfattning och svårighetsgrad. Den andra pilotstudien visade att det reviderade testet i högre grad fångade variationer i elevernas förståelse. Pilotstudierna bidrog till att testinstrumentet blev mer ändamålsenligt, och därigenom stärktes dess innehålls- och begreppsvaliditet.

Studien genomfördes som en intervention med för-, efter- och uppföljningstestdesign för att analysera förändringar i elevernas förståelse av likhetstecknet. All matematikundervisning under interventionsperioden genomfördes av oss, vilket begränsade yttre påverkan och gjorde det möjligt att koppla eventuella förändringar i elevernas förståelse till undervisningsinterventionen. Att studien genomfördes i en autentisk lärmiljö stärker den ekologiska validiteten, då resultaten speglade elevernas faktiska undervisningssituation (Denscombe, 2018).

För att ytterligare stärka studiens interna validitet användes statistiska analyser som *Repeated Measures* ANOVA och McNemar-tester. *Repeated Measures* ANOVA möjliggjorde undersökningar av förändringar i elevernas prestationer över tid på gruppnivå, medan McNemar-testerna användes för att analysera förändringar i svarsfrekvens på uppgiftsnivå. Användningen av dessa metoder bidrog till att säkerställa att identifierade förändringar inte kunde tillskrivas slumpmässig variation utan snarare indikerade en faktisk utveckling i elevernas förståelse.

4.6.3 Generaliserbarhet

Studien genomfördes i en specifik skolmiljö i Mellansverige och med en begränsad grupp elever, vilket gör att generaliserbarheten till andra skolor och elevgrupper är begränsad (Denscombe, 2018). Däremot kan resultaten ge insikter om hur interventionen kan fungera i en liknande kontext, särskilt i skolor med elever i årskurs 1. Genom att använda ett bekvämlighetsurval i stället för ett slumpmässigt urval har vi inte genomfört studien på en representativ urvalsgrupp för hela befolkningen, vilket innebär att studien inte kan generaliseras till alla elever i samma ålder. Det är viktigt att studiens resultat ses som en

indikation på hur interventionen kan påverka elever i en specifik miljö, snarare än ett definitivt bevis på effekten på en bredare population (Denscombe, 2018).

4.7 Forskningsetiska aspekter

Studien genomfördes i enlighet med Vetenskapsrådets (2024) forskningsetiska principer, med särskild hänsyn till deltagarnas rättigheter, integritet och anonymitet. All insamlad information hanterades enligt gällande forskningsetiska riktlinjer och dataskyddslagstiftningen GDPR. Vi samlade enbart in elevers testresultat samt namn för att kunna koppla rätt test till rätt elev, inga andra direkt identifierande uppgifter registrerades. För att säkerställa anonymitet publicerades inga uppgifter om elevernas, lärarens, skolans eller stadens namn.

4.7.1 Informationskrav och samtycke

För att uppfylla informationskravet informerades samtliga vårdnadshavare skriftligt om studiens syfte, genomförande och deras barns medverkan (se bilaga 6) (Vetenskapsrådet, 2024). För att minimera risken att eleverna kände sig stressade vid testtillfällena förtydligades att testerna enbart var en del av studien och inte skulle påverka deras skriftliga omdömen i matematik. Eleverna uppmuntrades att försöka så gott de kunde utan att känna press, och det betonades att deras medverkan var frivillig. Dessutom genomfördes testerna i en välbekant miljö med närvarande lärare för att skapa trygghet. Skriftligt samtycke inhämtades innan studien påbörjades (se bilaga 7). Eleverna fick åldersanpassad muntlig information om studiens syfte, samt om att deras deltagande var frivilligt och att de när som helst kunde avbryta utan några negativa konsekvenser (Vetenskapsrådet, 2024).

4.7.2 Lagring och säkerhet

Den insamlade datan bestod av pappersbaserade tester och digitala resultatfiler. Fysiska dokument förvarades i ett låst skåp som endast behöriga hade åtkomst till, medan digital information lagrades på lösenordskyddade datorer med uppdaterade skydd mot obehörig åtkomst. Ingen information som kan kopplas till enskilda individer delades med utomstående. När studien var avslutad och examensarbetet godkänt förstördes allt material enligt forskningsetiska riktlinjer. Pappersdokument strimlades, och digitala filer raderades på ett säkert sätt (Vetenskapsrådet, 2024).

5 Resultat och analys

I avsnittet presenteras och analyseras resultaten från för-, efter- och uppföljningstesterna. Först redovisas resultaten från en *Repeated Measures* ANOVA, följt av en tillhörande analys. Därefter redovisas och analyseras resultaten från McNemar-testerna. Avsnittet avslutas med detaljanalyser av elevsvar samt en analys av testinstrumentets möjligheter och begränsningar.

5.1 Resultat av Repeated Measures ANOVA

För att undersöka om det skett en förändring i elevernas resultat över tid genomfördes en *Repeated Measures* ANOVA. Inför analysen fördes varje elevs individuella resultat från för-, efter- och uppföljningstest in i ett kalkylblad, där varje rad representerade en elev och varje kolumn motsvarade ett testtillfälle. Denna struktur möjliggjorde en statistisk analys av generella mönster i testresultaten över tid på gruppnivå.

I resultatredovisningen används följande statistiska mått:
n anger antalet elever som ingår i analysen. *Mean* står för medelvärdet av elevernas poäng vid respektive testtillfälle, och *SD* (standardavvikelse) visar hur mycket resultaten varierade inom gruppen. *F* representerar F-värdet från variansanalysen och används för att avgöra om det finns en signifikant skillnad mellan mättillfällena. Frihetsgrader anges inom parentes efter F-värdet. *p-värdet* visar sannolikheten att de observerade skillnaderna har uppkommit av en slump – ett värde under 0.05 betraktas som statistiskt signifikant. Vid jämförelser mellan två testtillfällen redovisas också *t-värde*, som är den statistik varpå p-värdet räknas ut, samt *Cohen's d*, som anger effektstorlek. Ett värde över 0.8 tolkas som en stor effekt. *Konfidensintervall* (95%) anges med *Lower* och *Upper*, och visar inom vilket intervall den sanna medelvärdesskillnaden sannolikt ligger.

Resultaten i Tabell 3 visade en signifikant huvudeffekt av tid, $F(2, 80) = 35.303$, $p < .001$, vilket tyder på att elevernas prestationer förändrades statistiskt säkerställt mellan de tre mättillfällena. Signifikansnivån sattes till $\alpha = 0{,}05$, vilket innebär att resultat med ett p-värde under denna gräns betraktas som statistiskt signifikanta. Eftersom $p < \alpha$ kan vi förkasta nollhypotes 1 och 2 på 5 %-nivån och därmed acceptera motsvarande mothypoteser. Denna signifikansnivå motsvarar ett konfidensintervall på 95 %, vilket även har använts vid rapportering av medelvärden.

Tabell 3
Resultat i Repeated Measures ANOVA: Huvudeffekt av tid

Repeated Measures ANOVA

Within Subjects Effects

Cases	Sum of Squares	df	Mean Square	F	p
Tid	429.122[a]	2[a]	214.561[a]	35.303[a]	< .001[a]
Residuals	486.211	80	6.078		

Note. Type III Sum of Squares
[a] Mauchly's test of sphericity indicates that the assumption of sphericity is violated (p < .05).

Between Subjects Effects

Cases	Sum of Squares	df	Mean Square	F	p
Residuals	2165.984	40	54.150		

Note. Type III Sum of Squares

Följande medelvärden, konfidensintervall och standardavvikelser redovisas i Tabell 4 och visar elevernas resultat vid respektive testtillfälle:

- **Förtest:** M = 12.17, 95% konfidensintervall (10.46; 13.89), SD = 5.43
- **Eftertest:** M = 15.95, 95% konfidensintervall (14.48; 17.33), SD = 4.36
- **Uppföljningstest**: M = 16.29, 95% konfidensintervall (14.96; 17.63), SD = 4.22

Tabell 4

Resultat i Repeated Measures ANOVA: Beskrivande statistik

Descriptive Statistics

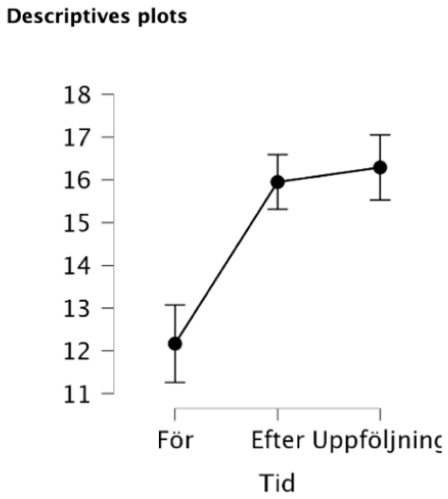
Descriptive Statistics

	Förtest	Eftertest	Uppföljningstest
Valid	41	41	41
Missing	0	0	0
Mean	12.171	15.951	16.293
95% CI Mean Upper	13.885	17.327	17.625
95% CI Mean Lower	10.457	14.575	14.961
Std. Deviation	5.431	4.359	4.220
Minimum	2.000	5.000	6.000
Maximum	20.000	20.000	20.000

Som framgår i Figur 4, där resultatutvecklingen visualiseras i ett linjediagram, ökar medelvärdet tydligt efter interventionen och förblir på en högre nivå vid uppföljningstestet. Felstaplarna i diagrammet visar att spridningen minskar något efter interventionen, vilket tyder på att fler elever presterade mer likartat efter undervisningen.

Figur 4

Resultat i Repeated Measures ANOVA: Resultat i linjediagram



Post hoc-analyser som redovisas i Tabell 5 visade att förbättringen mellan för- och eftertest var signifikant, $t(40) = –6.813$, $p < .001$, med en genomsnittlig ökning på 3.78 poäng (Cohen's $d = –0.804$), vilket visar på en stor effekt. Även skillnaden mellan för- och uppföljningstest var signifikant, $t(40) = –6.586$, $p < .001$, med en ökning på 4.12 poäng (Cohen's $d = –0.877$). Däremot var skillnaden mellan efter- och uppföljningstest inte signifikant, $t(40) = –0.784$, $p = 0.438$, vilket tyder på att eleverna behöll sin förbättrade förståelse över tid.

Tabell 5
Resultat i Repeated Measures ANOVA: Skillnader över tid

Post Hoc Tests

Post Hoc Comparisons - Tid

		Mean Difference	SE	df	t	Cohen's d	p_{holm}
För	Efter	−3.780	0.555	40	−6.813	−0.804	< .001
	Uppföljning	−4.122	0.626	40	−6.586	−0.877	< .001
Efter	Uppföljning	−0.341	0.436	40	−0.784	−0.073	0.438

Note. P-value adjusted for comparing a family of 3 estimates.

5.1.1 Analys av Repeated Measures ANOVA

Resultaten från *Repeated Measures* ANOVA visade en signifikant förbättring i elevernas förståelse av likhetstecknet efter undervisningsintervention. Förbättringen från förtest till både efter- och uppföljningstest tyder på att eleverna utvecklade en relationell förståelse över tid. De stora effektstorlekarna och att förbättringen kvarstod efter två veckor utan riktad undervisning tyder på att förändringen inte var tillfällig, utan även pedagogiskt meningsfull. Detta mönster, där konfidensintervallen inte överlappar mellan första och senare mätningar, indikerar att resultaten inte är slumpmässiga.

Dessa resultat stödjer också den teoretiska ram som studien vilar på: att eleverna rört sig från operationell förståelse – där likhetstecknet ses som en uppmaning att utföra en beräkning – till relationell förståelse, där likhetstecknet förstås som en symbol för balans mellan två uttryck. Det överensstämmer med Carpenter m.fl.:s (2003) milstolpar, liksom med Gray och Talls (1994) procept-teori och dess betoning på att kunna växla mellan process och objekt.

5.2 Resultat av McNemar-tester

McNemar-tester genomfördes för att undersöka om det skett en signifikant förändring i andelen korrekta svar mellan för- och eftertest för uppgift 10, 18 och 19. Eftersom antalet elever som ändrade sina svar mellan testtillfällena var litet, användes en mid-p-justering för att få en mer tillförlitlig signifikansnivå.

- För uppgift 10 visade testet en signifikant förändring, $p < 0.001$.
- För uppgift 18 visade testet en signifikant förändring, $p < 0.05$.
- För uppgift 19 visade testet en signifikant förändring, $p < 0.001$.

I samtliga fall är $p < \alpha$, vilket innebär att nollhypotes 3 kan förkastas på 5%-nivån. Resultaten tyder därmed på att andelen korrekta svar förändrades signifikant från för- till eftertest för alla tre uppgifter. Underlaget för analyserna redovisas i Tabellerna 6, 7 och 8, vilka visar antal elever som ändrade respektive behöll sina svar mellan testtillfällena.

Tabell 6

McNemar-test: Uppgift 10

McNemar Test: Jämför parade andelar						
		Förtest			Summan av ändringar:	15
		Antal rätt	Antal fel		**Använd mid-p-värdet**	
Eftertest	Antal rätt	18	15			
	Antal fel	0	8		Summan av alla fyra celler ska vara lika med total antal elever:	41
	χ^2	15		Teststatistiken		
	df	1		Frihetsgrader		
	p-värde	0,000108		Används om summan av ändringar är större än 20		
	mid-p	3,05E-05		Används om summan av ändringar är mindre än 20 (finns ingen teststatistik med detta)		

Tabell 7

McNemar-test: Uppgift 18

McNemar Test: Jämför parade andelar						
		Förtest			Summan av ändringar:	19
		Antal rätt	Antal fel		**Använd mid-p-värdet**	
Eftertest	Antal rätt	10	15			
	Antal fel	4	12		Summan av alla fyra celler ska vara lika med total antal elever:	41
	χ^2	6,368421		Teststatistiken		
	df	1		Frihetsgrader		
	p-värde	0,011617		Används om summan av ändringar är större än 20		
	mid-p	0,011818		Används om summan av ändringar är mindre än 20 (finns ingen teststatistik med detta)		

Tabell 8

McNemar-test: Uppgift 19

McNemar Test: Jämför parade andelar						
		Förtest		Summan av ändringar:	11	
		Antal rätt	Antal fel	**Använd mid-p-värdet**		
Eftertest	Antal rätt	14	11			
	Antal fel	0	16	Summan av alla fyra celler ska vara lika med total antal elever:		41
	χ^2	11		Teststatistiken		
	df	1		Frihetsgrader		
	p-värde	0,000911		Används om summan av ändringar är större än 20		
	mid-p	0,000488		Används om summan av ändringar är mindre än 20 (finns ingen teststatistik med detta)		

5.2.1 Analys av McNemar-tester

Statistiska analyser med McNemar-tester genomfördes för att undersöka om andelen korrekta svar förändrades signifikant från för- till eftertest på uppgift 10, 18 och 19. Vi valde att fokusera på dessa tester eftersom förändringen mellan efter- och uppföljningstest kvarstod, vilket stärker intrycket av en varaktig relationell förståelse. Uppgifterna i Tabell 9 valdes eftersom de är icke-standardiserade, öppna med två luckor och därmed särskilt intressanta för att kunna tolka elevernas lösningar mer detaljerat i ett senare skede. Det var därför viktigt att först säkerställa att det skett en signifikant förbättring på dessa uppgifter.

Tabell 9

Icke-standardiserade uppgifter med två öppna luckor

10	5 + _ = 2 + _
18	2 + _ = 6 - _
19	8 - _ = _ + 3

McNemar-testerna visade att andelen korrekta svar ökade signifikant från för- till eftertest på samtliga tre analyserade uppgifter. De låga p-värdena, särskilt för uppgift 10 och 19 indikerar att förbättringen sannolikt inte beror på slumpen. Tillsammans med ökningen i andelen korrekta svar tyder detta på att undervisningsinterventionen haft effekt. Även för uppgift 18 konstaterades en signifikant förbättring. Att förbättringen återfinns på uppgiftsnivå stärker bilden av att eleverna inte bara utvecklat sin generella förståelse, utan sannolikt också förbättrat sin förmåga att tolka likhetstecknet relationellt. Samtidigt bör det noteras att vissa

uppgifter – exempelvis uppgift 5 och 6 i Tabell 10 – mycket väl kan lösas korrekt utifrån ett operationellt synsätt.

Tabell 10

Standardiserade uppgifter

5	3 + 4 = _
6	7 + _ = 10

Det innebär att en ökning i antalet korrekta svar inte automatiskt kan tolkas som ett tecken på relationell förståelse. Därför är det särskilt intressant att förbättringen återfanns i uppgift 10, 18 och 19 – då dessa ställer högre krav på att se likhetstecknet som en symbol för ekvivalens. Sammantaget stärker detta tolkningen att åtminstone vissa elever tagit ett steg mot relationell förståelse. Resultaten överensstämmer med Carpenter m.fl.:s (2003) milstolpar samt procept-teorins betoning på ett flexibelt matematiskt tänkande.

5.3 Detaljanalyser av elevsvar

Inledningsvis görs detaljerade analyser av återkommande felsvar och olika korrekta svar för de icke-standardiserade, öppna uppgifterna med två luckor; 10, 18 och 19. Därefter analyseras återkommande felsvar i övriga uppgifter. Uppgift 5–8 består av standardiserade ekvationer och speglar främst en operationell förståelse. Resterande uppgifter är icke-standardiserade, och om dessa löses korrekt kan det tyda på att eleven uppvisar relationell förståelse. Analysen tar utgångspunkt i följande två av Carpenter m.fl.:s (2003) milstolpar:

3. **Beräkningsbalans**: Eleven förstår att likhetstecknet symboliserar en relation mellan två lika stora tal och beräknar båda sidor av likhetstecknet.
4. **Utan beräkning**: Eleven kan jämföra uttryck på båda sidor av likhetstecknet utan att utföra en beräkning.

Vi utgår också från Gray och Talls (1994) procept-teori, för att se tendenser till om eleven kan växla mellan att se uppgiften som en process och ett koncept.

5.3.1 Uppgift 10, 18 och 19

De tre uppgifterna som analyseras i detta avsnitt har tidigare undersökts statistiskt, med hjälp av McNemar-tester, vilka visade en signifikant ökning i andelen korrekta svar mellan för- och eftertest. Eftersom uppgifterna är icke-standardiserade och öppna med två tomma luckor, valdes de för mer detaljerade analyser. Syftet var att komplettera den statistiska förbättringen med en närmare granskning av vilka lösningar som förekommer och hur de förändrats över tid. Detta gav en nyanserad bild av hur förändringen såg ut på uppgiftsnivå.

5.3.1.1 Återkommande felsvar

Vid uppföljningstestet återkom ett mindre antal felsvar i uppgift 10, vilket framgår i Tabell 11. Vilket tyder på att vissa elever fortfarande uppvisade tendenser till operationell förståelse, även efter undervisningsinterventionen. Det kan också tolkas som att den relationella förståelsen ännu inte var helt stabil hos alla elever, vilket är ett viktigt fynd i arbetet med att långsiktigt befästa relationell förståelse för likhetstecknet.

Som Tabell 11 också visar, identifierades återkommande felsvar på uppgift 18 i förtestet, vilket tyder på ett operationellt synsätt. Dessa elever befann sig troligen före milstolpe 3: beräkningsbalans. Vid eftertesterna förekom däremot inga återkommande felsvar på uppgift 18, vilket tyder på att interventionen haft effekt på elevernas missuppfattningar. Frånvaron av återkommande fel antyder att eleverna i större utsträckning börjat behandla likhetstecknet som en symbol för ekvivalens, vilket tyder på förflyttning mot relationell förståelse.

Tabell 11

Återkommande felsvar på uppgift 10 och 18

	Uppgift	Felsvar	Förtest	Eftertest	Uppföljningstest
10	5 + _ = 2 + _	5 + 5 = 2 + 3	1	1	3
18	2 + _ = 6 - _	2 + 4 = 6 - 2	3	-	-

5.3.1.2 Jämförelse av korrekta svar

En jämförelse av elevernas korrekta svar mellan för-, efter- och uppföljningstest visade en ökning i variationen av lösningar, vilka redovisas i Tabell 12. I uppgift 10 syns att fler elever i eftertesterna löst uppgiften med olika korrekta lösningar, exempelvis 5 + 5 = 2 + 8 och

5 + 0 = 2 + 3. Detta indikerar att eleverna inte enbart räknat ut en sida av uttrycket, utan förstått att båda sidor ska ha samma värde – något som överensstämmer med milstolpe 3: beräkningsbalans, och antyder en ökad flexibilitet i tänkandet. Samma utveckling syns i uppgift 18, där elevernas lösningar breddades från tre korrekta lösningar i förtestet, till fem i uppföljningstestet. I uppgift 19 märks en markant ökning av olika lösningar från för- till eftertester. Ökningen av variation i lösningar tyder på att de i högre grad förstod strukturen i ekvationen och vågade pröva egna strategier. Mångfalden i lösningsmetoder visar också att fler elever insåg att en ekvation kan balanseras på flera sätt. Båda dessa aspekter kan tolkas som uttryck för att eleverna närmat sig relationell förståelse för likhetstecknet.

Tabell 12

Variation av korrekta svar på uppgift 10, 18 och 19

	Uppgift	Korrekt svar	Förtest	Eftertest	Uppföljningstest
10	5 + _ = 2 + _	5 + 5 = 2 + 8	9	13	11
		5 + 2 = 2 + 5	4	1	4
		5 + 0 = 2 + 3	2	8	12
		5 + 1 = 2 + 4	2	6	2
		5 + 3 = 2 + 6	1	1	3
		5 + 4 = 2 + 7	-	2	-
		5 + 97 = 2 + 100	-	1	1
18	2 + _ = 6 - _	2 + 4 = 6 - 0	9	14	16
		2 + 3 = 6 – 1	3	7	8
		2 + 0 = 6 – 4	-	-	3
		2 + 2 = 6 – 2	2	2	3
		2 + 1 = 6 - 3	-	2	3
19	8 – 2 = _ + 3	8 – 0 = 5 + 3	7	7	8
		8 – 3 = 2 + 3	3	1	4
		8 – 4 = 1 + 3	-	6	2
		8 – 2 = 3 + 3	1	5	6
		8 – 1 = 4 + 3	1	5	4
		8 – 5 = 0 + 3	2	1	3

5.3.2 Övriga uppgifter

I avsnittet analyseras återkommande felsvar i *sant/falskt*-uppgifterna samt uppgift 5–9, 11–17 och 20.

5.3.2.1 Återkommande felsvar i sant/falskt uppgifterna 1–4

Som framgår i Tabell 13 har andelen hade andelen *vet inte*-svar minskat i uppgift 2, men några elever svarade fortfarande felaktigt *sant*, vilket kan tolkas som att de tolkade likhetstecknet operationellt.

Med hjälp av procept-teorin kan flera felsvar tolkas som att eleverna främst såg uttrycken som processer snarare än objekt – ett tecken på att proceptuellt tänkande ännu inte var fullt utvecklat hos alla. Detta blev särskilt tydligt i de uppgifter där likhetstecknet inte förekom i standardposition.

I uppgift 3 gick många elever från att svara *vet inte* på förtestet till korrekta svar på eftertestet, vilket tyder på att de nått milstolpe 3: beräkningsbalans. Denna utveckling höll också i sig på uppföljningstestet, där antalet felaktiga svar fortsatt var lågt, vilket tyder på en stabilisering av förståelsen.

Tabell 13

Återkommande felsvar på sant/falskt-uppgifterna

	Uppgift	Felsvar	Förtest	Eftertest	Uppföljningstest
1	8 = 8	Vet inte	3	-	-
2	6 = 6 + 6	Sant	3	4	3
		Vet inte	3	1	-
3	4 + 6 = 12 – 2	Vet inte	9	2	3
		Falskt	7	1	3
4	2 + 3 = 5 - 1	Vet inte	6	3	1
		Sant	1	1	4

5.3.2.2 Återkommande felsvar i uppgift 5–9, 11–17 och 20

Vid analysen av uppgifterna framträdde flera återkommande felsvar i förtestet, särskilt i uppgift 8–9, 11 samt 13–14, dessa redovisas i Tabell 14. Felsvaren tyder på ett operationellt synsätt, där eleverna genomfört beräkningar utan att beakta relationen mellan ekvationens båda sidor. Exempelvis i uppgift 9 och 13 syns en tendens att talen på vänstra sidan om likhetstecknet adderats. Detta tyder på att eleverna ännu inte balanserar båda sidor utan snarare fortsätter en beräkningssekvens, vilket enligt procept-teorin speglar ett processinriktat tänkande. Dessa elever befann sig troligen före milstolpe 3: beräkningsbalans.

I eftertestet minskade flera av de återkommande felsvaren. Färre elever angav felaktiga svar som i uppgift 8. Även i uppgifterna 9 och 13 var det färre elever som adderat samtliga termer. Detta indikerar att fler elever börjat tolka likhetstecknet relationellt och närmat sig milstolpe 3. Utvecklingen höll delvis i sig vid uppföljningstestet, men vissa felsvar kvarstod, framför allt i uppgift 8 och 11, vilket tyder på att några elever fortfarande uppvisade operationell förståelse.

Tabell 14

Återkommande felsvar på uppgift 8–9, 11–14, 17 och 20

	Uppgift	Felsvar	Förtest	Eftertest	Uppföljningstest
8	_ - 8 = 2	6 - 8 = 2	16	11	10
9	4 + 6 = _ + 3	4 + 6 = 10 + 3	7	5	4
		4 + 6 = 13 + 3	7	-	1
		4 + 6 = 3 + 3	3	1	3
11	10 = _ - 1	10 = 9 - 1	9	7	5
12	_ = 7 + 5	11 = 7 + 5	1	2	3
13	3 + 5 = _ + 2	3 + 5 = 8 + 2	9	5	7
		3 + 5 = 10 + 2	5	3	2
14	9 – 5 = _ + 4	9 – 5 = 4 + 4	7	6	4
		9 – 5 = 1 + 4	2	3	1
17	_ + 5 = 2 + 4	11 + 5 = 2 + 4	4	-	-
20	10 = _ + 1 = 12 - 2	10 = 11 + 1 = 12 – 2	5	-	1
		10 = 1 + 1 = 12 – 2	1	-	3
		10 = 0 + 1 = 12 - 2	1	1	3

Även om vi valt att endast uppmärksamma felsvar som förekom hos tre eller fler elever, vill vi lyfta fram uppgift 15 som ett intressant undantag. I denna uppgift förekom en stor variation av felaktiga lösningar, som kan ses i Tabell 15, felsvar som vi inte förutsåg. Flera elever verkade ha förstått att det första uttrycket ska ge summan 10, men tolkade det andra likhetstecknet som ett plustecken, exempelvis 8 + 2 = 7 = 3. Detta tyder på att de möjligen var på väg mot en relationell förståelse, men fortfarande brottades med att tolka dubbla likhetstecken som uttryck för samma relation, snarare än som sekventiella instruktioner. I uppföljningstestet såg vi en blandad bild. Vissa felsvar försvann helt, medan andra kvarstod, som i uppgift 8 och 11 (Tabell 14). Det indikerar att vissa tankemönster är motståndskraftiga mot förändring, särskilt när det gäller uppgifter som utmanar en inrotad operationell förståelse.

Tabell 15

Återkommande felsvar på uppgift 15

	Uppgift	Felsvar	Förtest	Eftertest	Uppföljningstest
15	8 + 2 = _ = _	8 + 2 = 10 = _	2	1	-
		8 + 2 = 10 = 0	1	1	5
		8 + 2 = 0 = 10	-	1	-
		8 + 2 = 7 = 3	1	-	3
		8 + 2 = 5 = 5	1	-	-
		8 + 2 = 8 = 2	1	-	-
		8 + 2 = 9 = 1	-	1	1
		8 + 2 = 3 = 7	-	1	-

5.4 Analys av testinstrumentet

I avsnittet analyseras testinstrumentets förmåga att fånga olika förståelseformer. Testinstrumentet bestod av två delar: *sant/falskt*-uppgifter och *fyll-i-luckan*-uppgifter. Båda delarna utformades för att möjliggöra tolkningar av vilken typ av förståelse som uttrycks, snarare än att enbart fastställa rätt eller fel svar. Testinstrumentet visade sig till stor del fungera ändamålsenligt. Eleverna använde en rad olika lösningsstrategier, vilket möjliggjorde detaljanalyser utifrån både Carpenter m.fl.:s (2003) milstolpar och procept-teorins distinktion mellan process och objekt. Den variation som uppstod i elevsvaren tyder på att testet lyckades synliggöra olika nivåer av förståelse. Samtidigt identifierades vissa begränsningar.

Den första delen som redovisas i Tabell 16, syftade till att identifiera om eleverna spontant uppfattade likhetstecknet som en symbol för ekvivalens, även utan att utföra en beräkning. Detta relaterar till milstolpe 4 – där eleven jämför uttryck utan att räkna – samt till procept-teorin, eftersom uppgifterna krävde att eleven ser hela uttrycket som ett objekt. En begränsning med denna uppgiftstyp var att eleverna kan ha valt rätt svar genom gissning, eftersom det handlade om slutna sant/falskt-alternativ snarare än att redovisa ett svar i form av ett tal.

Tabell 16

Sant/falskt – uppgifter

1	8 = 8	sant	falskt	vet inte
2	6 = 6 + 6	sant	falskt	vet inte
3	4 + 6 = 12 - 2	sant	falskt	vet inte
4	2 + 3 = 5 – 1	sant	falskt	vet inte

Den andra delen, *fyll-i-luckan*-uppgifter, utformades med stöd av variationsteorin, särskilt genom principerna kontrast och separation, och utifrån milstolpe 3, där elever balanserar båda sidor av likhetstecknet genom att utföra två parallella beräkningar. Dessa uppgifter gav goda möjligheter att identifiera tecken på operationell förståelse, exempelvis genom att alla tal adderats, respektive relationell förståelse, genom att det skapades ekvivalens mellan uttrycken.

Samtidigt blev det tydligt i analysen att vissa uppgifter inte fullt ut mätte vare sig en relationell eller operationell förståelse, vilka redovisas i Tabell 17. För att kunna tolka dessa uppgifter hade det varit fördelaktigt att kunna ta del av elevens resonemang. Exempelvis i uppgift 5, kunde vi inte avgöra om eleven hade operationell eller relationell förståelse enbart utifrån rätt svar. Ett möjligt sätt att hantera detta hade kunnat vara genom exempelvis diskussioner. Om en elev förklarat att ”tre plus fyra blir sju” tyder det på operationell förståelse. Om eleven i stället resonerat på följande vis ”tre plus fyra är lika med sju, därför ska det stå sju på andra sidan likhetstecknet eftersom det ska vara lika mycket på båda sidor” indikerar det relationell förståelse. Liknande resonemang skulle kunna appliceras på samtliga uppgifter i Tabell 17.

Tabell 17

Uppgifter där elevers förståelse inte kunde fastställas utifrån svar

5	3 + 4 = _
6	7 + _ = 10
7	9 - _ = 9
8	_ - 8 = 2
11	10 = _ - 1
12	_ = 7 + 5
16	8 = _ + 5

De uppgifter som tydligast fångade elevernas relationella förståelse var sådana med uttryck på båda sidor om likhetstecknet, vilka redovisas i Tabell 18, i synnerhet de som innehöll flera tomma luckor att fylla i. Dessa uppgifter tvingade eleverna att reflektera över ekvivalens. Ett exempel på att en elev uppvisade operationell förståelse var om denne svarade exempelvis 2 + 4 = 6 - 2 på uppgift 18, då har eleven adderat talen på vänster sida om likhetstecknet och fyllt i den första tomma luckan med 4. Att eleven sedan svarat 2 kan bero på att denne räknat ut att 6 – 2 = 4. Om eleven i stället svarat exempelvis 2 + 4 = 6 - 0, visar eleven att den balanserat båda sidor, vilket tyder på relationell förståelse – vilket innebär att uppgiftens struktur lämpade sig bra för att urskilja vilken typ av förståelse eleven uppvisat.

Tabell 18

Uppgifter som synliggjorde tendenser till relationell förståelse

9	4 + 6 = _ + 3
10	5 + _ = 2 + _
13	3 + 5 = _ + 2
14	9 – 5 = _ + 4
17	_ + 5 = 2 + 4
18	2 + _ = 6 - _
19	8 - _ = _ + 3
20	10 = _ + 1 = 12 - 2

Som framgår i Tabell 19 visade analysen att några uppgifter, exempelvis uppgift 15 med dubbla likhetstecken, att felsvaren inte nödvändigtvis berodde på bristande förståelse för likhetstecknet, utan snarare kunde bottna i osäkerhet kring uppgiftsformatet eller i begränsad räknefärdighet. Detta ligger i linje med Norberg (2020), som betonar att svårigheter att tolka matematiska symboler kan uppstå redan i tidig ålder och påverka hur elever hanterar uppgifter med ovanlig struktur. Powell (2015) framhåller att sådana uppgifter kan främja relationell förståelse, men att de också kan innebära en ökad kognitiv belastning. I uppgift 8, där en lucka föregår en subtraktion, kan osäkerheten vara särskilt stor. Brorsson (2012) betonar att denna typ av uppgifter ofta upplevs som mer utmanande än andra subtraktionsuppgifter, vilket kan leda till felsvar även hos elever som i grunden har förstått likhetstecknets betydelse.

Tabell 19

Uppgifter där felsvaren kan ha berott på annat än förståelsen av likhetstecknet

8	_ - 8 = 2
11	10 = _ - 1
15	8 + 2 = _ = _

Sammanfattningsvis visade analysen att testinstrumentet i huvudsak fungerade ändamålsenligt för att synliggöra operationell respektive relationell förståelse. Som framgår i Tabell 18 var *fyll-i-luckan*-uppgifter med uttryck på båda sidor om likhetstecknet särskilt effektiva för att fånga relationell förståelse, medan *sant/falskt*-uppgifterna i Tabell 16 kunde ge indikationer på om elever tolkade likhetstecknet som en symbol för ekvivalens. Vissa uppgifter, redovisade i Tabell 17, hade dock begränsad tolkningsbarhet, vilket lyfter fram behovet av kompletterande information för en mer tillförlitlig bedömning av förståelsen.

6 Diskussion

I följande avsnitt presenteras en sammanfattning av resultaten. Därefter diskuteras vald metod, studiens resultat, samt testinstrumentets möjligheter och begränsningar.

6.1 Sammanfattning av resultat

Syftet med denna studie var att undersöka hur undervisning med icke-standardiserade ekvationer kan bidra till att utveckla relationell förståelse för likhetstecknet hos elever i årskurs 1. Resultaten indikerar en progression mot relationell förståelse efter undervisningsinterventionen och pekar på att eleverna i större utsträckning började behandla likhetstecknet som en symbol för ekvivalens, snarare än som en uppmaning att utföra en beräkning. Det fanns även tendenser till ett utvecklat proceptuellt tänkande, där uttryck inte längre enbart behandlades som processer, utan också som objekt – i linje med procept-teorin (Gray & Tall, 1994).

Utvecklingen är intressant i relation till *mathematical literacy*. Enligt Skolverket (2022) är det en central uppgift i matematikundervisningen att redan tidigt stödja elevers förmåga att tolka och använda matematik i meningsfulla sammanhang. Att redan i årskurs 1 arbeta med uppgifter som utvecklar relationell förståelse kan ses som ett sätt att skapa en stabil grund för långsiktig matematisk utveckling – något som också är centralt i arbetet med tidig algebra och generaliserad aritmetik – och därmed utvecklingen av algebraiskt tänkande (Bråting & Madej, 2017; Kieran m.fl., 2016).

Det använda testinstrumentet visade sig fungera väl för att synliggöra tendenser till operationell och relationell förståelse, men vissa mönster i elevsvaren antyder att det främst fångade operationell förståelse. En större variation av öppna uppgifter, gärna i kombination med muntliga resonemang, skulle kunna ge en mer nyanserad bild.

6.2 Metoddiskussion

Att kombinera statistiska analyser med detaljanalyser har varit en styrka i studien, då det möjliggjort att fånga både förändringar i resultatnivåer och utvecklingen av förståelsen för likhetstecknet. Den tydliga kopplingen mellan testinstrument, undervisningsupplägg, procept-

teorin, variationsteorin och Carpenter m.fl.:s (2003) milstolpar – har skapat ett genomgående sammanhang mellan teori, metod och resultat.

En begränsning var att vi själva genomförde undervisningen, vilket kan ha påverkat resultaten. Samtidigt möjliggjorde det en konsekvent och teoribaserad undervisning. Undervisningsinterventionens korta omfattning, fyra lektioner, innebar också en viss begränsning, men trots detta syns varaktiga effekter i uppföljningstestet – vilket ger en indikation om att undervisningen haft en faktisk inverkan.

En central aspekt av studien var hur väl det använda testinstrumentet fångade elevernas operationella respektive relationella förståelse. Vår intention var att utforma uppgifter som kunde synliggöra elevens tolkning av likhetstecknet – något som i stor utsträckning tycks ha fungerat, åtminstone på en övergripande nivå. Samtidigt identifierades uppgifter där svaren kan ha påverkats av andra faktorer än förståelsen för likhetstecknet.

Utöver frågor kopplade till undervisning och testinstrumentets utformning fanns även praktiska omständigheter under studiens genomförande som kan ha påverkat resultatens tillförlitlighet. Eftersom studien genomfördes i en autentisk skolmiljö kunde undervisningen inte alltid genomföras exakt som planerat. Morgonsamlingar och andra schemalagda aktiviteter innebar att vissa lektioner blev kortare än beräknat, vilket minskade den faktiska undervisningstiden med fokus på likhetstecknet. Det kan i sin tur ha påverkat elevernas möjligheter att utveckla relationell förståelse.

En annan begränsning i studien rör antalet deltagare, i de två klasserna går sammanlagt 53 elever. Endast 43 elever gav sitt samtycke till att delta, två av dessa deltog inte vid förtestet och deras resultat kunde därför inte inkluderas i analyserna. Det är möjligt att detta påverkat resultatens representativitet. Ytterligare en begränsning var att inte alla elever deltog vid samtliga interventionstillfällen. Det fanns också elever som inte var närvarande vid eftertesttillfället, vilket innebar att de fick genomföra testet vid ett senare tillfälle. Detta kan ha påverkat validiteten i deras resultat, då de fått mer bearbetningstid efter interventionen jämfört med de övriga eleverna.

Sammanfattningsvis visar dessa faktorer på de utmaningar som finns vid genomförande av interventionsstudier i skolmiljöer. Trots detta anser vi att studien ger värdefulla insikter om

hur undervisning med icke-standardiserade ekvationer kan bidra till relationell förståelse av likhetstecknet hos elever i årskurs 1.

6.3 Resultatdiskussion

Resultaten bekräftar tidigare studier som visat att elever i tidiga skolår ofta har en operationell förståelse av likhetstecknet (e.g. Kieran, 1981; Byrd m.fl., 2015), och att denna kan förändras genom riktad undervisning innehållande icke-standardiserade ekvationer (Carpenter m.fl., 2003; Powell, 2015). Detta ligger även i linje med Bråting och Madej (2017), som betonar att relationell förståelse för likhetstecknet är central för utvecklingen av elevers algebraiska tänkande.

I vår studie ser vi indikationer på att många elever efter undervisningsinterventionen nått milstolpe 3, beräkningsbalans, och i vissa fall även milstolpe 4, att jämföra uttryck. Denna progression kan även förstås genom procept-teorin, där elever som tidigare behandlat uttryck som enbart procedurer nu visar tecken på att se dem som matematiska objekt.

Resultaten visade en tydlig förbättring i elevernas prestationer efter undervisningen, och denna förbättring höll i sig även vid uppföljningstestet två veckor senare. Det innebär att elevernas förståelse inte bara förändrades tillfälligt, utan att förbättringen verkade vara varaktig. Detta stärker bilden av att undervisningen haft en verklig inverkan på elevernas förståelse för likhetstecknet.

Även på uppgiftsnivå visade resultaten tydliga förbättringar från för- till eftertest. De tre utvalda uppgifterna, 10, 18 och 19, är särskilt intressanta eftersom de är icke-standardiserade och öppna med två luckor, vilket gör dem mer lämpade för att synliggöra hur elever tolkar likhetstecknet. Till skillnad från standardiserade uppgifter – som ofta kan lösas korrekt även utifrån en operationell förståelse – kräver dessa uppgifter att eleverna uppmärksammar den matematiska relationen på båda sidor av likhetstecknet. McNemar-testerna, kompletterade med mid-p-justeringar, visade signifikanta förändringar på alla tre analyserade uppgifter. Detta indikerar att förbättringen på uppgifterna inte var slumpmässiga, vilket i sin tur stärker validiteten i slutsatsen att elevernas förståelse för likhetstecknet förbättrades till följd av undervisningsinterventionen.

Studien visar också hur undervisning med systematisk variation – där likhetstecknets placering varierades – möjliggjorde att eleverna kunde urskilja dess relationella funktion. Detta stärker variationsteorins relevans som ett pedagogiskt ramverk i tidig matematikundervisning (Marton m.fl., 2004; Runesson, 2017). Sammantaget bekräftar resultaten att det är möjligt att påverka elevers syn på likhetstecknet redan i årskurs 1, något som är i linje med Carpenter m.fl. (2003) och som visar potentialen i att arbeta med tidig algebra redan från tidiga skolår (Kieran m.fl., 2016).

6.3.1 Testinstrumentets möjligheter och begränsningar

Det finns en skillnad mellan undervisningsuppgifter som syftar till att *främja* relationell förståelse och testuppgifter som syftar till att *pröva* eller *mäta* relationell förståelse. Uppgifter som är effektiva i undervisningen – exempelvis genom att utmana elevers tänkande eller uppmuntra till reflektion – är inte nödvändigtvis lämpliga i ett testsammanhang. I undervisningen kan komplexitet bidra till lärande, men i en testsituation kan samma egenskap öka den kognitiva belastningen och därmed påverka elevers prestation negativt, oberoende av förståelsen. Testuppgifter behöver i högre grad vara tydliga, avgränsade och tolkningsbara på ett tillförlitligt sätt.

I efterhand ser vi en parallell till variationsteorins distinktion mellan avsett, iscensatt och erfaret lärandeobjekt (Marton m.fl., 2004; Runesson, 2017). Trots att testet utformades med utgångspunkt i undervisningens mål, blev det inte möjligt för eleverna att i testformatet erfara eller visa de kritiska aspekter som undervisningen syftade till att synliggöra. I likhet med vad Vermeulen (2017) lyfter kring läromedel, ställer även utformningen av testuppgifter krav på lärarens ämnesdidaktiska kompetens. Detta tydliggör hur avgörande lärarens didaktiska kompetens är – inte bara i undervisningen utan även vid testkonstruktionen

Analysen visade att det använda testinstrumentet i stort fungerade väl för att synliggöra elevernas operationella respektive relationella förståelse. Kombinationen av slutna *sant/falskt*-uppgifter, och öppna *fyll-i-luckan*-uppgifter gav en god grund för att identifiera om eleverna behandlat ekvationerna som processer eller objekt – vilket är centralt i procept-teorin, samt för att se var eleverna befann sig utifrån Carpenter m.fl.:s (2003) milstolpar. Testets utformning, där eleverna inte behövde skriva fritext, minskade läsmässiga hinder och möjliggjorde en mer tillförlitlig analys. Samtidigt finns det anledning att överväga kompletterande uppgiftstyper. Mer varierade testuppgifter – som i Tabell 20, där eleverna

exempelvis får omformulera standardiserade till icke-standardiserade ekvationer, eller definiera likhetstecknet med egna ord – har i tidigare forskning visat sig effektiva för att synliggöra elevers tolkningar av matematiska symboler (e.g. Carpenter m.fl., 2003; Madej, 2021a; Matthews & Fuchs, 2020) och skulle kunna förstärka testinstrumentets validitet ytterligare. Genom att manipulera ekvationer – exempelvis att skriva om 10 – 7 = 3 till 3 = 10 – 7, blir elever mer medvetna om likhetstecknets roll i att uttrycka ekvivalens, vilket stärker den relationella förståelsen (Carpenter m.fl., 2003: Powell, 2015). Sådana uppgifter kan därför med viss försiktighet, och förutsatt att de är förankrade i undervisningen, utgöra ett värdefullt komplement även i bedömningssituationer.

Tabell 20

Exempel på omformuleringsuppgifter

Gör om ekvationerna genom att flytta på likhetstecknet:

1	10 = 8 + 2 _____
2	10 - 7 = 3 _____

Samtidigt visade några uppgifter att en del felsvar sannolikt inte berodde på en bristande förståelse för likhetstecknet. I stället kan de förklaras av osäkerhet inför ovanliga uppgiftsformat, begränsad räknefärdighet eller svårighet att tolka symboler. I uppgift 8, som illustreras i Tabell 21, där en lucka föregår en subtraktion, berodde felsvaren inte nödvändigtvis på bristande förståelse för likhetstecknet. Brorsson (2012) menar att sådana uppgiftstyper kan vara mer krävande än andra subtraktionsuppgifter, vilket kan bidra till osäkerhet även för elever med relationell förståelse.

Tabell 21

Felsvar i uppgift 8

	Uppgift	Felsvar
8	_ - 8 = 2	6 - 8 = 2

I uppgift 15, som redovisas i Tabell 22, tyder de oförutsedda felsvaren på att eleverna tolkade det andra likhetstecknet som ett plustecken. Deras svar indikerar dock att de förstått att det ska vara balans, och att deras svar faktiskt tillsammans ger summan 10 efter det första likhetstecknet. Det tyder på att de har en relationell förståelse – men att de misstolkat symbolen. Detta kan, i linje med Norberg (2020), förstås som en konsekvens av att elever kan ha svårt att tolka matematiska symboler, snarare än som en bristande förståelse för likhetstecknets innebörd.

Tabell 22

Oförutsedda felsvar i uppgift 15

Uppgift		Oförutsedda felsvar
15	8 + 2 = _ = _	8 + 2 = 7 = 3
		8 + 2 = 3 = 7
		8 + 2 = 8 = 2
		8 + 2 = 9 = 1
		8 + 2 = 5 = 5

Powell (2015) betonar att uppgifter som denna, visserligen kan främja en relationell förståelse men att de också kan innebära en ökad kognitiv belastning. För att säkerställa en rättvis tolkning av elevsvaren bör uppgifter med komplex struktur prövas i undervisningssammanhang innan de används i tester – eller kompletteras med muntliga resonemang.

Sammantaget visade studien att det använda testinstrumentet gav värdefull information om elevernas förståelse, även om det inte fullt ut kunde fånga hela bredden av elevers matematiska tänkande. Även om testinstrumentet hade begränsningar när det gällde att entydigt mäta huruvida en elev hade operationell eller relationell förståelse, fungerade det väl i vår studie. Syftet var inte att fastställa varje elevs förståelseform, utan på en övergripande nivå undersöka hur icke-standardiserade ekvationer kan främja relationell förståelse. I detta sammanhang gav testinstrumentet tillräckligt underlag för att synliggöra tendenser och förändringar i elevernas strategier över tid. För framtida studier skulle en kombination av flera uppgiftstyper och bedömningsformer – där elevers resonemang får ta plats – kunna bidra till en mer heltäckande bild och förstärka analysens tillförlitlighet.

7 Slutsats

I avsnittet presenteras en sammanfattning av studiens resultat, följt av en diskussion om dess pedagogiska implikationer samt förslag till vidare forskning.

7.1 Sammanfattande resultat av studien

Studiens syfte var att undersöka hur användningen av icke-standardiserade ekvationer inom matematikundervisningen i årskurs 1, kan bidra till att utveckla elevers förståelse för likhetstecknets relationella betydelse. Resultaten för forskningsfrågan ”Hur förändras elevers förståelse för likhetstecknet i årskurs 1 vid undervisning med icke-standardiserade ekvationer?” visar att riktad undervisning med sådana ekvationer kan utveckla elevers relationella förståelse för likhetstecknet redan i årkurs 1.

Utifrån det intresse som väcktes under studiens gång gällande testinstrumentets funktion, kan det konstateras att det visade både möjligheter och begränsningar. Det fungerade i stor utsträckning ändamålsenligt för att synliggöra tendenser till operationell respektive relationell förståelse. Samtidigt tyder vissa återkommande mönster i elevernas svar på att testet i sin nuvarande form kan ge större utrymme för att uttrycka operationell förståelse. En större variation av icke-standardiserade, öppna uppgifter skulle därför kunna bidra till att elevers relationella förståelse framträder tydligare – utan att ställa orimliga krav på deras läsförmåga. Uppgifterna skulle även kunna kompletteras med muntliga resonemang för att ge en mer heltäckande bild av elevers förståelse.

Slutligen visar denna studie att undervisningen med icke-standardiserade ekvationer kan bidra till att utveckla relationell förståelse för likhetstecknet redan i årskurs 1. Genom att utmana elevernas befintliga tankemönster och skapa möjligheter till nya sätt att se på matematiska uttryck, kan undervisningen lägga en viktig grund för vidare arbete med algebra. Vår studie bekräftar tidigare forskning (e.g. Carpenter m.fl., 2003; Powell, 2015) som visar att undervisning med icke-standardiserade ekvationer kan bidra till att utveckla relationell förståelse. Genom att variera uppgiftstyper och bryta förväntade mönster i ekvationers struktur ges eleverna möjlighet att urskilja likhetstecknets relationella betydelse. Det innebär inte att standardiserade ekvationer bör uteslutas – tvärtom kan de spela en viktig roll i

undervisningen – men de behöver kompletteras med icke-standardiserade ekvationer för att skapa en balans mellan procedur och förståelse, vilket i sin tur kan leda till ett mer flexibelt matematiskt tänkande. Studien ger därmed ett bidrag till förståelsen av hur tidiga insatser i matematikundervisningen kan främja elevers långsiktiga lärande.

7.2 Pedagogiska implikationer

Studien ger stöd för att icke-standardiserade ekvationer bör vara en naturlig del av matematikundervisningen i de tidiga skolåren. Ekvationerna utmanar etablerade tankemönster och skapar möjligheter för elever att utveckla ett flexibelt och relationellt tänkande. Detta är särskilt relevant, då undervisningen i den svenska skolan ofta utgår från läromedel, som i sin tur oftast innehåller standardiserade ekvationer (Ellénius & Åhlander, 2024; Skolinspektionen, 2020), vilket riskerar att begränsa elevernas syn på likhetstecknet till en operationell förståelse (e.g. Carpenter m.fl., 2003; Kieran, 1981).

Detta är viktigt då det ingår i skolans uppdrag att förbereda elever för fortsatt arbete med algebra, något som kräver en grundläggande förståelse för likhetstecknets relationella betydelse. Enligt kursplanen ska elever i årskurs 4–6 kunna skriva och tolka ekvationer – något som förutsätter att de förstår likhetstecknet som en symbol för ekvivalens (Skolverket, 2022, 2024). Forskning har också visat att svårigheter med att tolka och använda matematiska symboler, såsom likhetstecknet, kan uppstå redan vid 7–8 års ålder, och att dessa hinder riskerar att påverka elevers självbild och långsiktiga relation till ämnet (Norberg, 2020). Våra resultat visar att detta arbete kan och bör påbörjas redan i årskurs 1, i linje med forskning om generaliserad aritmetik och tidig algebra (Bråting & Madej, 2017; Kieran m.fl., 2016). Forskning har visat att yngre elever har potential att utveckla både relationell förståelse och ett begynnande algebraiskt tänkande, förutsatt att undervisningen bygger vidare på deras tidigare kunskaper och gradvis introducerar mer avancerade idéer (Leavy m.fl., 2013). Att påbörja detta arbete tidigt kan minska risken att elever fastnar i operationella mönster som senare är svåra att bryta (Byrd m.fl., 2015; Madej, 2021a).

Utöver det visar resultaten att elevernas variation i lösningar ökade, vilket talar för att de inte bara memorerade rätt svar – utan också började förstå ekvationers struktur. Det tyder på att undervisningen främjat kognitiv flexibilitet, vilket är en nyckel till att elever ska kunna utveckla en långsiktig matematisk förståelse. Studien stödjer forskning som visar att läraren

aktivt behöver synliggöra det algebraiska i uppgifter som annars riskerar att reduceras till ren aritmetik (Helenius & Ahl, 2024; Vermeulen & Meyer, 2017). För att stödja en sådan undervisning behöver läraren inte genomföra omfattande förändringar av sin undervisning. Att regelbundet använda icke-standardiserade ekvationer, exempelvis i genomgångar eller som komplement till läromedel, kan vara ett enkelt men effektivt sätt att utmana elevers tänkande och främja relationell förståelse – särskilt i undervisningsmiljöer där läromedel främst innehåller standardiserade ekvationer.

7.3 Förslag till vidare forskning

Det vore intressant att genomföra en interventionsstudie där en större mängd slumpmässigt utvalda elever får arbeta kontinuerligt med en kombination av standardiserade och icke-standardiserade ekvationer under en längre period. Powell (2015) betonar vikten av att kombinera olika uppgiftstyper för att både stötta och utmana elevers förståelse. För att ytterligare stärka framtida studiers tillförlitlighet och generaliserbarhet vore det önskvärt att inkludera kontrollgrupp och att deltagarna fördelas slumpmässigt mellan grupperna. Ett sådant upplägg skulle möjliggöra tydligare slutsatser om undervisningens eventuella effekter. Att dessutom följa eleverna över tid för att undersöka om effekterna kvarstår i årskurs 2 eller 3, samt att studera hur olika lärare praktiskt implementerar denna typ av undervisning – skulle kunna ge fördjupad kunskap om hur en mer långsiktig undervisning faktiskt påverkar elevernas förståelse.

Det vore också intressant att undersöka om undervisning som syftar till att stärka elevers relationella förståelse för likhetstecknet får positiva effekter inom algebra även i högre årskurser. Knuth m.fl. (2008) betonar vikten av kontinuerligt arbete med likhetstecknets betydelse även på mellanstadiet, och Kieran (1981) visar att operationell förståelse kan kvarstå ända upp på högskolenivå. Den senaste PISA-undersökningen visar dessutom att svenska elevers resultat i matematik har försämrats (Skolverket, 2023), vilket aktualiserar behovet av att stärka elevers förståelse av centrala matematiska begrepp tidigt i utbildningen. En långsiktig studie som följer elever från lågstadiet upp i högre årskurser skulle därför kunna ge viktig kunskap om hur tidiga undervisningsinsatser påverkar elevers framtida matematiska utveckling.

Referenser

Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Murphy Gardiner, A., Isler, I. & Kim, J.-S. (2015). The development of children's algebraic thinking: The impact of a comprehensive early algebra intervention in third grade. *Journal for research in mathematics education, 46*(1), 39-87. https://www.jstor.org/stable/10.5951/jresematheduc.46.1.0039

Brorsson, Å. (2012). Algebra för lågstadiet. *Nämnaren, 2012(3)*, 3–7. https://ncm.gu.se/wp-content/uploads/2020/07/0307_12_3.pdf

Bråting, K., & Madej, L. (2017). Generaliserad aritmetik – en bro mellan aritmetik och algebra. *Nämnaren, 2017(4)*, 3–8. https://ncm.gu.se/pdf/namnaren/0308_17_4.pdf

Byrd, C. E., McNeil, N. M., Chesney, D. L., & Matthews, P. G. (2015). A specific misconception of the equal sign acts as a barrier to children's learning of early algebra. *Learning and Individual Differences, 38*, 61-67. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2015.01.001

Carpenter, T. P., Frank, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic & algebra in elementary school.* Heinemann.

Denscombe, M. (2018). *Forskningshandboken: för småskaliga forskningsprojekt inom samhällsvetenskaperna* (4 uppl.). Studentlitteratur.

Ellénius, J., & Åhlander, T. (2024). *Matematikböckers framställning av likhetstecknet: En läromedelsanalys som undersöker hur läroböcker riktade till årskurs 1 ger utrymme för olika skildringar av likhetstecknet* [Examensarbete, Karlstads universitet]. DIVA. https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:1875528/FULLTEXT01.pdf

Gray, E. M., & Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: A "proceptual" view of simple arithmetic. *Journal for research in mathematics education, 25*(2), 116-140. https://www-jstor-org.bibproxy.kau.se/stable/pdf/749505.pdf?refreqid=fastly-default%3A5b2d81ce47148719aa0a5fcf92c65076&ab_segments=&initiator=&acceptTC=1

Helenius, O., & Ahl, L. M. (2024). *Läromedel på villovägar? En analys av den bristande vetenskapliga grunden för dagens svenska läromedel i matematik.* Näringslivets skolform. https://www.svensktnaringsliv.se/bilder_och_dokument/rapporter/66cl7j_rapport-laromedel-pa-villovagar_webb241113pdf_1223707.html/Rapport+La%25CC%2588romedel+pa%25CC%258A+villova%25CC%2588gar_webb241113.pdf

Häggström, J., Kilhamn, C., & Fredriksson, M. (2019). *Algebra i grundskolan.* NCM.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? I J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (red.), *Algebra in the early grades* (ss. 5-17). Lawrence Erlbaum Associates/Taylor & Francis group.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational studies in mathematics, 12*, 317-326. https://www-jstor-org.bibproxy.kau.se/stable/3482333?seq=1

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D. & Ng, S. F. (2016). *Early algebra: research into its nature, its learning, its teaching*. Springer International Publishing.

Kiselman, C. O., & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan*. NCM. https://www.su.se/polopoly_fs/1.533588.1608307238%21/menu/standard/file/termer12.pdf

Knuth, E., Alibali, M., Hattikudur, S., McNeil, N M., & Stephens, A. (2008). The importance of equal sign understanding in the middle grades. *Mathematics teaching in the middle school, 13*(9), 514-519. https://psych.wisc.edu/alibali/home/Publications_files/Knuth_etal_MTMS_2008.pdf

Leavy, A., Hourigan, M., & McMahon, Á. (2013). Early Understanding of Equality. *Teaching Children Mathematics, 20*(4), 246-252. https://www-jstor-org.bibproxy.kau.se/stable/pdf/10.5951/teacchilmath.20.4.0246.pdf?refreqid=fastly-default%3Ad49e1b32d81edad22ac85bcadbb75484&ab_segments=&initiator=&acceptTC=1

Löwing, M. (2017), *Grundläggande aritmetik: Matematikdidaktik för lärare* (2 uppl.). Studentlitteratur.

Madej, L. (2021a). Primary school students' knowledge of the equal sign – The Swedish case. *International Journal of Science and Mathematics Education, 20*, 321–343. https://doi.org/10.1007/s10763-020-10144-z

Madej, L. (2021b). *X – men sen då? Algebrans stora idéer från första klass till högre matematik: Med fokus på tidig algebra i Sverige* [Doktorsavhandling, Uppsala universitet]. https://uu.diva-portal.org/smash/get/diva2:1503354/FULLTEXT01.pdf

Marton, F., Runesson, U., & Tsui, A. (2004). The space of learning. I I. F. Marton & A. Tsui (Red.), *Classroom discourse and the space of learning* (ss. 3-40). Lawrence Erlbaum.

Matthews, P. G., & Fuchs, L. S. (2020). Keys to the gate? Equal sign knowledge at second grade predicts fourth-grade algebra competence. *Child Development, 91*(1), 14–28. https://doi.org/10.1111/cdev.13144

Norberg, M. (2020). *Från design till meningsskapande - En multimodal studie om elevers arbete med matematiklärböcker i årskurs 1* [Doktorsavhandling]. Mittuniversitetet, Sundsvall. https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:1427593/FULLTEXT01.pdf

Powell, S. R. (2012). Equations and the equal sign in elementary mathematics textbooks. *The Elementary School Journal, 112*(4), 627-648. https://www-jstor-org.bibproxy.kau.se/stable/pdf/10.1086/665009.pdf?refreqid=fastly-default%3A24549e68dad031ba7b3d935d024eb8b2&ab_segments=&initiator=&acceptTC=1

Powell, S. R. (2015). The influence of symbols and equations on understanding mathematical equivalence. *Intervention in school and clinic, 50*(5), 266–272. https://journals-sagepub-com.bibproxy.kau.se/doi/pdf/10.1177/1053451214560891

Powell, S. R., & Fuchs, L. S. (2010). Contribution of equal-sign instruction beyond word-problem tutoring for third-grade students with mathematics difficulty. *Journal of educational psychology, 102*(2), 381-394. https://psycnet.apa.org/record/2010-08635-009

Runesson, U. (2017). Variationsteori som redskap för att analysera lärande och designa undervisning. I I. Carlgren (Red.). *Undervisningsutvecklande forskning, exemplet Learning study* (ss. 45–60). Gleerups.

SFS 2010:800. *Skollag.* https://www.riksdagen.se/sv/dokument-och-lagar/dokument/svensk-forfattningssamling/skollag-2010800_sfs-2010-800/

Skolinspektionen. (2020). *Matematikundervisningen i årkurserna 4–6: Interaktion i klassrummet.* https://www.skolinspektionen.se/globalassets/02-beslut-rapporter-stat/granskningsrapporter/tkg/2020/matematik/matematikundervisningen-4-6.pdf

Skolverket. (2022). *Kommentarmaterial till kursplanen i matematik: Grundskolan.* https://www.skolverket.se/getFile?file=9790

Skolverket. (2023). *PISA 2022: 15-åringars kunskaper i matematik, läsförståelse och naturvetenskap.* https://www.skolverket.se/getFile?file=12177

Skolverket. (2024). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet: Lgr22: Reviderad 2024* (2 uppl.). https://www.skolverket.se/getFile?file=13074

Vermeulen, C., & Meyer, B. (2017). The Equal Sign: Teachers' Knowledge and Students' Misconceptions. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education. 21*(2), 136–147. https://www.tandfonline.com/doi/pdf/10.1080/18117295.2017.1321343

Vetenskapsrådet. (2024). *God forskningssed 2024*. https://www.vr.se/analys/rapporter/vara-rapporter/2024-10-02-god-forskningssed-2024.html

Bilaga 1

Likhetstecknet

Del 1:

Ringa in sant, falskt eller vet inte

8 = 8	sant	falskt	vet inte
6 = 6 + 2	sant	falskt	vet inte
2 + 4 = 3 + 3	sant	falskt	vet inte

Del 2:

Fyll i de tomma luckorna

7 + ___ = 10

8 = 5 + ___

___ = 4

2 + ___ = 5 + ___

3 + 5 = ___ + 2

3 + 4 = ___

___ + 5 = 2 + 4

Bilaga 2

Likhetstecknet

Del l : Ringa in sant, falskt eller vet inte

1.	8 = 8	sant	falskt	vet inte
2.	6 = 6 + 6	sant	falskt	vet inte
3.	4 + 6 = 12 - 2	sant	falskt	vet inte
4.	2 + 3 = 5 - l	sant	falskt	vet inte

Del 2 : Fyll i de tomma luckorna

5. 3 + 4 = ___

6. 7 + ___ = l0

7. 9 - ___ = 9

8. ___ - 8 = 2

9. 4 + 6 = ___ + 3

10. 5 + ___ = 2 + ___

11. l0 = ___ - l

12. ___ = 7 + 5

13. 3 + 5 = ___ + 2

14. 9 - 5 = ___ + 4

15. 8 + 2 = ___ = ___

16. 8 = ___ + 5

17. ___ + 5 = 2 + 4

18. 2 + ___ = 6 - ___

19. 8 - ___ = ___ + 3

20. l0 = ___ + l = l2 - 2

Bilaga 3

Rättningsmall: Operationell, processinriktad förståelse.

Uppgift		Svar	Uppgift		Svar
1	8 = 8	Falskt	**11**	10 = _ - 1	10 = 9 - 1
2	6 = 6 + 6	Sant	**12**	_ = 7 + 5	12 = 7 + 5
3	4 + 6 = 12 - 2	Falskt	**13**	3 + 5 = _ + 2	3 + 5 = 8 + 2 3 + 5 = 10 + 2
4	2 + 3 = 5 - 1	Sant	**14**	9 - 5 = _ + 4	9 - 5 = 4 + 4 9 – 5 = 8 + 4
5	3 + 4 = _	3 + 4 = 7	**15**	8 + 2 = _ = _	8 + 2 = 10 = _ 8 + 2 = _ = 10
6	7 + _ = 10	7 + 3 = 10	**16**	8 = _ + 5	8 = 13 + 5 8 = 3 + 5
7	9 - _ = 9	9 - 0 = 9	**17**	_ + 5 = 2 + 4	11 + 5 = 2 + 4
8	_ - 8 = 2	6 - 8 = 2	**18**	2 + _ = 6 - _	2 + 4 = 6 - _ *
9	4 + 6 = _ + 3	4 + 6 = 10 + 3 4 + 6 = 13 + 3	**19**	8 - _ = _ + 3	*
10	5 + _ = 2 + _	*	**20**	10 = _ + 1 = 12 - 2	10 = 11 + 1 = 12 - 2

*Dessa uppgifter kan ge en oändlig mängd felsvar, därför presenteras inget här.

Tecken på operationell, processinriktad förståelse:

- Adderar alla tal i ekvationen utan att ta hänsyn till båda sidor om likhetstecknet, exempelvis om eleven svarar 7 i uppgiften 3 + 3 = _ + 1.
- Fokuserat enbart på vänster sida och behandlar likhetstecknet som en signal för beräkning, exempelvis om elever svarar 6 i uppgiften 3 + 3 = _ + 1.

Rättningsmall: Relationell, proceptuell förståelse.

Uppgift		Svar	Uppgift		Svar
1	8 = 8	Sant	**11**	10 = _ - 1	10 = 11 - 1
2	6 = 6 + 6	Falskt	**12**	_ = 7 + 5	12 = 7 + 5
3	4 + 6 = 12 - 2	Sant	**13**	3 + 5 = _ + 2	3 + 5 = 6 + 2
4	2 + 3 = 5 - 1	Falskt	**14**	9 - 5 = _ + 4	9 - 5 = 0 + 4
5	3 + 4 = _	3 + 4 = 7	**15**	8 + 2 = _ = _	8 + 2 = 10 = 10
6	7 + _ = 10	7 + 3 = 10	**16**	8 = _ + 5	8 = 3 + 5
7	9 - _ = 9	9 - 0 = 9	**17**	_ + 5 = 2 + 4	1+ 5 = 2 + 4
8	_ - 8 = 2	10 - 8 = 2	**18**	2 + _ = 6 - _	2 + 0 = 6 – 4 2 + 1 = 6 - 3 2 + 2 = 6 – 2 2 + 3 = 6 – 1 2 + 4 = 6 - 0
9	4 + 6 = _ + 3	4 + 6 = 7 + 3	**19**	8 - _ = _ + 3	8 - 0 = 5 + 3 8 - 1 = 4 + 3 8 - 2 = 3 + 3 8 - 3 = 2 + 3 8 - 4 = 1 + 3 8 - 5 = 0 + 3
10	5 + _ = 2 + _	5 + 0 = 2 + 3 5 + 1 = 2 + 3 5 + 2 = 2 + 5 5 + 3 = 2 + 6 5 + 4 = 2 + 7 5 + 5 = 2 + 8 5 + 6 = 2 + 9 5 + 7 = 2 + 10	**20**	10 = _ + 1 = 12 - 2	10 = 9 + 1 = 12 - 2

Tecken på relationell, proceptuell förståelse:

- Eleven förstår att likhetstecknet symboliserar en relation mellan två lika stora uttryck, och räknar ut båda sidor för att säkerställa balans mellan dem.
- Eleven visar förståelse för likhetstecknet som ekvivalens genom att jämföra uttryck utan att räkna ut dem.

Bilaga 4

Pedagogisk planering: Likhetstecknet

	1b	1a	Halvklass 1a + 1b
lektion 1	måndag 10.10-10.50	tisdag 10.10-10.50	
lektion 2	måndag 12-12.30	tisdag 12-12.30	
lektion 3			tisdag 12.30-14.00
lektion 3			onsdag 12.30-14.00
lektion 4	fredag 8.20-9.50		

Lektion 1: Introduktion av likhetstecknet (40 min)

Vad betyder likhetstecknet?

- Fråga till elever. Låt dem prata med bänkkompisen och lyft sedan några tankar i helklass

Förklara likhetstecknet

- "Likhetstecknet (=) betyder att det som står på båda sidor om det är lika mycket. Det är som en balansvåg – om vi har lika mycket på båda sidor är det rättvist och balanserat."

Visa konkreta och abstrakta exempel

- Utgå från icke-standardiserade ekvationer, sant/falskt, addition och subtraktion, eleverna skriver på White boards samt diskuterar i par.
- Börja med konkret och avsluta med abstrakt:
  Konkret: Elever representerar tal, mellan sig håller de skyltar med symbolerna: = + -
  Semiabstrakt: Bollar på tavlan
  Abstrakt: Tal

Transformation av ekvationer

- Gör om standardekvationen till en icke-standardiserad ekvation genom att flytta likhetstecknet 7 + 3 = 10.

Lektion 2: Arbetsblad (30 min)
Inledning • Repetition: Vad betyder likhetstecknet? • Muntliga sant/falskt uppgifter: Vi visar ekvationer på tavlan och eleverna svarar med tumme upp/ner och några elever får motivera sina svar. **Undervisningsuppgifter/arbetsblad** • Alla elever får varsitt arbetsblad • De inledande uppgifterna görs i helklass • Det fortsatta arbetet sker parvis **Avslutning** • En exempeluppgift på tavlan, eleverna löser uppgiften parvis, några lösningar diskuteras i helklass.

Lektion 3: (90 min)
Inledning • Repetition: Vad betyder likhetstecknet? • Muntliga sant/falskt uppgifter: Vi visar ekvationer på tavlan och eleverna svarar med tumme upp/ner och några elever får motivera sina svar. • Konkreta och abstrakta exempel: elever, tal **Undervisningsuppgifter/arbetsblad** • Det fortsatta arbetet sker parvis **Kort paus följt av repetition** **Undervisningsuppgifter/arbetsblad** • Valfritt att samarbeta **Avslutning** • Exempeluppgifter på tavlan, eleverna löser uppgifterna parvis, några lösningar diskuteras i helklass.

Lektion 4: (90 min)
Inledning • Repetition: Vad betyder likhetstecknet? • Abstrakta exempel, tal: __ - 7 = 3 10 = __ - 1 9 = __ + 2 = 10 - 1 **Undervisningsuppgifter/arbetsblad** • Vi gör några uppgifter tillsammans på tavlan, eleverna sitter i par och svarar på White board. **Paus** **Eftertest**

Bilaga 5

Undervisningsuppgifter/arbetsblad - Likhetstecknet

Del 1: Ringa in sant eller falskt

3 = 3	sant	falskt
5 - 2 = 2 + 2	sant	falskt
8 + 2 = 6 + 4	sant	falskt
7 + 3 = 10 - 3	sant	falskt

Del 2: Fyll i de tomma luckorna

6 + 4 = __	12 = __ + __
8 + __ = 11	__ - __ = 10
7 - __ = 4	8 = __ + 2 = 10 - 2
3 + __ = 4 + __	__ + 5 = 10 - __
4 + __ = 8 - __	5 + 5 = 10 - __
__ + 4 = 7 - 2	10 = 9 + __ = __ + 8

Del 3: Gör om ekvationen genom att flytta på likhetstecknet

5 + 7 = 12 _____ 10 = 8 - 2 _____

Del 1: Ringa in sant eller falskt

10 = 5 + 5 = 20	sant	falskt
8 + 2 = 6 + 4 = 5 + 5	sant	falskt
12 - 4 = 10 - 2	sant	falskt
3 + 3 = 10 - 4	sant	falskt

Del 2: Fyll i de tomma luckorna

4 + 5 = __ + 3	10 - __ = __ + 8
10 - __ = 10	9 = __ - 1
12 - __ = __ + 11	10 = 9 + 1 = 12 - __
__ - 5 = 4	3 + __ = 10
11 = 3 + 8 = __	1 + __ + 1 = 4 - __ = 3
6 + 4 = __ + 5	__ - 0 = 0

Del 3: Gör om ekvationen genom att flytta på likhetstecknet

10 = 3 + 7 _____ 6 + 6 = 12 _____

Del 1: Ringa in sant eller falskt

5 = 8 - 3	sant	falskt
12 = 12	sant	falskt
3 + 7 = 10 - 1	sant	falskt
5 - 0 = 5 + 0	sant	falskt

Del 2: Fyll i de tomma luckorna

4 + 3 = __

__ - 3 = 9 + __ = 9

10 - __ = __ - 10

7 + __ = 10 + __

__ - 3 = 7 + __ = 7

8 + __ = 10

11 + __ = 12 - 1

8 + __ + 1 = 8 + __ = 12

3 = 7 - __

6 + __ = __ + 12

__ + 9 = __+ 2

__ + __ = 7 - 1

Del 3: Gör om ekvationen genom att flytta på likhetstecknet

8 + 3 + 1 = 12 _____

10 = 9 + 3 - 2 _____

Del 1: Ringa in sant eller falskt

1 + 3 = 4 + 1	sant	falskt
7 - 3 = 4 + 0	sant	falskt
6 = 12 - 5	sant	falskt
8 - 5 = 1 + 2	sant	falskt

Del 2: Fyll i de tomma luckorna

7 - __ = 3

__ + __ + 3 = 5 + 1

__ - 7 = 4 + 1

5 = __

__ - 1 = 3 + 1

6 + __ = 11 + 1

__ + __ + 2 = 6 + __

11 - 7 = __ + 2

__ - 6 + 0 = 6

3 - __ + 0 = 2 + 1

__ + 3 = __ + 9 + 1

12 - __ = 9 - 1

Del 3: Gör om ekvationen genom att flytta på likhetstecknet

9 = 2 + 7 _____

2 + 8 = 10 _____

Del 1: Ringa in sant eller falskt

12 - 4 = 8 - 1	sant	falskt
3 = 7 - 5	sant	falskt
6 + 5 = 12 - 1	sant	falskt
1 + 2 + 3 = 4	sant	falskt

Del 2: Fyll i de tomma luckorna

__ + 3 + 7 = 11 - 1	4 + 4 = 12 - __
12 = __	__ - 5 - 3 = 3 + 0
5 = 5 + __	8 = __ + 3
9 - __ = 1 + 3	__ + 2 = 11 - 1
__ + __ = 7 - 5	__ + __ + __ = 12 - 2
6 + 5 = __ - 1	7 = __ - 3

Del 3: Gör om ekvationen genom att flytta på likhetstecknet

5 + 6 = 11 _____ 11 = 3 + 8 _____

Del 1: Ringa in sant eller falskt

4 + 6 = 11 - 1	sant	falskt
5 + 5 = 3 + 7	sant	falskt
10 = 9 + 1	sant	falskt
12 - 12 = 1	sant	falskt

Del 2: Fyll i de tomma luckorna

__ + 7 = 12 - 2

3 - __ = 12 - 10

9 = __ + 4

6 + 6 = 12 - __

12 - 1 - 1 = 8 + __ + __

8 = 7 + 1 = 6 + __

10 = __

5 + __ = 11 - 1

7 + 2 = __ - 1

5 = __ + 1

9 - 2 = __ + __

4 - 2 = __ + 3

Del 3: Gör om ekvationen genom att flytta på likhetstecknet

10 - 9 = 1 _____

5 + 7 = 12 _____

Bilaga 6

Informationsbrev till vårdnadshavare angående studien: Från operationell till relationell förståelse - en interventionsstudie som undersöker hur icke-standardiserade ekvationer påverkar elevernas förståelse för likhetstecknets innebörd.

Hej!

Vi vill informera er om en forskningsstudie som kommer att genomföras i ert barns klass. Studien handlar om elevers förståelse av likhetstecknets innebörd och genomförs av Susanne Backman och Sandra Cillerwall vid Karlstad universitet, som en del av vårt examensarbete. Detta informationsbrev riktar sig till dig som vårdnadshavare och ditt barn kommer att informeras muntligt i skolan.

Syfte med studien

Syftet med studien är att undersöka hur elever i årskurs 1 förstår likhetstecknet och hur olika undervisningsmetoder kan stödja deras lärande. Forskning visar att en djupare förståelse av likhetstecknet är viktig för elevers fortsatta matematikutveckling.

Hur går studien till?

I studien får eleverna undervisning med fokus på likhetstecknet, vilket syftar till att stärka deras förståelse av matematiska samband och bidra till deras utveckling i matematik. Under en veckas tid genomförs undervisningen som en naturlig del av matematiklektionen och följer skolans läroplan. För att undersöka hur elevernas förståelse utvecklas får de genomföra ett matematiktest vid tre olika tillfällen. Testet innehåller enkla uppgifter där eleverna fyller i ett svar eller avgör om en uppgift är sann eller falsk. Testet påverkar inte elevernas betyg eller bedömning i skolan, utan används enbart för forskningsändamål, vilket vi tydligt informerar eleverna om.

Frivillighet och möjlighet att avbryta

Deltagandet i studien är helt frivilligt. Om ni inte vill att ert barn ska delta, kan ni när som helst meddela oss detta utan att behöva ange någon anledning. Att avstå från deltagande påverkar inte ert barns undervisning på något sätt. Ni kan även när som helst avbryta ert barns deltagande under studiens gång utan konsekvenser.

Hantering av data och anonymitet

All insamlad information hanteras i enlighet med gällande forskningsetiska riktlinjer och dataskyddslagstiftning (GDPR). Vi samlar endast in elevers testresultat samt namn, enbart för att kunna koppla rätt test till rätt elev under studiens gång. Dessa uppgifter raderas efter analysen, och

inga personnummer eller andra direkt identifierande uppgifter registreras. Ingen information om elevernas namn, lärarens namn, skolans namn eller stad kommer att publiceras i den färdiga studien eller på något annat sätt göras offentlig.

Den insamlade datan utgörs både av pappersbaserade tester och digital information om resultat. Pappersbaserade tester förvaras i ett låst skåp som endast vi studenter har tillgång till, medan digital information om resultaten lagras på lösenordskyddade datorer med uppdaterade antivirusprogram och aktiverad brandvägg för att förhindra obehörig åtkomst. Ingen information som kan knytas till enskilda individer kommer att delas med någon utomstående. När studien är avslutad och examensarbetet har godkänts kommer allt material att förstöras, där fysiska dokument strimlas med en dokumentförstörare och digitala filer raderas på ett säkert sätt.

Ansvarig för studien:

Handledare: David Taub, universitetsadjunkt.
david.taub@kau.se
054-700 23 13
Universitetsgatan 2, 651 88 Karlstad

Om ni har några frågor eller vill veta mer om studien, är ni välkomna att kontakta oss:

Susanne Backman
susaback06@kau.student.se

Sandra Cillerwall
sandcill100@kau.student.se

Fyll gärna i den bifogade samtyckesblanketten och återlämna till skolan, oavsett om ni väljer att delta eller inte. **Sista svarsdatum torsdag 20/3**.

Tack för er tid och ert stöd!

Vänliga hälsningar,
Susanne och Sandra

Bilaga 7

Samtycke till att delta i studien: Från operationell till relationell förståelse - en interventionsstudie som undersöker hur icke-standardiserade ekvationer påverkar elevernas förståelse för likhetstecknets innebörd.

☐ Jag har skriftligen fått information om studien och fått möjlighet att ställa frågor. Jag får behålla den skriftliga informationen.

☐ Jag samtycker till att jag/mitt barn deltar i studien om elevers förståelse av likhetstecknets innebörd, genomförd av Susanne Backman och Sandra Cillerwall

☐ Jag samtycker till att uppgifter om mig/mitt barn behandlas på det sätt som beskrivs i informationsbrevet till vårdnadshavare.

Jag vill **inte** delta i studien.

Elevens namn
Underskrift av elev
Underskrift av vårdnadshavare
Namnförtydligande av vårdnadshavare
Ort och datum