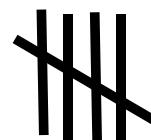
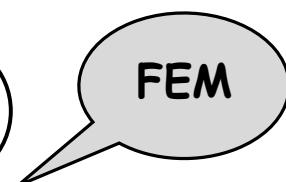
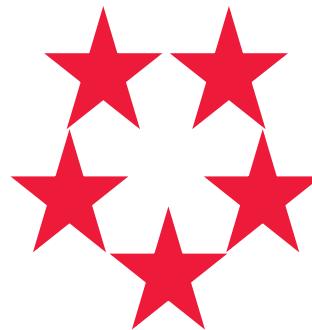
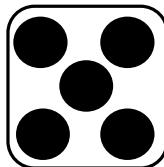


MARIA ALKHEDE

ARITMETIK I FÖRSKOLAN

- en studie av taluppfattningens betydelse
för matematikundervisningen



MALMÖ
UNIVERSITET

ARITMETIK I FÖRSKOLAN
- en studie av taluppfattningens betydelse
för matematikundervisningen

Malmö Studies in Educational Sciences:
Licentiate Dissertation Series 2021:44

© Copyright Maria Alkhede 2021
Illustratör Maria Alkhede
ISBN 978-91-7877-184-4 (tryckt)
ISBN 978-91-7877-185-1 (pdf)
ISBN 1653–6037
DOI 10.24834/isbn.9789178771851
Tryck: Holmbergs, Malmö 2021

MARIA ALKHEDE

ARITMETIK I FÖRSKOLAN

- en studie av taluppfattningens betydelse
för matematikundervisningen

Malmö universitet, 2021
Lärande och Samhälle
Institutionen för Barn-Unga-Samhälle



Licentiatuppsatsen är en del av den nationella forskarskolan i kommunikation och relationer som grundläggande för förskolebarns lärande (FoRFa), finansierad av Vetenskapsrådet (nr. 729-2013-6848)

Publikationen finns även elektroniskt, se muet.mau.se

INNEHÅLL

ABSTRACT	9
FÖRORD	11
UPPSATSENS ARTIKLAR	13
1. INLEDNING	14
Bakgrund	14
Syfte och frågeställningar	17
Kappans disposition	18
2. MATEMATIK SOM KUNSKAPSOMRÅDE I FÖRSKOLAN	19
Förskolans framväxt och förändrade uppdrag	19
Förskolans didaktik	20
Matematik som kunskapsområde	23
3. FÖRSKOLLÄRARNAS MATEMATIK-DIDAKTISKA KUNSKAPER	27
Förskollärares förändrade uppdrag	27
Kunskap för undervisning	28
MKT - Matematisk kunskap för undervisning	29
4. ARITMETIK – TALUPPFATTNING	31
Aritmetik	31
Taluppfattning	32
Tidig taluppfattning	35
Talrepresentationer	36
Nominaltal – tal som namn – räkneord	37
Ordinaltal – tal som ordning	39
Kardinaltal - tal som antal	40
Talrelationer	42
Symboler för tal och platsvärden	43

5. TEORETISKA UTGÅNGSPUNKTER	45
Variationsteori	46
Lärandeobjekt	48
Kritiska aspekter	50
Variationsmönster.....	54
Variationsteori och matematiken	55
Chi's taxonomi om aktiviteter.....	57
6. METOD.....	59
Urval och deltagare.....	60
Datainsamling	62
Genomförande	64
Lärarträffar	64
Videoinspelning	67
Analysmodell	68
Kvalitet i forskning.....	70
Forskarrollen	73
7. RESULTAT	75
Artikel 1	76
Artikel 2	80
Syntes	84
8. DISKUSSION	88
Hantera innehållet i aktiviteter	89
Uttrycka innehållet i undervisningen	90
Förutsättningar för utveckling av aritmetiska färdigheter..	91
Att organisera för matematiklärande.....	92
Metoddiskussion	93
Fortsatt forskning	94
ENGLISH SUMMARY	96
Introduction	96
Aim and research questions	98
Theoretical framework	100
The theory of variation	100
Chi's taxonomy about activities	101
Methodological frame	103
Results	107
Discussion and Conclusion.....	109

REFERENSLISTA	112
BILAGOR.....	125

ABSTRACT

Titel: Aritmetik i förskolan – en studie av taluppfattningens betydelse för matematikundervisningen.

Författare: Maria Alkhede

Språk: Svenska med engelsk sammanfattning.

Keywords: Aritmetik, taluppfattning, förskollärare, förskoledidaktik, undervisning, lärande, variationsteori.

Kunskapsområdet matematik blir alltmer fokuserat även i förskolan, med mål av vilket kunnande barnen förväntas utveckla. Därav finns det behov av att förstå vad barn faktiskt erbjuds lära och vad de utvecklar för förmågor innan de börjar skolan. Studiens övergripande syfte är att beskriva på vilket sätt förskollärare utvecklar och iscensätter aktiviteter om tal och räknande, och vilket kunnande som blir möjligt för barnen att utveckla. Studien har fokuserat på förskollärarnas lärande samt iscensättande av aktiviteter med matematiskt innehåll (aritmetik, taluppfattning och räknefärdigheter). Den första delstudien beskriver

processen kring förskollärares kollektiva lärande. Genom att reflektera och diskutera egna dokumentationer utvecklas de i sin profession avseende lärandet av tal och räknande i aktiviteter med barn. Den andra delstudien beskriver hur förskollärare planerar och iscensätter en aktivitet med fokus tal och räknande, och hur detta påverkade barnens möjligheter till lärande. Studien utgår från ett variationsteoriskt perspektiv (Marton, 2015) samt Chi's (2009) taxonomi, avseende i vilken form aktiviteterna iscensätts (aktiv - konstruktiv - interaktiv). Studiens resultat visar att förskollärarnas lärande om ämnesinnehåll är en komplex process, där förskollärarnas delade erfarenheter gör det möjligt för dem att över tid urskilja nya aspekter av tal och räknande och därmed också hantera innehållet i aktiviteter på ett förändrat sätt. Studiens resultat visar även skillnader mellan hur lärarna valde att iscensätta aktiviteterna och att detta resulterade i olika möjligheter för barnen att lära.

FÖRORD

Jag har i hela mitt liv, i vardagen, under skoltiden och som lärade haft ett gott förhållande till matematik. För mig är matematiken oumbärlig och vacker, ett redskap för att förstå och hantera omvärlden. Under åren som passerat har jag dock mött människor som tycker det rakt motsatta. De uttrycker att matematiken är tråkig, oanvändbar och att de är okunniga inom området. Detta säger de samtidigt som de dagligen, i arbetet och i vardagen i högsta grad använder sig av matematik i någon form. Den del av matematiken som här verkar vara orsak till de uttryckta bekymren, handlar om tal ochräknande, räknestrategier och räknelagar, vilket benämns aritmetik. Genom den här studien har fått möjlighet att fördjupa mig i komplexiteten av att lära och utveckla aritmetiska förmågor. Min förhoppning är att studien ska visa på den komplexitet som ligger bakom det som ibland kan uppfattas som självklarheter i aritmetiska sammanhang, exempelvis förståelse för tals innebörd. Stort TACK till alla som gjort det möjligt, att jag här mycket stolt kan呈现出 en färdigställd licentiatuppsats. Innehållet i uppsatsen grundar sig i 40-års lärarfarenhet som tillsammans med studier i pedagogik, matematik och matematikdidaktik i en forskarutbildning resulterat i fintlig text.

De första jag vill rikta mig till är alla förskolebarn och förskollärare, tack för att ni välkommade mig in till era verksamheter och möjliggjorde denna studie. Jag vill även nämna några personer som direkt haft inverkan, både på uppsatsens riktning och innehåll: Göte Dahland (matematiklärare Majornas gymnasium), Bengt Johansson, Göran & Lillemor Emanuelsson (Nationellt Centrum för Matematikutbildning), Jonas Emanuelsson (handledare kandidat- och magisteruppsats samt prefekt GU/IDPP), Ulla Mauritzson (prefekt GU/IPKL), Ingrid Pramling Samuelsson och Niklas Pramling (initiativtagare och sammordnare forskarskolan FoRFa), FASETT ♥, Mona Holmqvist och Camilla Björklund (mästarna bland handledare), Hanna Palmér (diskutant slutseminariet) samt Ann-Charlotte Lindgren och Kristina Thorshag (de allra bästa av kollegor och forskarstudiekompisar). Självklart finns det ytterligare personer, som under resans gång haft inflytande på och format den här presenterade uppsatsen, tack även till alla er.

Hovås 12 februari 2021

UPPSATSENS ARTIKLAR

I. Björklund, C. & Alkhede, M. (2017). Sharpening the focus on numbers and counting: Preschool educators differentiating aspects of mathematical knowledge for teaching. Special issue. *Mathematics Teacher Education and Development*, 19(3), 117-134.

II. Alkhede, M. & Holmqvist, M. (2020). Preschool children's learning opportunities using natural numbers in number row activities. *Early Childhood Education Journal*. <https://doi.org/10.1007/s10643-020-01114-9>

Article I. is published with kind permission from the publisher and article II. is published under a creative commons license.

1. INLEDNING

Bakgrund

I min roll som matematiklärare och specialpedagog har jag under åren genom undervisning träffat både grundskoleelever och studenter som uttrycker att de har svårt med matematiken. De säger att de är ”dåliga” på matematik, och att de vare sig har intresse av eller använder sig av matematik. Efter ytterligare samtal om matematiken i vardagen, om tilltron till sin egen kapacitet och förmåga samt eventuellt även en kartläggning av matematikkunskaper, visar det sig i många fall att de upplevda svårigheterna handlar om bekymmer med skolmatematiken, inte med matematiskt resonemang i sig. Det handlar om bekymmer med att uppfatta, hantera och använda sig av tal, att bedöma storlek på tal och förstå rimlighet i beräkningsuppgifter (McIntosh, 2008). Den del av matematiken som blir till ett hinder i vardagen handlar till stor del om aritmetiska svårigheter och om taluppfattning (Dowker, 2005).

Kortfattat så inbegriper aritmetiken grundläggande egenskaper av tal, räknesätten och räkneoperationer. Olika kulturer runt om i världen har sedan flera tusen år tillbaka utformat olika talsystem för att kunna kommunicera tal och antal, samt lösa problem

med hjälp av skrivna tecken (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001). Oavsett vilket talsystem det handlar om måste man förstå och hantera dessa symboler för tal, tillsammans med andra uttryck för tal, för att sedan kunna använda sig av dem på ett ändamålsenligt och meningsfullt sätt. Detta med att förstå och använda sig av tal benämns med ett begrepp; taluppfattning. Taluppfattning är en central del inom matematiken, inte endast för aritmetiken, utan även för områden som exempelvis algebra, statistik och problemlösning. Betydelsen av en grundläggande taluppfattning har sedan länge diskuterats och flera forskare anser att taluppfattningen är en fundamental del för fortsatt matematisk utveckling (Fuson, 1988a; McIntosh, Reys & Reys, 1992).

Tidigt, redan som litet barn, kommer människan i kontakt med tal och använder sig av sina aritmetiska färdigheter (Fuson, 1991). Barn använder räkneord till räkneramsor (ett, två, tre, fyra, alla byxor äro dyra...) och till uppräkning av föremål (en, två, tre bilar). Små barn kan se skillnad på mängder, tre prickar och två prickar, fler och färre. Barn uppfattar även antal i tidig ålder, ett litet antal utan att räkna, exempelvis tre prickar på en tärning (Wynn, 1995). Dessutom finns symboler för tal överallt i vår omvärld, exempelvis på bussar, på hus och på diverse skyltar.

I styrdokument under tidigt 80-tal (Socialstyrelsen, 1981) beskrivs barns lärande och utveckling av matematik i förskolan med två ord, ”matematiska begrepp” (s. 43), och är ett innehåll i ämnesblocket Naturorientering. I förskolans första läroplan, Lpfö98 (Skolverket, 1998) behandlar två av de femton strävansmålen matematik. Då förskolans läroplan reviderades år 2010 (Skolverket, 2011), förstärktes matematiken som innehåll i förskolans verksamhet och området taluppfattning preciserades genom en vidare beskrivning av begreppet tal (mängder, antal, ordning, talbegreppet). I den nu gällande läroplanen för förskolan, Lpfö18 (Skolverket, 2018) nämns matematiken redan under rubriken Förskolans uppdrag:

Utbildningen i förskolan ska ge barnen möjlighet att använda matematik för att undersöka och beskriva sin omvärld samt lösa vardagliga problem. (Skolverket, 2018, s. 9)

Matematiken, dess område aritmetik och däri taluppfattning, förefaller vara välbekanta områden som tillämpats och tillämpas av oss alla från tidig ålder. Ett välbekant område som, för somliga mäniskor, någonstans på vägen genom utbildningssystemet tycks bli både ointressant och oanväntbart. Eftersom kunskapsområdet blir alltmer fokuserat även i förskolan, med mål av vilket kunnande barnen förväntas utveckla, finns det behov av att förstå vad barn faktiskt erbjuds att lära och vad de utvecklar för förmågor innan de börjar skolan. Kanske förväxlas barns kunskap om siffror, som räkneord och som symboler för tal, med

att de även har kunskap om talets ordinala och kardinala betydelse (Fuson, 1988a). Detta kan i sin tur felaktigt leda oss att tro att aktiviteter¹ som innehåller symboler för tal, siffror, gör talens innehörd tydliga för barnen.

Syfte och frågeställningar

Studiens övergripande syfte är att beskriva på vilket sätt förskollärare utvecklar och iscensätter aktiviteter om tal och räknande, och vilket kunnande som blir möjligt för barnen att utveckla. Målet är att studien ska bidra med fördjupade kunskaper om hur olika planeringar och iscensättande av aktiviteter genererar olika möjliga lärtillfällen av aritmetiska färdigheter för barnen.

Studiens preciserade frågeställningar:

- Hur hanterar förskollärare innehållet i aktiviteter avseende barns utveckling av taluppfattning och räknefärdigheter?
- Hur uttrycker sig förskollärarna om innehållet i sin undervisning om taluppfattning och räknefärdigheter?
- Hur kan insikter om förskollärares uppfattningar av sin undervisning om tal och räknande bidra till utökad förståelse av barns förutsättningar för utveckling av aritmetiska färdigheter?

¹ Begreppet aktivitet: Spontan eller planerad situation i sammanhang av när saker händer eller blir genomförda. Fysiska lekar och händelser, en syssla, en uppgift med deltagande i någon form (Chi, 2009).

Ett klargörande av de likartade begrepp jag använder mig av i syfte och frågeställningar: Taluppfattning – förstå och använda tal i olika situationer och sammanhang. Räknefördigheter – räknneramsa, uppräkning (ett-till-ett - korrespondens), antalsuppfattning. Aritmetiska fördigheter – kunskap om grundläggande egenskaper om tal (taluppfattningen), förmåga att operera med tal (göra beräkningar), att använda sig av olika räknesätt, räknestrategier och räkneregler.

Kappans disposition

Uppsatsen består av två artiklar och en kappa. Förutom inledningen, där studiens problem, syfte och frågeställningar presenteras omfattar kappan sju kapitel exklusive referenslista. Efter inledningen följer två kapitel som behandlar matematik som kunskapsområde i förskolan och förskollärarnas matematikdidaktiska kunskaper. Vidare i kapitel fyra beskrivs tidigare forskning om aritmetik och taluppfattning.

Uppsatsens teoretiska utgångspunkter utifrån ett variationsteoretiskt perspektiv samt Chi's (2009) taxonomi om aktiviteter, presenteras i kapitel fem. Metodval, urval och studiens genomförande beskrivs i kapitel sex. Studiens resultat kopplat till syfte och frågeställningar presenteras i kapitel sju och i det åttonde och sista kapitlet följer en diskussion av studiens syfte, forskningsfrågor och resultat kopplat i relation till tidigare forskning.

2. MATEMATIK SOM KUNSKAPSOMRÅDE I FÖRSKOLAN

Förskolans framväxt och förändrade uppdrag

I Barnstugeutredningen 1968 (SOU 1972:26) diskuterades förskolans dubbla syfte i ordalag av det integrerade perspektivet på (ut)bildning och omsorg. År 1996 kom beslutet om att förskolan skulle vara en del, den första delen, i det svenska utbildningssystemet. Ansvaret för förskolan gick då från Socialdepartementet till Utbildningsdepartementet (SOU 1997:157). Två år senare får förskolan sin första läroplan, Lpfö98 (Skolverket, 1998). Denna läroplan har under åren, genom att revideras år 2010 och år 2016, utvecklats mot ett förstärkt och förtydligat uppdrag avseende utveckling och lärande. I läroplanen Lpfö98 under rubriken *Förskolans uppdrag* beskrivs att ”Förskolan ska lägga grunden för ett livslångt lärande” (s.5). Vidare att förskolan ska stimulera barns utveckling och lärande utifrån en helhetssyn på omsorg, utveckling och lärande. Samma rubrik i nu gällande läroplan för förskolan Lpfö18, har följande beskrivning: ”Utbildningen i förskolan ska lägga grunden för ett livslångt lärande” (s.7). Vidare att utbildningen (inte verksamheten) ska utgå från en helhetssyn samt ett helt nytt stycke om undervisning och vad detta innebär för förskolan. Den nu gällande läroplanen pekar på ett mer aktivt

förhållningssätt till utveckling och lärande. Dels genom styrdokumentens beskrivning av förskolan som Sveriges första skolform, dels genom att introducera begreppet undervisning i ett förskolesammanhang. Även formuleringen om hur förskolan ska förhålla sig till läroplansmålen skiljer såtillvida att i Lpfö98 ska förskolan ... ”sträva efter att varje barn utvecklar...” (s.9) och i Lpfö18 ska förskolan ”... ge varje barn förutsättningar att utveckla...” (s.13). Även i dessa formuleringar skiljer förhållningsättet till utveckling och lärande åt. Utveckling och lärande i förskolan har numera en tydligare formulerad riktning med målen som utgångspunkt. Från och med år 2010 skrevs förskolan som skolform in i Skollagen (SFS 2010:800). Tilläggas i detta sammanhang av förskolans förändrade uppdrag är att enligt Statistiska centralbyrån (SCB, 2019) så är 89 % av alla tvååringar och 94 % av barn mellan 3 och 5 år inskrivna i den svenska förskolan. Detta betyder att förskolan idag berör i stort sett alla barn i Sverige och att dessa barn därmed ingår i ett utbildningssystem där kunskap och lärande ”ska vila på vetenskapligt grund och beprövad erfarenhet” (SFS 2010:800 1 kap. 5§)

Förskolans didaktik

I skollagen (SFS 2010:800) anges att utbildningens syfte är att skapa en helhetssyn på barnet, där omsorg, utveckling och lärande är viktiga delar för förskolans verksamhet. I skollagen är även begreppet *undervisning* definierat samt vem/vilka som får leda densamma: ”... målstyrda processer som under ledning av

lärare eller förskollärare syftar till utveckling och lärande genom inhämtande och utvecklande av kunskaper och värden...” (SFS 2010:800, kapitel 1 § 3). Vad som menas med kunskap i förskolan är beskrivet i förskolans läroplan. Först och främst att kunskap inte är ett entydigt begrepp utan att kunskap kommer till uttryck i fyra olika former; fakta (information och regler), förståelse (uppfatta meningens eller innebördens av ett fenomen), färdighet (att veta hur något ska göras och kan utföra det) och förtrogenhet (vet hur begrepp kan användas i olika situationer). Dessa fyra kunskapsformer samspelear och är även beroende av varandra. Förskolans och skolans arbete ska därmed, genom att använda sig av alla fyra former i samspel, skapa en helhet i lärandet (Skolverket, 2018). För god kunskapsutveckling är det viktigt att barnen ska få uppleva olika uttryck för kunskap, inte endast det intellektuella, utan även praktisk, sinnlig och estetisk kunskap. Läroplanskommitténs betänkande (SOU 1992:94), som ligger till grund för läroplanen, lyfter fram tre aspekter av kunskap, den *konstruktiva aspekten* där kunskap ses som ett sätt att göra världen begriplig, den *kontextuella aspekten* där kunskap är beroende av sitt sammanhang och den *funktionella aspekten* där kunskap ses som ett redskap.

Förskolans didaktik skapas i interaktionen och kommunikationen mellan förskollärare, barn och lärandeobjekt (Doverborg, Pramling & Pramling Samuelsson, 2013; Björklund, Pramling

Samuelsson & Reis, 2018) och bygger på att förskollärarna tar ansvaret för att medvetet vägleda barnen mot målen. I förskolan handlar barns lärande om möjligheter att utveckla kunskaper, förståelse för innehåll och för omvärldsfenomen. Nyckeln till undervisning i förskolan är förståelsen för barnens utgångspunkt (Doverborg & Pramling Samuelsson, 2012). Genom att utgå från målen i styrdokumenten, barns erfarenheter, förutsättningar och intressen kan förskollärarna planera och ge barnen möjlighet att utveckla förståelse för ett innehåll, med andra ord undervisa (Sheridan & Williams, 2018).

Undervisning, målstyrda processer, kan vara både planerad, med syfte att lära och utveckla ett särskilt innehåll, eller uppkomma spontant i verksamheten genom en leksituation. Inom förskolan grundas ett lärande på en pedagogik där omsorg, utveckling och lärande bildar en helhet i ett livslångt lärande (Skolverket, 2018). Leken är central när det handlar om lärande i förskolan. Barn söker och erövrar kunskap genom lek. I leken är kommunikation, socialt samspel, utforskande och skapande möjligt. I Björklund och Palmérs (2019) studie av mötet mellan lek och undervisning pekar studiens resultat på att leken i samverkan med målinriktade processer möjliggör lärande och utveckling. Författarna diskuterar i ordalag av att lek och undervisning är ”två nödvändiga aspekter av förskoledidaktik ” (s.65). Förskolans didaktik handlar om relationer mellan barnet (den lärande),

förskollärare (möjliggör lärande) och innehåll (läroplansmål), vilka i en undervisningssituation är beroende av varandra.

I förskolans didaktik integreras innehållet, den lärande och den som undervisas i vad som blir matematikundervisning i förskolan. (Björklund & Palmér, 2018, s.29)

Det är dock förskollärarens ansvar att utforma undervisningen, vilket i sin tur efterfrågar kunskaper, inte bara om innehåll utan även om de lärande. En förskollärares didaktiska avsikter med undervisningen, med andra ord förskollärares val av metod och teori om lärande, leder till olika konsekvenser gällande lärande och utveckling (Björklund & Palmér, 2018, 2019).

Matematik som kunskapsområde

Redan tidigt i förskolans historia har matematiken haft sin plats i verksamheten. I den svenska förskolan är Fröbeltraditionen stark. Denne tyske pedagog Friedrich Fröbel (1782–1852), framhöll att matematiken tillhörde fostran, med kunskap om tal, form och storlek; att matematiken hörde samman med gudomligheten och att den handlade både om människan och om naturen. Fröbel utarbetade även ett material – lekgåvorna - som skulle utmana barnens matematiklärande. Gällande styrdokument som berör förskolan kan vi först under 1980-talet genom Arbetsplan för förskolan (Socialstyrelsen, 1981) hitta matematiken som kunskapsområde, då under ämnesområdet naturorientering, med två ord ”matematiska begrepp” (s.43). Vidare i förskolans pedagogiska program (SOU 1987:3), där verksamhetens

innehåll delades in i tre områden - natur, kultur och samhälle - finns matematik med som en del inom området natur och beskrivs som en av naturens krafter inom vilken barnen ska få kunskaper. I detta pedagogiska program påpekas det även att lärare ska stimulera barnen att tänka och reflektera. I förskolans första läroplan Lpfö98 (Skolverket, 1998) finns matematik med något mer specificerad och beskrivet genom två strävansmål: ”utvecklar sin förmåga att upptäcka och använda matematik i meningsfulla sammanhang, utvecklar sin förståelse för grundläggande egenskaper i begreppen tal, mätning och form samt sin förmåga att orientera sig i tid och rum...” (s.13). När sedan förskolans läroplan reviderades år 2010 förtydligades matematikens syfte och innehållet i matematiken förstärktes. Skälen till detta utökade pedagogiska uppdrag motiveras med att dagens samhälle (gällande värdegrund och demokrati) ställer större krav på matematisk förståelse och matematiska färdigheter. Begreppet matematik specificeras även ytterligare till att handla om ett hjälpmittel för att tillämpa räkning, mätning och beskriva läge och form, ”en mänsklig tankekonstruktion” samt en viktig del gällande matematiska resonemang (Utbildningsdepartementet, 2010. s.10). Enligt förskolans läroplan Lpfö98 reviderad 2010 och 2016, är matematik något som barnen ska utveckla förståelse för inom rums- och taluppfattning samt utveckla förmågor inom gällande områden som begrepp, problemlösning och resonemang. Under tiden den här studien har pågått har förskolan

fått en ny läroplan, Lpfö18 (Skolverket, 2018), där antalet mål i matematik nu är tre; förmågan att använda matematik för att undersöka, reflektera över och prova olika lösningar av egna och andras problemställningar; förståelse för rum, tid och form, och grundläggande egenskaper hos mängder, mönster, antal, ordning, tal, mätning och förändring, samt att resonera matematiskt om detta; förmåga att urskilja, uttrycka, undersöka och använda matematiska begrepp och samband mellan begrepp (Skolverket, 2018, s.14); i princip med samma innehåll och betydelse som i tidigare läroplan. Skillnaden ligger i formuleringen om hur dessa mål ska omsättas. Medan det i den tidigare läroplanen handlar om att ”sträva efter att barn...” handlar det numera om att ”ge varje barn förutsättning att utveckla...”. Dessutom står matematiken inskriven under rubriken Förskolans uppdrag: ”Utbildningen i förskolan ska ge barnen möjligheter att använda matematik för att undersöka och beskriva sin omvärld samt lösa vardagliga problem” (Skolverket, 2018, s.9). Detta bör innebära att matematiken fått en mer central roll i förskolans utbildning samt i förskolans vardag och inte endast förekommer i förskolan som ett mål att sträva mot.

I en rapport om undervisning och genomförandet av förskolans uppdrag beskriver Sheridan och Williams (2018) att matematik ofta används i verksamheten i lek och i olika aktiviteter. För att skapa tillfällen, ge förutsättningar för lärande krävs dock att

förskollärare har kunskaper i och om ämnet och riktar barnens uppmärksamhet mot matematiken i olika situationer som bidrar till barnens reflektioner och resonemang. Björklund, Pramling Samuelsson och Reis (2018) problematiserar begreppen lärande – undervisning – läroplansmål gällande matematik, var för sig och i relation till varandra och pekar på att förskollärares didaktiska val kan vara avgörande för förskolans måluppfyllelse.

Läroplansmålen är allmänt hållna och öppnar för olika tolkningar av vad specifikt ett innehåll ska innefatta, hur undervisningen ska utsättas och vad det egentligen innebär att barn lär sig något. (Björklund, et al., 2018, s.3)

Så även om matematiken både förekommer och tillämpas i förskolan, krävs det att någon synliggör och kommunicerar den tillsammans med barnen, detta för att möjliggöra lärande. Beroende på hur förskollärare organiserar för lärande, gör sina didaktiska val, erbjuds barnen också olika möjligheter till att lära (Björklund, 2014).

3. FÖRSKOLLÄRARNAS MATEMATIK-DIDAKTISKA KUNSKAPER

Lärarna har en central roll när det handlar om lärande och utveckling av taluppfattningen. Flera forskare (Reys, 1994; Ma, 1999; Björklund, Pramling Samuelsson & Reis, 2018) pekar på centrala didaktiska delar inom undervisningen, såsom att skapa en miljö där VARFÖR (meningen) är lika betydelsefull som VAD (innehållet) och HUR (metoden). Det handlar om att som lärare呈现出 aktiviteter som engagerar och utmanar de lärande till att reflektera över sitt eget lärande och på så sätt skapa en mening i ny kunskap, nya idéer och nya begrepp (McIntosh, Reys, Reys, Bana & Farell, 1997).

Förskollärares förändrade uppdrag

Skola och utbildning är en del av samhället, i påverkan av den politik, den policy och den kulturella mångfald som råder. Samhället, liksom läraryrket och undervisningen är därmed i ständig förändring. Lärarens uppdrag har under åren förändrats från att tidigare hantera en grupp lärande till att idag tillgodose de individuella behoven hos de lärande och interagera med dem. Det ställs olika krav på läraren i dessa två sammanhang av undervisning. Ingen lärare klarar av att lära sig alla nya metoder, tekniker och ämnen på egen hand. Detta kräver ett kollektivt synsätt på

kompetensutveckling (Hardgreaves, 2000). Om kompetensutveckling ska ske måste innehållet för lärande vara en väsentlig del av lärarnas praktik och en källa för utmaningar som lärarna är intresserade av att utveckla sin kunskap om. Tal och räknande är i denna mening relevant innehåll att diskutera med förskollärare som potentiellt innehåll för lärande, även om ”räkna” inte förekommer som ett lärandemål i förskolans läroplan Lpfö18 (Skolverket, 2018). Ändå visar studier att räkna verkligen är en vanlig aktivitet eller handling med små barn (Björklund & Barendregt, 2016).

Kunskap för undervisning

Sveriges förskollärare är generalister utan specialisering i något särskilt ämne. Ändå är de skyldiga att undervisa i matematik och använda de kunskaper och erfarenheter de har av matematikutbildning och små barns lärande. Därmed blir det av intresse att rikta uppmärksamheten mot detta inslag i förskoleundervisningen: om undervisningen ska leda till lärande (vilket innebär att barn kommer att upptäcka nya sätt att förstå och använda matematik), bör lärarnas kunskap om innehållet betonas vara lika viktiga som deras allmänna pedagogiska färdigheter. Lärares professionella kunskaper anses inkludera både innehållskunskap och pedagogisk kunskap (Bertram & Christiansen, 2012). För att undervisa krävs att lärare har mer än bara faktakunskaper. Lärare behöver ha kunskap om de grundläggande principerna för både innehållet och lärandet. Undervisning kräver dessutom att man

som lärare ständigt är uppdaterad på senaste forskning, teorier och metodisk kunskap. Svårigheterna med att implementera matematikundervisning är enligt Venkat och Askew (2012) främst kopplade till pedagogisk kunskap om matematiska strukturer och hur man presenterar dem för de lärande. Ma's (1999) resultat från klassrumsstudier visar att matematisk kunskap inte ensam är korrelerad med effektiv undervisning och elevers resultat, men djupgående matematisk kunskap (begreppsmässig förståelse av strukturen och sambandet mellan matematiskt innehåll) öppnar fler möjligheter att engagera de lärande och se möjligheter att utveckla begrepp som dyker upp i en situation.

MKT - Matematisk kunskap för undervisning

Lärares kunskaper benämns av Ball, Thames och Phelps (2008) som matematisk kunskap för undervisning - MKT (Mathematical Knowledge for Teaching). Det handlar om förhållandet mellan lärarens kunskaper om själva innehållet (vad betyder det att ha kunskap om tal och räknande) och de barn de ska undervisa (vad har barnen upplevt vara svårt tidigare och hur kan innehållet göras förståeligt för dem). Följaktligen räcker det inte att ha ämneskunskaper respektive kunskaper om barns lärande, det finns en relation mellan de lärande och innehållet som ska läras som måste beaktas och respekteras i en undervisningssituation. Det finns flera studier av lärares matematiska innehållskunskaper i grundskolan och några från förskole- och tidig matematikutbildning (Mathematics and Science Partnership

(MSP), 2010) men sällan beträffande förskollärare och det specifika pedagogiska sammanhang som förskolan, innehåller (se exempelvis Oppermann, Anders & Hachfeld, 2016).

Matematisk kunskap för undervisning (MKT) involverar kunskap om hur matematiska procedurer fungerar, vilka utmaningar barn sannolikt kommer att stöta på och hur man bäst definierar matematiska termer och föreställningar för barnen (Hill et al., 2008). Undervisning och lärande om tal och räknande är i detta avseende en komplex fråga, eftersom taluppfattning och aritmetiska procedurer bygger på flera grundläggande idéer och principer. Denna komplexitet i att lära om tal och räknande är en viktig aspekt av förskollärarnas matematiska kunskaper för undervisning. Klette (2007) framför att denna typ av konceptuell insikt av innehållet för lärande, ofta är tagen förgivet och problematiseras inte i utbildningen.

4. ARITMETIK – TALUPPFATTNING

Aritmetik

Den del av matematiken som handlar om tal och deras grundläggande egenskaper, räknesätt, räknestrategier och räkneregler brukar benämnas Aritmetik. Inom matematiken anses aritmetiken vara central då aritmetiska färdigheterna är nödvändiga för att kunna hantera flera olika områden inom matematiken, exempelvis geometri, algebra och statistik (Baroody, Lai & Mix, 2005, Dowker, 2005; Sarama & Clements, 2008).

Historiskt sett så är aritmetiken det äldsta delområdet inom matematiken. Olika kulturer runt om i världen har sedan flera tusen år tillbaka utformat olika talsystem för att kunna kommunicera tal och antal samt lösa problem med hjälp av skrivna tecken (Kilpatrick, et al., 2001). Genom tiderna har olika kulturer utvecklat talsystem, symboler för tal för att kunna hantera numerisk information (Wiese, 2003). De mest omtalade talsystemen kan vara det babyloniska talsystemet (ca 2000 f.Kr. kilskrift), Mayafolkets talsystem (ca 500 e.Kr. prickar och streck) och vårt eget talsystem, det Hindu-arabiska (ca 300 f.Kr. siffror 0–9). Oavsett vilket talsystem det handlar om måste brukaren förstå och kunna hantera dessa symboler för tal, tillsammans med

andra uttryck för tal, för att sedan kunna använda sig av dem på ett ändamålsenligt och meningsfullt sätt (Kilpatrick, et al., 2001). Det Hindu-arabiska talsystemet får den lärande förståelse för främst genom att använda räkneorden och symboler för tal och då även koppla till ett antal. Detta är dock inte detsamma som antalsförståelse (Sarnecka & Carey, 2008; Sella, Lucangeli, Kadosh & Zorzi, 2019).

För att kunna operera med tal, krävs det dock mer än att känna igen en talsymbol och veta dess namn. Att förstå och hantera tal är en komplex kognitiv process (McIntosh, Reys & Reys, 1992; (McIntosh et al., 1997; Löwing, 2004). Det behövs kunskap om grundläggande egenskaper hos tal¹ före det att räknesätt, räknestrategier och räkneregler kan användas vid aritmetisk problemlösning. Dessa egenskaper handlar om talens betydelse och beskriver talens olika former och funktioner. Detta brukar vi med ett begrepp benämna som taluppfattning. Neuman (2013) beskriver den del av taluppfattningen som handlar om bastalens del-helhetsmönster som ”aritmetikens embryo” (s. 5).

Taluppfattning

Förenklat beskrivet handlar taluppfattning om att förstå och använda tal i olika situationer och sammanhang. När det handlar om att utveckla användbara räknestrategier, göra matematiska

¹ Naturliga tal. Förutom de naturliga talen finns andra typer av tal såsom heltal, rationella och irrationella tal (de reella talen).

bedömningar och kunna fatta beslut, är taluppfattning den avgörande faktorn.

Number, including beginning arithmetic, is arguably the most important topic. To build a strong number sense, children must develop and link competencies in several areas, especially counting, recognition of the numerosity of small groups, comparing and ordering, and arithmetic. (Sarama & Clements, 2008, s.71)

Forskare världen över (se exempelvis Fuson, 1988a; Neuman, 1987; 2013; Howden, 1989; McIntosh, Reys & Reys, 1992; Ahlberg, 1997; Dowker, 2005; Dehane, 2011) är överens om att en god taluppfattning är en förutsättning för den fortsatta matematikutvecklingen. Dessa forskare är även överens om att det som ingår i begreppet taluppfattning är svårt att definiera och att det är ännu svårare att beskriva hur de lärande tänker och resonerar kring matematiska problem inom taluppfattningens område. Utvecklingen av taluppfattning är en lång process, som startar i en antalsuppfattning för att så småningom innefatta allt fler och fler aspekter. Aspekter av exemplet *tre*: från att uppfatta antalet tre, exempelvis tre prickar på en tärning, få möjlighet att urskilja; att tre *** är fler än två **, att tre kommer före fyra i en talordning, att tre *** är detsamma i antal som två** tillsammans med en *, att räkneordet tre motsvarar symbolen 3 och så vidare.

Det finns en lång forskningstradition inom området taluppfattning. Redan under 1930-talet skrev Brownell (1935; 1947) om det meningsfulla lärandet gällande matematik, mer precist

aritmetik. Brownell refererar i sin tur till Pestalozzi, en schweizisk pedagog (1746–1827) och dennes studier av området. Brownell talade för att lärande i matematik inte endast handlar om att räkna (drillas i räknande) utan om förmågan att hantera aritmetiska situationer och beskrev detta utifrån ett undervisningsperspektiv. Brownell (1947) fick kritik och blev ifrågasatt för sitt propagerande kring meningsfull aritmetik under 1940-talet. Kritiken rörde bland annat att detta meningsfulla lärande skulle vara för svårt för barnen att förstå samt att det skulle ha en negativ påverkan på ett effektivt tänkande. Kritikerna förordade i stället att fortsätta drilla tabeller och att lära sig procedurer kring räkneoperationer utantill.

Många år senare beskriver Howden (1989) taluppfattning på ett liknande sätt som Brownell och för fram vikten av att få upptäcka och undersöka tal och att få möta tal i olika sammanhang, inte endast som algoritmer i matematikboken. Förutom att beskriva taluppfattningen i sammanhang av lärande och utveckling nämner Howden även ett tidigare uttryck för taluppfattning; ”Friendliness with numbers”, myntat av Robert W. Wirtz (1974). I boken med titeln *Mathematics for Everyone* skriver han om sin vision “mathematical literacy for everyone” (s.4), vilket handlar om att förändra bilden av matematik från att upplevas som tråkig och svår till att ses som intressant och meningsfull.

Det finns alltså inte *en* beskrivning av taluppfattning utan flera. Resnick (1989) skriver att taluppfattningen gör motstånd mot att mer precist definieras och beskriver taluppfattning under rubriker som ”möjliga indikatorer” och ”nyckelfaktorer” till matematiklärande. Ett försök att sammanfatta en beskrivning av vad taluppfattningen sägs innefatta enligt forskning är: meningen med tal (Brownell, 1947), talrepresentationer (McIntosh, Reys & Reys, 1992), antalsförståelse (Davydov, 1982; Wynn, 1990), del-del-helhetskunskap (Carpenter & Moser, 1982), räkneordens olika former (Fuson & Hall, 1983), kunskap om storlek (McIntosh, Reys & Reys 1992; Howden, 1989; Baroody, 1987), beräknings- och räknestrategier, referenspunkter (McIntosh, Reys & Reys, 1992) och användandet av tal i räkneoperationer (McIntosh, Reys & Reys, 1992; Cross, Woods & Schweingruer, 2009; Gelman & Gallistel, 1986; Davydov, 1982).

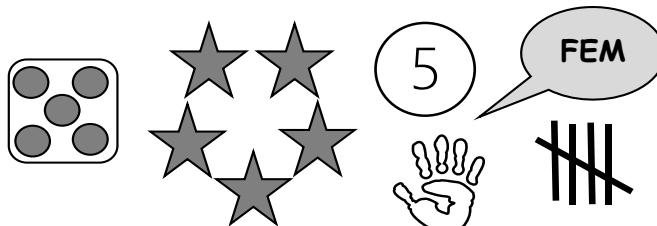
Tidig taluppfattning

Med begrepp som pre-matematik och pre-aritmetik pekade Freudenthal (1971) på den tidiga taluppfattningens oumbärighet för fortsatt matematikutveckling. ”It is bottom-level, it is indispensable premathematics” (s. 417). För att kunna använda tal i räkneoperationer krävs det att den lärande kan förstå att tal kan representeras på olika sätt och i olika sammanhang. Det handlar om att urskilja olika aspekter av tal, förstå innehördeten av tal, men inte minst att kunna se det meningsfulla och relevanta i att använda tal. Det handlar dock inte endast om att förstå tal utan

även om att utveckla förmågan att uttala, beskriva, diskutera och konstruera tal (Cross, et al., 2009).

Talrepresentationer

I kommunikationen kring tal kan det uppkomma ett behov av en extern representation, att tal kan representeras på olika sätt. Genom att ge barn möjligheter att upptäcka och urskilja flera former av tal samtidigt kan de utveckla sin taluppfattning. Det handlar även om att kunna översätta tal, transformera tal, i olika situationer, att förstå förhållandena dem emellan (Kilpatrick et al., 2001). Enligt Lesh's (1981) modell hittar vi tal och kan översätta tal mellan former som; bilder, konkret material, skrivna symboler, talade symboler (räkneord) och utifrån situationer i omvärlden.



Figur 1. Talet fem i olika representationer.

För att kunna använda tal till beräkning och aritmetisk problemlösning, krävs kunskaper om talens nominala, ordinala och kardinala betydelse; det vill säga, att utläsa talets namn, (uttala räkneordet), att räkneord och symboler för tal är relaterade till varandra i en ordningsföljd och kan bestämma antalet i en

mängd (Gelman & Gallistel, 1986). Detta tillsammans med att barn förstår att ett tal består av olika delar (5 består av 2 och 3 eller 1 och 4) gör det möjligt att operera med tal (Freudenthal, 1971). Resultat från en studie (Björklund, Ekdahl & Runesson Kempe, 2020) om undervisning och lärande i förskolan visar på styrkan med att använda fingrar för att bättre hantera en aritmetisk problemlösning. Genom att använda fingrarna, inte för att räkna dem en och en utan för att strukturera dem, visualiserade barnen tals del-helhets relationer. Förståelsen för dessa olika aspekter av tal gör skillnad i hanteringen av tal, där en uppräkning (1,2,3,4,5) istället blir till en beräkning ($2 + 3$), men även att en uppskattning av antal (3–5) blir till en bestämning av antal (svaret på Hur många?). Nedan presenteras mer ingående några av de matematiska aspekter som, av ovan nämnd forskning, identifierats ligga till grund för taluppfattningen.

Nominaltal – tal som namn – räkneord

Tal som nominaltal handlar om talens namn och om räkneord. Små barn kan memorera räkneorden, likt en ramsa. Barn kan även omvandla, transformera symboler för tal till räkneord (Sella, et al., 2019). Räkneorden finns tidigt med barnen i olika sammanhang, exempelvis i en räknearamsa, vid en uppräkning av objekt, när man pratar om ålder, ett nummer på huset där man bor och när man pratar om klockan (Fuson & Hall, 1983). Huvudsakligen använder förskolebarn räkneorden till räknearmsan där räkneorden inte svarar mot något objekt. Fuson (1982)

beskriver att räkneramsan, med räkneorden i stabil ordning, är det viktigaste verktyget för små barn i matematiklärandet. Barn har även kännedom om hur symboler för tal – siffror – benämns (nominal). När räkneramsan rabblas vid de skrivna symbolerna för tal är detta dock inte detsamma som att barn kopplar ihop ett antal med det skrivna talet, ej heller känner till talets ordinala och kardinala betydelse (Fuson, 1988a). Talet används då i ett icke-numeriskt sammanhang.

Språket, mer precist räkneorden, i relation till kunskap om tal har betydelse för hur man presterar i matematik (Miura & Okamoto, 1989). I de språk (exempelvis japanska och finska) där talet motsvarar räkneordet, där 11 benämns ”ett - andrationde” och 20 benämns ”två-tio(r)” hanteras matematiken på ett mer effektivt sätt än i de språk (exempelvis engelska och svenska) där 11 benämns ”elva” och 20 benämns ”tjugo”. Relationen mellan tal och räkneord är mer logisk i vissa språk. Såsom vårt talsystem är uppbyggt harmonierar inte alltid språket med symbolerna för tal. Talen 1–10 (ett till tio) de första tio talen lär barn tidigt att räkna. Talen 11–20 (elva till tjugo), de så kallade tontalen, räknas även de, men i sammanhang av att koppla ihop ett räkneord till motsvarande tal i skrift kan det uppkomma svårigheter. Elva (11) och tolv (12) kan uttalsmässigt inte härledas till de första talen (1) ett och (2) två. I omfånget talen 13–19 uttalas entalet först (tre-tton, fem-ton, sju-tton) medan det i skrift

placeras efter tiotalet. Talen 21–29 (tjugo-ett till tjugo-nio), men inte tjugo-tio utan tre-ttio (30). Talen 31–99 följer dock ett mönster vid tiotalsövergångarna (fyr-ttio, fem-tio, sex-tio...). Språket – räkneorden – kommer inte att vid en uppräkning kopplas ihop med motsvarande symboler för tal – siffror – då det från talet ett (1) till talet ett-hundra (100) finns underliggande strukturer som inte alltid följer samma mönster. Språket, hur räkneorden motsvarar symbolerna för tal, kan påverka taluppfattningen och effekten av att använda sig av basen 10 för att kunna förstå och använda tal (Miura, 1987).

Ordinaltal – tal som ordning

Tal som ordinaltal handlar om talen i en ordning. Kortfattat kan ordinaltal beskrivas som tal som betecknar en ordningsrelation av mängder. Fuson (1988b, s. 583) specificerar begreppet ordinalitet ytterligare genom att beskriva ordinaltal i olika situationer. Som ett *ordningstal* i en situation där ett ord används; första andra, tredje fjärde, osv. Vidare som en *sekvens* en situation där en följd, en rad skapas, exempelvis som med månaderna, räkneorden och alfabetet. Ordinalitet beskrivs även i ordalag som *ordinaltal som relationer*, vilket behandlar > (större än) eller < (mindre än) mellan två mängder och förklaras med exempel som: åtta är fler än fem (kardinal), åtta kommer efter fem (ordinal), åtta år är äldre än fem år (mätande) och åtta kommer efter fem i en räkneramsa, augusti kommer efter maj i månadsföljden (sekvens).

Ordinalitet handlar, förutom att veta räkneordens och tals ordning i en sekvens även om att veta vilka tal som kommer före eller efter ett givet tal. Ordinaltalens betydelse i sammanhang av taluppfattning verkar dock viktigare än vad man tidigare trott gällande talets platsvärde (Coles & Sinclair, 2018). Talets platsvärde handlar både om räkneordet och om symboler för tal, mer om detta under rubriken tals struktur.

Kardinaltal - tal som antal

Tal som kardinaltal handlar om antal. Kardinaltal betecknar antalet i en mängd. Forskning betonar vikten av att fullt ut förstå kardinalitet (Resnick, 1983; Cross et al., 2009). Av Gelman och Gallistels (1986) principer för uppräkning (Abstrationsprincipen, Ett-till-ett principen, Principen om godtycklig ordning, Principen om räkneordens ordning och Antals-/Kardinalprincipen) har kardinalprincipen visat sig vara den mest utmanande, men också nyckeln till framgång gällande utveckling av taluppfattning. För att korrekt bestämma antalet och förstå tals kardinala betydelse, är det nödvändigt att använda ytterligare två av dessa principer, en-till-en-korrespondens och räkneordens stabila ordning, simultant.

Mycket små barn har en intuitiv känsla för kardinalitet genom subitisering (Clements, 1999). Redan i tidig ålder har människan förmåga att skilja mellan ett, två och tre i antal och detta

benämndes subitizing¹ av Kaufman, Lord, Reese och Volkmann (1949). Subitizing, att subitisera handlar om att uppfatta ett litet antal (3–4) utan att behöva räkna; att med sinnena förnimma ett litet antal. Det finns två typer av subitisering (Clements, 1999) perceptuell och konceptuell. Den förra handlar om att sinnligt uppfatta ett litet antal, exempelvis tre prickar, tre knackningar eller tre fåglar i luften. Barn subitiseras via olika sinnen (perceptuellt) som en ansats till att förstå kardinalitet. Konceptuell subitisering handlar om att med stöd av ett mönster uppfatta ett (större) antal. Exempelvis två bilder som visar fem prickar (tärningsmönster) resulterar i antalet tio. Konceptuell subitisering kan här kopplas till aritmetiska förmågor som att göra beräkningar och operera med tal (Clements, 1999). När barn är mellan tre och fem år börjar de utveckla sin kardinala förståelse med grund i förmågan att subitisera. Nyligen framlagd forskning (Paliwal & Baroody, 2020) visar på detta samband. I en situation av att bestämma antal, ligger vid en subitisering fokus på delar och helhet samtidigt. Medan det i en uppräkning (en – till – en) först är fokus på delarna och sedan på helheten. De barn som har förmåga att subitisera antalet tre eller fyra klarar bättre av uppgifter av kardinal betydelse. För att förstå kardinalitet krävs däremed även en förståelse för att det inte handlar om en uppräkning utan om ett bestämt antal i en mängd (Wynn, 1991). Forskning

¹ “We wish to avoid terms now in use, having other meanings, and terms with the misleading connotations of estimating, counting, or grasping by intuition. The term proposed is *subitize*.” (Kaufman, Reese & Volkmann, 1949, p 520)

(Fuson, 1992; Wynn, 1992; Baroody, Lai & Mix, 2006; Sarnecka & Wright, 2013; Clements & Sarama, 2014) visar att förståelsen av kardinalitet ligger till grund för att kunna göra beräkningar, operera med tal, komplexa färdigheter som involverar addition och subtraktion.

Talrelationer

Detta handlar om hur talen är relaterade till varandra och om hur talen kan delas upp (delar och helhet). Om matematiklärandet enbart handlar om att memorera fakta och hantera data kan nöjet med att upptäcka och undersöka tal och deras relationer gå förlorat och vidare leda till att matematiken inte upplevs meningsfull (Howden, 1989). Vissa barn uppmärksammar inte av sig själva antal i sin omvärld. Detta trots att de använder räkneorden i olika situationer. I studier (Hannula, 2005; Hannula & Lehtinen, 2005) där barns antalsuppfattning sätts i relation till fortsatt matematikutveckling betonas betydelsen av att tidigt fokusera och utveckla barns förmåga att hantera antal. Studierna visar att barn som har erfarenheter av att räkna och kvantifiera i sin omvärld, har bättre förutsättningar att fortsatt utveckla matematiken (Hannula & Lehtinen, 2005). Det är genom att uppmärksamma tals mönster och dess struktur som man kan göra barn mer medvetna om tals innehörd (Mulligan & Mitchelmore, 2009). Kullberg och Björklund (2019) har studerat barn 5–6 år som löser en aritmetisk uppgift. För att lösa aritmetiska uppgifter på ett kraftfullt sätt krävs bland annat förståelse för tals relationer.

Talrelationer mellan talen, men även inom talet själv, en del-del-helhets relation (2/5/7; 4/6/10; 5/7/12). Denna förmåga att hantera talrelationer är en av de aritmetiska förmågor, gällande lärande och utveckling inom aritmetiken och därmed även matematiken. Resultatet visar att olika sätt att ta sig an en aritmetisk problemlösning grundar sig i förståelsen och användandet av tal och talrelationer och leder vidare till olika mer eller mindre kraftfulla vägar i en problemlösning. Genom att exempelvis använda sig av fingrar och där konkretisera, visa på tals delar och helhet, kan barn hitta effektiva räknestrategier (Björklund, Ek-dahl & Runesson Kempe, 2020).

För att förstå tals betydelse och storlek behöver man uppmärksamma relationer inom och mellan tal (Davydov, 1982; McIn-tosh, et al., 1992; Baroody & Rosu, 2006). Exempel på relationer *inom* tal – 5 består av 2 och 3, 12 består av 5 och 7. Exempel på relationer *mellan* tal – 4 är mindre än 5 och 5 är mer än 4. Genom att uppmärksamma barn på tal och räkneord i vardagen och där visa på tals betydelse och dess meningsfullhet (Björklund & Pal-mér, 2018) kan barn utveckla förståelse för tal i olika sammanhang och situationer.

Symboler för tal och platsvärden

När ett barn utvecklar sin förståelse för tal för att kunna operera med, krävs även förståelse för talens platsvärde. Vårt talsystem har tio *symboler för tal – siffror*: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 och 9 och

är ett positionssystem med basen 10 (Kilpatrick et al., 2001). Från en position till en annan (åt vänster) är talet tio gånger så mycket värt, $1111 = 1000 + 100 + 10 + 1$. Detta vårt talsystem, det decimala talsystemet, tog mänskligheten många hundra år att utveckla. Systemet för decimaltal, platsvärdet, har spelat en stor roll i utvecklingen av matematik och naturvetenskap. Detta system är, enligt Kilpatrick, et al. (2001), användbart och enkelt men inte nödvändigtvis alltid uppenbar och lätt att lära. Det skulle kunna antas att en aktivitet i förskolan som innehåller symboler för tal, leder till utvecklad taluppfattning. I själva verket visar studier att om man alltför fort introducerar enbart skrivna symboler i matematiken så kan barn gå miste om förståelsen av talens strukturer och relationer (Malmer, 1999; Ahlberg, 2000).

5. TEORETISKA UTGÅNGSPUNKTER

I detta kapitel beskrivs antaganden om lärande utifrån ett fenomenografiskt och variationsteoretiskt perspektiv. Sambandet mellan undervisning och lärande som är uttalat inom variationsteorin belyses i de båda delstudierna. Den fenomenografiska ansatsen innehåller teoretiska antaganden om kunskap, om kvalitativa förändringar av uppfattningar av ett fenomen och om den lärande människan i förhållande till världen (Marton & Booth, 1997; Lo, 2014; Marton, 2015). Utvecklingen från fenomenografin, som en mer beskrivande forskningsansats, till teoretiska antaganden om lärandets betingelser genom variationsteorin, leder till en mer pedagogiskt orienterad teori för att förutse och analysera undervisning och lärande i (klass)rummet (Marton & Tsui, 2004; Marton, 2015). Därmed bidrar fenomenografin och variationsteorin till två olika möjliga analyser av data, beroende på vilket syfte forskaren har (Holmqvist & Selin, 2019).

Att utforma aktiviteter för matematiklärande för förskolebarn är både viktigt och utmanande. I leken, oberoende av om den är planerad eller spontan, kan ett lärande göras möjligt. Oavsett förskollärarens intention med aktiviteten så är den utformad för att erbjuda möjligheter att lära, med andra ord påverka barnens

lärande. Genom att använda Chi's (2009) taxonomi där aktiviteter definieras som aktiva, konstruktiva och interaktiva kan vi jämföra aktiviteters egenskaper, det som synliggörs i aktiviteten samt de kognitiva processerna.

Variationsteori

Variationsteorin kan beskrivas som en teoretisering av vad lärande är utifrån fenomenografiska antaganden. I en fenomenografisk analys beskrivs skilda uppfattningar av världen omkring oss och där första (hur världen påstås vara beskaffad) och andra ordningens perspektiv (hur världen uppfattas och erfars av människan) separeras. Fenomenografin utgår från andra ordningens perspektiv, det vill säga studier av olika personers uppfattning av samma fenomen i stället för att fokusera fenomenet i sig. Om man utgår från fenomenografins sätt att betrakta lärande, är lärandet icke-dualistiskt, och går inte att skiljas från den som lär. Då man erfar något på ett nytt sätt innebär det att man lärt sig något (Marton & Booth, 1997). Forskning om människors skilda sätta att lära (se exempelvis Marton, Dahlgren, Svensson & Säljö, 1977; Marton, Hounsell & Entwistle, 1986) visar att den lärande urskiljer och erfar olika aspekter av fenomenet, eller lärandeobjektet.

En individs sätt att erfar ett fenomen definieras av vilka aspekter hos ett fenomen och vilka urskiljda relationer dem emellan som finns samtidigt närvarande i denna individs fokuserade medvetande. (Marton & Booth, 2000, s. 134)

Syftet med att använda variationsteorin är att upptäcka de för lärandet nödvändiga villkoren. Med variationsteorins redskap kan vi studera vad de lärande erbjuds lära, i stället för att studera vad de lär, och på så sätt planera för och iscensätta en mer varierad undervisning. Genom att utveckla variationsteorin, riktades intresset mot vilka betingelser som krävs för att lära, utifrån de skilda erfaran- den som de lärande har (Marton & Booth, 1997; Marton, 2015). Nyckelbegrepp inom teorin är: *urskiljning*, *simultanitet och variation*. För att ett lärande ska kunna äga rum, krävs att den lärande får möjlighet att urskilja aspekter av lärandeobjektet, aspekter som tillsammans skapar en förståelse för helheten. Att lära handlar om att byta perspektiv, att se ett fenomen på ett nytt eller förändrat sätt, att urskilja fler aspekter av det än vad den lärande tidigare hade urskilt. Det sätt som ett fenomen upplevs på är beroende av hur de delar som urskiljs är relaterade till varandra och hur dessa bedöms vara utmärkande i sammanhanget. Det som omger fenomenet benämns som den externa horisonten, fenomenet finns i ett sammanhang och får där sin mening. Delarna och deras relationer benämns som den interna horisonten (helheten och de kritiska dragen) (Marton & Booth, 1997). De externa och interna horisonterna beskriver avgränsningar av aspekter som upptäckts av ett fenomen på en individuell nivå (Kullberg, Mårtensson & Runesson, 2016).

Det finns en variation i människors sätt att uppfatta och erfara något. En människa erfar olika aspekter och lär sig därför även olika. För att ett lärande ska kunna äga rum krävs att flera aspekter av lärandeobjektet urskiljs samtidigt. Det vill säga att delarna och helheten av lärandeobjektet lyfts fram samtidigt, simultant. Lärande sker då pusselbitarna med respektive egenskaper som färg och form passar ihop och bildar en helhet, ett färdigt pussel, en hel bild (Marton & Booth, 1997; Björklund, 2012). Vidare så behöver vi även tänka att en helhet är en del av något annat (figur 2). Ett exempel på simultanitet gällande lärande av tal kan handla om att i en aktivitet få möjlighet att urskilja talet fem; som ett räkneord eller som namn på en symbol, som ordning i en uppräkning (efter talet fyra och före talet sex) och som ett antal. Flera aspekter av samma fenomen (talet fem) är därmed möjliga att urskilja samtidigt, talet fem i nominal, ordinal och kardinal form. Denna presenterade variation av talet simultant bidrar till att skapa helhet och förståelse för talet fem.

Lärandeobjekt

Ett lärande är alltid ett lärande av något, ett innehåll (Marton, 2015). När lärare planerar undervisning och organiserar kunskapsinnehåll, väljer de ut centrala delar av det innehåll som är tänkt att de lärande ska lära och utveckla. Inom variationsteorin benämns detta som lärandeobjektet. Lärandeobjektet visar upp det mest centrala kring innehållet i den planerade undervisningen, det som en lärare vill att de lärande ska uppmärksamma

och urskilja (Lo, 2014). Lo (2014) beskriver en uppdelning av lärandeobjektet i *hur* och *vad* man lär. Där *vad* i sin tur delas in i struktur (lärandeobjektets interna och externa horisont) och innebörd (förståelsen av objektet).

The object of learning is not just what the learner is supposed to be able to do, know, or understand as a result of instruction. The object of learning tells us about the nature of the capability and what must be learned to develop that capability. (Kullberg, Mårtensson & Ru-nesson, 2016, s. 309)

Lärandeobjektet i ett undervisningssammanhang kan beskrivas i tre olika former; det intentionella lärandeobjektet (Intended object of Learning - IL), handlar om det fenomen som läraren planerar för, har för avsikt att lära och utveckla. Vidare i en undervisningssituation där lärande kan studeras, blir lärandeobjektet iscensatt (Enacted object of Learning – EL). Den tredje formen av lärandeobjekt benämns som det erfarna lärandeobjektet (Lived object of learning – LL) och handlar om det som verkligen har urskilts av ett innehåll i en lärandesituation (Lo, 2014; Marton, 2015). En lärare har oftast en idé om vad som är tänkt att de lärande ska lära och utveckla och även på vilket sätt. Lärarens kunskaper om lärandeobjektet är dock på en annan nivå än de lärandes, vilket kan vara en anledning till att undervisning inte alltid leder till ett lärande (Björklund, Pramling Samuelsson & Reis, 2018). Genom att organisera för och genomföra den planerade undervisningen och med variation synliggöra lärandeobjektet på olika nivåer kan de lärande få möjlighet att urskilja nya

aspekter och se lärandeobjektet på ett nytt och förändrat sätt (Holmqvist, Gustavsson & Wernberg, 2008).

Kritiska aspekter

Inom variationsteorin har särskilt undervisningssituationer studerats, avseende sambandet mellan lärande och undervisning. Lärarna skapar rum för lärande (Marton & Tsui, 2004) genom att tillsammans med de lärande, med hänsyn till deras förutsättningar, i ett sammanhang och i dialog genomför en planerad aktivitet. Lärarna planerar (lärandeobjektet som IL) och genomför (lärandeobjektet som EL) en lärandesituation där innehållet, lärandeobjektet, presenteras med variation avseende innehållsmässiga aspekter (exemplet fem, 5, *****,... 4 5 6..., fem fingerar, fem prickar på en tärling...) för att möjliggöra för den lärande att se skillnader, vilket möjliggör lärande (Lo, 2014). Ett lärandeobjekt innehåller dimensioner där olika aspekter och drag behöver framställas och presenteras på ett varierande sätt i undervisningssituationen så att den lärande får möjlighet att urskilja det den inte redan urskilt. Genom denna variation av lärandeobjektets innehållsmässiga aspekter, ges de lärande möjlighet att urskilja de för lärandeobjektet avgörande aspekterna, de *kritiska aspekterna*, det vill säga de aspekter som ännu inte urskilts men nödvändigtvis måste urskiljas för att de lärande ska utveckla förståelse för lärandeobjektet. Pang och Ki (2016) ger en ytterligare beskrivning av de kritiska aspekterna som ”taken for granted” (s. 328), det vill säga aspekter av ett lärandeobjekt

som är förgivettagna att de lärande redan utvecklat förståelse för. Ett exempel på detta inom aritmetiken är när barn rämsräknar, säger räkneorden i talföljd, exempelvis upp till tjugo. Detta rämsräknande innebär inte per automatik att barn även har förståelse för tals ordinala och kardinala form (Fuson, 1988a).

Seeing a novel situation in a powerful way amounts to discerning the aspects and features that it is necessary to take into consideration in order to successfully solve the task and to focus on those aspects and features simultaneously. (Marton, 2015, s.67)

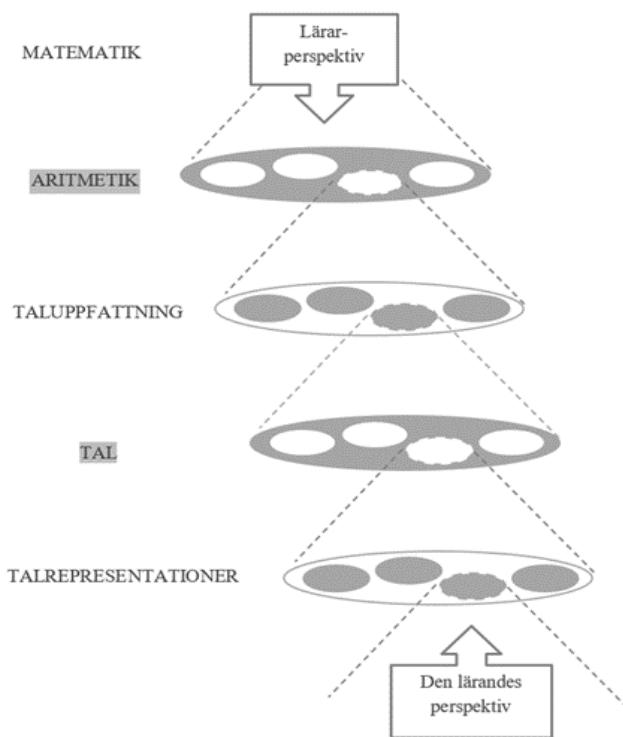
När den lärande urskiljer de kritiska aspekterna innebär det att det erfara lärandeobjektet urskiljs på ett nytt och förändrat sätt. För att den lärande ska kunna uppleva kvalitativa skillnader, är det nödvändigt att de kritiska aspekterna upplevs simultant med redan kända aspekter. För att veta vad något är behöver man även vet vad detta något inte är, erfara kontrasten, (fyra [4] ****, är inte fem [5] *****) samt erfara att fem kan representeras på flera sätt, att fem kan generaliseras (som bild, som skriven symbol, som talad symbol, som konkret material och i omvärlden exempelvis på skyltar).

Vilka aspekter som urskiljs eller bör urskiljas (kritiska aspekter) för att ett lärande ska ske, är avhängigt tidigare erfarenheter och redan vunnen kunskap, det som inom variationsteorin benämns som relevansstruktur. I en (lärande)situation kan tidigare erfarenheter påverka den lärande så tillvida att den lärande fokuserar på vissa aspekter mer än andra (Lo, 2014). En lärares kunskap

om ett lärandeobjekts komplexitet av delar och helhet samt de lärandes förutsättningar kan vid planering och iscensättande av undervisning göra att den lärande ändrar sitt fokus och därmed ges möjlighet att urskilja just de aspekter som ger en djupare innebörd eller förståelse av fenomenet.

Ett lärandeobjekts helhet och delar, olika aspekter och drag (kännetecken) presenteras här i en modell inspirerad av Holmqvist (2004) och visar på relationerna dem mellan. En aspekt har olika drag, men samtidigt kan en aspekt också vara ett drag medan ett drag kan vara en aspekt, beroende på var i strukturen den lärande befinner sig. En aspekt kan till exempel vara färg, medan drag kan vara grön, röd och gul. Men gul kan även vara en aspekt, med dragen ljusgul, neongul och guldgul. I en undervisningssituation kan den här modellen stötta läraren i att ur en helhet lyfta fram aspekter och drag för lärande av specifika innehåll. Läraren, med mycket kunskap inom området, väljer ut just de aspekter som gör att den lärande ska förstå lärandeobjektet. I en undervisningssituation bör den lärande ges möjligheter att urskilja fler och fler aspekter och drag av lärandeobjektet, se helheter och samband. För att visa på matematikens komplexitet kan följande, något förenklade, exempel på matematikens olika helheter och dess delar (aspekter och drag) presenteras: Helheten MATEMATIK, med delar som aritmetik, geometri och algebra. Helheten ARITMETIK, med delar som taluppfattning, räknesätt

och räknestrategier. Helheten TALUPPFATTNING, med delar som talens grundläggande egenskaper, talrelationer och tals struktur. Helheten TAL, med delar som talrepresentationer, ordinaltal och kardinaltal. Helheten TALREPRESENTATIONER, med delar som symboler för tal, räkneord, bild, prickar på en tärling och fingrar på en hand. Inför en undervisningssituation har läraren och den lärande olika perspektiv på dessa helheter och delar (aspekter och drag). Läraren kan inför en undervisningssituation komma att utgå från den först nämnda helheten MATEMATIK, medan den lärandes perspektiv kanske tas utifrån den sistnämnda helheten TALREPRESENTATIONER.



Figur 2. Ett exempel på matematikens olika helheter och delar.

Variationsmönster

Inom variationsteorin presenteras tre variationsmönster; kontrast som handlar om att uppfatta vad ett fenomen inte är, genom att visa på kontrasten mellan två drag av en aspekt, till exempel lång och kort; generalisering där vad som är långt respektive kort kan separeras från de fenomen där de representeras, och fusion där minst två värden varierar simultant. Dessa tre olika sätt att variera lärandeobjektets aspekter och drag innebär därmed olika sätt att erbjuda de lärande grundlig urskiljning av fenomenet (Holmqvist Olander, 2013; Lo, 2014; Marton, 2015).

Vi kan omöjligt vara medvetna om allt som pågår i vår omvärld. Åtminstone kan vi inte vara fullt medvetna om allt samtidigt. Vi fokuserar på något medan annat kommer i bakgrunden. Erfarandet, att kunna se skillnader i variationen, öppnas upp i den lärandes medvetande (Marton & Booth, 1997; Runesson, 1999; Marton, 2015).

När vi förstår eller uppfattar något är det alltid något vi förstår eller uppfattar. Det erfarna har således alltid en mening för oss. (Runesson, 2006, s. 29)

När något avviker från mönstret, när ett problem lösas på ett ovanligt sätt, när något blir ”fel” eller till motsatsen, då har det som uppfattas som norm blivit till en variation (Holmqvist, 2004). Det är lärarens ansvar att ge de lärande möjlighet att urskilja de (kritiska) aspekter, att urskilja det som krävs för att lära (Lo, 2014).

För att kunna se skillnader, men även likheter, varieras (*v*) vissa aspekter medan andra aspekter hålls invarianta (*i*). För att utveckla förståelse för något måste man förstå vad detta något *inte* är. Genom kontrast, att jämföra talet fem (5) ***** (*i*) med andra tal (*v*). Exempelvis talet fyra (4) **** och talet sex (6) ***** vet man vad som *inte* är fem (5) *****. Vidare, genom att presentera (an)talet fem generellt - fem bilar, fem fingrar, fem hus, påvisa antalet fem (*i*) tillsammans med olika sorters objekt (*v*) separeras fem från representationen och ger en generell förståelse av fem som kardinalitet. Variationsmönstret fusion handlar om att flera aspekter av lärandeobjektet varierar samtidigt, antal och räkneord; fem (*v*) fingrar (*v*) jämförs med fyra (*v*) bilar (*v*) samtidigt som räkneorden sägs. Vid en avsaknad av variation, då två aspekter förblir invarianta (*i*) uppstår repetition i stället för lärande (Marton, 2015). Lärandet handlar om att urskilja ett och samma fenomen i olika skepnader, genom variation urskilja det typiska hos fenomenet (Björklund, 2012). Genom att variera lärandeobjektet och erbjuda den lärande att urskilja flera aspekter samtidigt, simultant, möjliggörs ett lärande.

Variationsteori och matematiken

Genom variationsteorins perspektiv på lärande kan vi bättre komma åt och förstå komplexiteten i matematikens struktur, barns lärande och utveckling (se exempelvis Björklund, 2013). Inom matematikområdet är det viktigt att hitta flera aspekter, pusselbitar, av lärandeobjektet för att få ihop pusslet, helheten.

Genom att använda sig av variationsteorietiska redskap kan kunskap organiseras (planering och iscensättande av undervisning) och vidare kan dessa redskap även användas som ett analysredskap, för utvärdering för att komma åt och vad som gjorts möjligt att lära. Med variationsteorin som stöd kan lärare även hantera innehållet gentemot de lärandes tidigare kunskap (Marton & Tsui, 2004). Variation av lärandeobjektet, med andra ord alternativa sätt att framställa innehållet i en lärandesituation öppnar upp matematikens struktur men också de lärandes egen logik och förståelse (Runesson, 1999).

I studier av matematiklektioner lyfts variation fram som ett nödvändigt villkor för lärande (till exempel Kullberg, Runesson & Marton, 2017). Genom att läraren i en lärandesituation erbjuder variation och invarians av lärandeobjektets aspekter ges de lärande möjlighet att urskilja den matematiska strukturen och att de aspekter av ett lärandeobjekt som synliggörs, också är det som begränsar vad som blir möjligt att lära.

Med variationsteorins redskap kan vi studera vad de lärande erbjuds lära, i stället för att studera vad de lär, och på så sätt planera för och genomföra undervisningen. Genom variationsteorin kan vi upptäcka de för lärandet nödvändiga villkoren.

Chi's taxonomi om aktiviteter

Forskning (Wickstrom, Pyle & DeLuca, 2019) pekar på att barns aktiva deltagande är den viktigaste faktorn för effektiva undervisningsinsatser och för att utveckla barns matematiska förmågor. Med stöd i Chi's (2009) taxonomi om aktiviteter, där olika aktiviteter definieras som aktiv, konstruktiv eller interaktiv, kan vi studera förhållandet mellan aktivitetsform och möjligheter till lärande. Att vara aktiv kännetecknas av att göra något fysiskt, som att peka, prata, titta och visa hur de svarar på materialet eller kommunikationen. De kognitiva processerna aktiverar tidigare kunskaper och handlar om att hantera och lagra ny information. På nästa nivå, i en konstruktiv aktivitet, producerar barnet ett resultat som går utöver den "information" de har fått. Deras aktiviteter är förklaringar, kopplar tidigare kunskap till ny kunskap, de reflekterar och planerar på nya sätt. De kognitiva processerna handlar om när barnet bygger ny kunskap, genom att slå samman tidigare med ny kunskap, korrigera och organisera egen kunskap.

The framework consists of a taxonomy that generates a hypothesis, that interactive activities might be better than constructive activities, which in turn might be better than active activities, which would be better than passive activities. (Chi, 2009, s. 97)

Slutligen kännetecknas de interaktiva aktiviteterna av en dialog om samma ämne med avseende på andras perspektiv och kommentarer. Barnet konfronterar eller försvarar sina kunskaper, reviderar sina argument eller handlingar baserat på feedback från

andra eller svarar på stöd. De kognitiva processerna tar hänsyn till partnernas bidrag. Detta innebär att barnens aktiva delta-gande oavsett form av aktivitet kan utvecklas mer eller mindre beroende på hur involverade de är i processerna.

Aktivitet	Aktiv	Konstruktiv	Interaktion
Egenskaper	Göra ngt fysiskt	Idéer utöver presenterad information.	Dialog och samarbete över ett ämne.
Synligt och observerbart i aktiviteten	<p><i>Engagerade</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - titta, fixera - markera - gestikulera - parafrasera - manipulera objekt - välja ut - upprepa 	<p><i>Självskapande</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - förklara eller utveckla - motivera, ange orsak - koppla, länka - skapa en begreppskarta - reflektera - planera och förutse resultat - generera hypoteser 	<p><i>Guidad struktur</i></p> <p><i>Instruerande dialog:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> – svara på scaffolding – revidera utifrån feedback <p><i>Samkonstruktion i dialog</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - bygga på kamrats bidrag – argumentera – utmana
Kognitiva processer	<p><i>Delta i processer:</i></p> <p>Aktiverar och söker befintlig kunskap</p> <p>Koda av eller lagra ny information (minnesbelastning).</p> <p>Söker befintlig kunskap.</p>	<p><i>Skapa processer:</i></p> <p>Antyda ny kunskap. Integrera ny information med befintlig kunskap. Organisera egen kunskap i ett sammanslutning. Rekonstruera egen kunskap.</p>	<p><i>Gemensamt skapa processer:</i></p> <p>Skapande process som integrerar med en partners bidrag.</p>

Tabell 1. Chi's (2009) taxonomi om aktiviteter (*min översättning*)

6. METOD

Föreliggande studie är en delstudie av en större studie, ett av Veten-skapsrådet finansierat projekt vid namn FASETT¹ som pågick under åren 2015–2018. Projektet som involverade totalt tre mindre kommuner i sydvästra Sverige, två interventionsgrupper och en jämförelsegrupp, hade sin utgångspunkt i ett antagande om på vilket sätt aritmetiska färdigheter utvecklas. Den här studien behandlar jämförelsegruppen, vars verksamhet i princip skulle pågå som vanligt, ”business as usual”, med ett undantag, den kollegiala kompetensutveckling som pågick under läsåret och beskrivs i den första delstudien (Björklund & Alkhede, 2017). Den eventuella påverkan som detta kollegiala arbete har gjort i och för verksamheten, direkt eller indirekt, ligger utanför ramarna för denna studie. Tilläggas kan även att gruppens femåringar blev intervjuade vid tre tillfällen under tiden av FASETT -projektet. I detta sammanhang bör det även nämnas att innevarande studie har genomförts inom ramarna för forskarskolan FoRFa².

¹ FASETT – Förmågan att sinnligt erfara de tio första talen. VR: 721-2014-1791

² FoRFa – 2014–2018 Forskarskola i kommunikation och relationer som grundläggande för barns lärande.

Urval och deltagare

Studien omfattar fyra förskoleavdelningar med sammanlagt 74 barn, 14 förskollärare¹ och en förskolechef². De förskollärare som deltog hade olika utbildningsbakgrund, både barnskötare och förskollärare, och olika antal års yrkeserfarenhet, mellan 5 och 20 år. Datainsamling har skett under hösten 2015 till våren 2016. Tillsammans har två forskare (varav författaren är en) under perioden genomfört sex möten med förskollärare. Vid dessa möten, som fortsättningsvis benämns lärarträffar, har samtal förts och reflektioner gjorts om förskollärarnas autentiska aktiviteter, det icke sakkunniga lärandet av tal och räkande som innehåll för lärande. Ansatsen är reflekterande med utgångspunkt i pedagogisk dokumentation. Ytterligare insamling av data, genom videoinspelningar, har författaren av den här uppsatsen genomfört på egen hand genom att besöka förskolorna vid ytterligare tillfällen utöver de ovan nämnda lärarträffarna. Förutom de förskollärare som deltog under lärarträffarna förekommer även andra förskollärare i videoinspelningarna . Alla namn i studien, på förskolor, förskoleavdelningar och personer är fiktiva.

Nedan följer en beskrivning av studiens förskolor (A, B, C och D) och de avdelningar som deltog i studien.

¹ Valt begrepp för personal på förskolan. Förskollärare, egentligen förskolepersonal, då utbildningsgrad, barnskötare och förskollärare inte redovisas i studien.

² Förskolechef tituleras numera rektor.

Förskola A - fyra avdelningar med barn i åldrarna 1–5 år. Avdelningen Anemonen bestod av 22 barn och fem förskollärare. Profil: *Varvar lek med planerade aktiviteter. Inflytande och delaktighet. Tillgodosar barnens nyfikenhet. Ekologisk mat.* Förskolan är belägen i ett mindre bostadsområde med blandad bebyggelse, mycket nära till naturområden.

Förskola B - fem avdelningar med barn i åldrarna 1–6 år. Avdelningen Blåklockan bestod av 20 barn i åldrarna 3–6 år och fem förskollärare. Under fem av de månader studien pågick hade Blåklockan sin verksamhet i andra lokaler i kommunen, pga. renoveringsarbete. Förskolan är belägen i centrum av ett större bostadsområde med blandad bebyggelse, nära till naturområden. Profil: *Främja leken. Nära naturen. Stärka barnens intresse för att lära.*

Förskola C - två avdelningar. Avdelningen Cikorian, var precis som Blåklockan, utlokaliserad i fyra månader under studien även här pga. renoveringsarbete. Cikorian bestod av 18 barn i åldrarna 4–6 år och tre förskollärare. Profil: *Leken i fokus. Arena för samspel och kommunikation. Olika är bra. Människors lika värde.* Förskolan är belägen i utkanten av ett bostadsområde med till största delen enfamiljshus, med naturen som granne.

Förskola D - fyra avdelningar med avdelningen Daggdropen som en nystartad avdelning, i nya lokaler utanför huvudbyggnaden. Daggdropen bestod av 14 5-åringar och tre förskollärare. Profil: *Eget kök. Alla får vara med. Alla är lika mycket värda.* Förskolan ligger i centrum av ett mindre samhälle där bebyggelsen till största delen består av enfamiljshus. I direkt närhet till naturområde.

Datainsamling

Insamling av studiens data (september 2015 till juni 2016) består av: ljudinspelningar (transkriberade) och anteckningar från sex lärarträffar samt förskollärarnas 40 dokumentationer bestående av texter, bilder och videofilmer. Vidare så genomfördes videoinspelningar av spontana och planerade aktiviteter med innehåll av tal och räknande från respektive förskoleavdelning vid tre tillfällen på förskolorna A, C och D, samt vid fyra tillfällen på förskola B. Insamlat datamaterial, deltagare i respektive moment (lärarträffar, videoinspelningar av planerad aktivitet och övriga videoinspelningar), storlek på barngrupp samt inspelningsdatum (antal sekvenser och tid för inspelnning av författarens inspelade videosekvenser) samt ett förtydligande vilka av författarens videofilmer som även diskuterades under lärarträffarna kan studeras i bilaga 1.

Utifrån detta datamaterial presenterat ovan redovisas här (tabell 2) underlag för respektive delstudie. Den första delstudien (Björklund & Alkhede, 2017) behandlar lärarträffarna; intervjugamtal och diskussioner, förskollärarnas dokumenterade aktiviteter och författarens videofilmer. Den andra delstudien (Alkhede & Holmqvist, 2020) behandlar data från två videoinspelningar av den aktivitet ("Var är skatten?") som två förskollärare planerade och insatte med respektive barngrupp.

	Artikel I	Artikel II
Skolform	Förskola	Förskola
År	Läsxåret 2015–2016	Läsxåret 2015–2016
Urvälj av deltagare		
<i>n</i> förskoleavd.	4	2
<i>n</i> förskollärare	8	2 ledande (5 närvarande)
<i>n</i> barn	74	27
Ålder på barn	4–6 år	4–6 år
Typ av data		
Videofilm	11 sekvenser	2 sekvenser
Total tid - videofilm	1 tim 20 min	27 min
Intervjugamtal	6	-
Total tid - intervjugamtal	11 tim 30 min	-
Övrigt: Anteckn. lärarträff Förskolär. dokument	40 texter, bilder och videofilmer	-

Tabell 2. Redovisad data som underlag för respektive delstudie

Genomförande

I augusti 2015 hölls ett introduktionsmöte med forskare, förskollärare och förskolechefer, i en av kommunens förskolor. ”Projektet 2015–2016” introducerades, genom en presentation av studiens plan (bilaga 2). Under detta första möte beslutades det även om mer praktiska delar såsom tidpunkt och plats för lärarträffarna samt hur vi på bästa sätt skulle kunna kommunicera inom studien, bland annat gällande förskollärarnas inlämning av dokumentation. Dryga två veckor efter den första lärarträffen startade förskolecheferna en Blogg på kommunens IT-plattform i en sluten grupp. Medlemmarna i Bloggen ”Projektet 2015 – 2016” har bestått av fyra förskolechefer, tio förskollärare och två forskare. Här följer en beskrivning av tillvägagångssätt och innehåll för dessa lärarträffar och videoinspelningar.

Lärarträffar

Under ett läsår (september – april) deltog åtta förskollärare från fyra olika förskolor (A, B, C och D) vid sex tillfällen i gruppdiskussioner om matematik i förskolan, mer precist om tal och räknannde i förskolan. En eller två förskollärare per förskola deltog under respektive möte, med undantag av den fjärde och den femte lärarträffen, då förskola D, representerades av tre styck förskollärare. Gruppens fokus låg på att dela med sig av sina erfarenheter och kunskaper kring taluppfattning och räknefärdigheter i förskolan. Diskussionerna hade en kollektiv ingång, med andra ord förskollärarna var själva drivande i sin

yrkesutveckling genom sina egna dokumentationer av arbetet med tal och räkna. Forskarnas roll var att hålla förskollärarna fokuserade på innehållet. Sex lärarträffar blev genomförda under studien, varje möte pågick i ca 2,5 timmar, turvis på någon av de deltagande förskolorna. Dessa lärarträffar hade som syfte att diskutera förskollärarnas egna dokumentationer från respektive verksamhet. Lärarträffarna är ljudinspelade och därefter även transkriberade. Inspelningstid: 11 timmar och 30 minuter. Dokumentationerna, sammanlagt 40 stycken, samlades upp på kommunens IT- plattform via Bloggen, och bestod av texter, bilder och videofilmer. Alla 40 dokumentationerna presenteras och redovisas i den första artikeln, Björklund och Alkhede (2017).

Planen för gruppen sträcker sig från september 2015 till april 2016 (bilaga 2) . Under projektets gång komмуunicerades planen med lärarna, dels genom den inbjudan som skickades ut inför varje ny lärarträff, dels genom utskick av de mötesanteckningar som gjordes av en av forskarna under pågående lärarträff. Kommunikation skedde via e-post och Bloggen ”Projektet 2015 – 2016”. I planen för gruppen finns tre återkommande frågeställningar; När räknar man i förskolan? Hur räknar barnen? och Hur ser interaktionen ut när man räknar med barnen?

Tematiken vid den första träffen var Matematik i förskolan och förskoleåldern. Vad vet vi om barns taluppfattning och

räknefördigheter? Hur gestaltar sig taluppfattning och räknefördigheter bland förskolebarn? Under den första lärarträffen, då ingen dokumentation ännu fanns inskickad, rörde sig samtalet mer om att uppmärksamma och reflektera över matematiken, både för egen del och i verksamheten. Uppdraget till följande lärarträff var att dokumentera matematikarbetet (tal och räknannde) i verksamheten. Den andra lärarträffens tematik handlade om barnens matematik. Reflektion och respons på dokumenterat matematikarbete. Vad, hur och varför? Till lärarträff nummer tre skulle lärarna dokumentera utifrån följande frågeställningar: När räknar man i förskolan? Hur räknar barnen? samt Hur ser interaktionen ut när man räknar med barnen? Vid tillfälle nummer tre presenterades helt kort underlaget för 2010 års reviderade läroplan för förskolan, Förskola i utveckling (Utbildningsdepartementet, 2010) med fokus matematik, som en förberedelse inför läsning, dokumentation och samtal vid lärarträff nummer fyra. Texten och dess innehåll diskuterades och kopplades till förskolans läroplan Lpfö98 reviderad 2010. Förutom det förstärkta uppdraget inom matematik behandlar texten även de av Bishop's (1988) beskrivna sex kulturhistoriska matematiska aktiviteter (Räkna, Mäta, Lokalisera, Designa, Leka och Förklara). Dessa sex aktiviteter fick ligga som grund för uppdraget inför nästkommande dokumentation. Under den näst sista träffen diskuterades Bishop's (1988) kulturhistoriska matematiska aktiviteter jämte en progression i räknefördigheternas utveckling. Till den sista

lärarträffen återkommer uppdraget kring frågorna som tidigare, behandlats under träff nummer två: Hur räknar barnen? När räknar man i förskolan? och Hur ser interaktionen ut när man räknar med barnen i olika aktiviteter? Under den sjätte och sista lärarträffen blickade vi tillbaka till tidigare lärarträffar och forskarna presenterade en sammanfattning och en progression av innehållet i de dokumentationer som förskollärarna bidragit med och som diskuterats under träffarna.

Videoinspelning

Videoinspelning är ett kraftfullt verktyg för att fånga, tolka och analysera barns kunnande och lärande. Då videoinspelning är en stark dokumentationsform (Heikkilä & Sahlström, 2003) som kan förstärka och lyfta diskussionerna kring förskolans matematik under lärarträffarna, beslutades det en bit in i studien att aktiviteter i verksamheten skulle videofilmas av en av forskarna, författaren till den här uppsatsen. Videoinspelning av aktiviteter har skett vid tre tillfällen per förskoleavdelning (fyra tillfällen på Blåklockan), både av spontana och planerade aktiviteter. De videosekvenser som ligger till grund för den andra delstudien har även transkriberats. För att än tydligare komma åt interaktionen mellan barn och förskollärare ombads förskollärarna inför det tredje tillfället för videoinspelning att faktiskt planera och iscensätta en aktivitet med matematiskt innehåll och med fokus på taluppfattning och räknefärdigheter. Elva sekvenser från dessa videoinspelningar har tillsammans med förskollärarnas egena

dokumentationer används som diskussionsunderlag under lärarträffarna. Sammanlagt finns ett empiriskt underlag på 58 sekvenser i en sammanlagd längd av 5 timmar och 35 minuter (bilaga 1). På två av förskoleavdelningarna A och D, var videokaameran av stort intresse för barnen. De ställde frågor om videokameran och de ville själva filma och se på det som spelats in. På förskoleavdelningarna B och C var det inget av barnen som visade intresse för videofilmandet.

Analysmodell

I den första delstudien (Björklund & Alkhede, 2017) har en innehållsanalys av förskollärarnas 40 dokumentationer (text, bild och videofilm) genomförts utifrån variationsteoretiska antaganden. Med andra ord; vilka aspekter av tal och räkna som lärandeobjekt, uttrycktes i lärarnas dokumentationer? Förskollärarnas huvudfokus har varit att bidra med dokumentationer av tal och räknande, ett innehåll för lärande i deras dagliga pedagogiska verksamhet. Dessa dokumentationer har varit centrum för diskussioner i fem (vid första lärarträffen hade ännu inga dokumentationer samlats in) återkommande lärarträffar under åtta månader. Ljudinspelningar och anteckningar från dessa har stöttat i tolkningen av de visuella, ljud- eller grafiska dokumentationerna. Dokumentationerna själva är den viktigaste datakällan i denna studie, kompletterad med de inspelade diskussionerna där lärarna uttrycker vissa avsikter eller tolkningar. Eftersom målet var att studera förskollärarnas urskiljning av tal och

räknande över tid, är det viktigt att dokumentationerna analyseras kronologiskt, för att upptäcka varje framsteg i att urskilja aspekter av tal och räkna som innehåll för lärande. Den analytiska strategin kommer att ge en beskrivning av denna specifika grupp förskollärare och deras lärande om tal och räkna som innehåll för lärande i förskolan.

Variationsteorins antaganden (Marton, 2015) riktar uppmärksamhet på vilka aspekter av tal och räknande som innehåll för lärande som uttrycks i lärarnas dokumentationer. Varje dokumentation har beskrivits i termer av vad som var framträdande i texten, bilden eller videoinspelningen, med stöd av lärarens egena uttryckta avsikter och tolkningar från lärarträffarna. De utgör aspekter som synliggör lärarnas uppfattning av lärandeobjektet. Genom att tolka aspekterna synliga över tid, fick vi reda på hur olika aspekter framträdde som centrala och nya aspekter som blev synliga för lärarna resulterade i huruvida de utökade sina uppfattningar av tal och räknade som lärandeinnehåll i förskolan och besvarar frågeställningarna:

- Hur hanterar förskollärare innehållet i aktiviteter avseende barns utveckling av taluppfattning och räknefördigheter?

- Hur uttrycker sig förskollärarna om innehållet i sin undervisning om taluppfattning och räknefördigheter?

I den andra delstudien (Alkhede & Holmqvist, 2020) har videoinspelningar från två olika förskolegrupper av barn i åldern 4–6 år, i en av förskollärarna planerad och iscensatt aktivitet, transkriberats och analyserats. Båda forskarna såg videoinspelningarna för att jämföra dem mot transkriptionerna för reliabilitetsbedömning. Materialet har även analyserats under seminarier med andra forskare. För att validera artikelförfattarnas tolkning initialt utfördes en beskrivande analys av vilket innehåll som presenterades under aktiviteternas iscensättande. Den beskrivande analysen fångar frekvenser för hur räkneord användes under aktiviteten av både barnen och lärarna. I vilken form uttrycker deltagarna räkneorden, i nominal, ordinal eller kardinal form? Analysen fokuserade också på att upptäcka vilka möjligheter för lärande som erbjöds barnen. Vilka aspekter av tal och räknande, talrepresentationer och talrelationer erbjuds att lära i aktiviteten? Innehållet analyserades baserat på variationsteori (Marton, 2015), medan aktiviteterna analyserades genom Chi's (2009) ramverk för aktiviteter. Genom att använda Chi's (2009) taxonomi (tabell 1), där aktiviteter definieras som aktiva, konstruktiva och interaktiva kan aktiviteters egenskaper jämföras, peka på det som är synligt samt visa på de kognitiva processerna.

Kvalitet i forskning

För att en kvalitativ studie ska vara av god kvalitet bör vissa kriterier uppfyllas (Larsson, 1986/2011; Tracy, 2010) med kriterier såsom ämnets relevans och logik, att studien är

teoretisk grundad och om studiens trovärdighet och generaliseringarbarhet. Då kvalitativ forskning till stor del handlar om att förstå och tolka ett material som trovärdigt ska presenteras, ställs krav på forskaren gällande en medvetenhet kring den inverkan en förförståelse kan ha på studien. Forskaren befinner sig ofta nära, i miljön och de männskor som studeras. Tracy's åtta kriterier (kursiverade) för excellent kvalitativ forskning relateras här till innevarande studie. Det handlar om tolkning i mötet med förförståelsen, den egna förståelsen av fenomenet – *credibility*. ”Den kvalitativa forskaren utgör dessutom sitt eget verktyg för att samla in data från fältet och för att analysera det empiriska materialet” (Svensson, 2015, s. 210). Tracy (2010) diskuterar den transparens i forskningsprocessen som bör råda för att forskaren ska uppfattas som uppriktig – *sincerity* – och pekar på vikten av öppenhet gällande metoder och utmaningar. Studiens ämne, matematik i förskolan, är relevant och aktuellt - *worthy topic* - då matematik är ett av de områden som en mänsklig bör ha kunskap om och kunna förhålla sig till för att kunna förstå och utvecklas i sin omvärld. Om detta står det mer att läsa om, bland annat i bakgrunden till studien. Huruvida studien är teoretiskt väl grundad och datamaterialet är både tillräckligt och lämpadt - *rich rigor* – ska läsaren kunna bedöma i kappans text, förutsatt att den där är grundligt och tydligt presenterad.

Att presentera studien i text på ett så transparent och tydligt sätt som möjligt både gällande tillgänglighet och innehållsmässigt beskriver Tracy som en ”estetisk merit” – *resonance*. Viktigt för kvaliteten är även att studien bidrar med kunskap om något - *significant contribution* - vilket resultatkapitlet bör beskriva. De metoder och rutiner som författaren använt sig av för att genomföra sin studie bör vara avpassade sammanhanget, matematik i förskolan - *meaningful coherence*. Videoinspelning är ett kraftfullt verktyg för att fånga, tolka och analysera barns kunnande och lärande. Med de teoretiska perspektiv som valts, och med de analysverktyg som presenteras, kan syftet uppnås och frågeställningarna bli besvarade. Tracy’s kriterium - *ethical* - diskuterar etiska frågor där studien har följt Vetenskapsrådets (2017) etiska krav gällande information, samtycke och konfidentialitet (förvaring och hantering av data så att den inte sprids till obehöriga). Skriftligt medgivande har inhämtats från utbildningsansvarig i kommunen, förskolecheferna och vårdnadshavarna. Projektet FASETT, vilken den här studien är en del av, har genomgått Etikprövning som har godkänts av Regionala etikprövningsnämnden i Västra Götaland. En godkänd etisk tillämpning av projektet har mottagits 2015-04-27 Dnr: 258–15.

I studien är det förskollärarna som är i fokus, inte barnen. Studien fokuserar på förskollärarnas lärande och deras planering och iscensättande av aktiviteter. Även om det inte är barnen i sig

som studeras så sker datainsamlingen mitt under pågående verksamhet. Under lärarträffarna satt alla deltagarna avskilt i en lokal på respektive förskola. Under videoinspelningarna av aktiviteterna presenterades jag som; en besökare som var intresserad av och nyfiken på vad som händer på förskolan. Videokamerans uppgift var att komma ihåg, stötta minnet. Att videofilm en aktivitet utan att barn på något sätt kommer med går naturligtvis inte. De barn som ingick i projektet FASETT, vars vårdnadshavarna inte gett sin tillåtelse till att deras barn skulle få vara med på bild, filmades aldrig under aktiviteterna. Oavsett om barnen fick filmas eller inte så har alla ansikte i videoinspelningarna av aktiviteterna bearbetats till oigenkännlighet samt anonymiseras. Allt insamlat datamaterial, även lärarnas dokumentationer (text bild och videofilm) har anonymiseras.

Forskarrollen

Under studiens gång och i olika sammanhang har jag medvetet behövt arbeta med mina dubbla roller; i min roll som lärare, den profession som jag är i sedan 40 år tillbaka och i min nya roll som forskare. Vad är då skillnaden mellan dessa roller? Är forskaren deltagande observatör eller observerande deltagare? Det finns flera avvägningar för forskaren att göra. Vilken roll är den överordnade? Om forskaren (som deltagare) tar till sig värden och normer i den studerade gruppen kan det hända att forskaren inte reflekterar över dessa i förhållande till forskningsintresset. Fördelen kan dock vara att

som deltagande observatör kan forskaren förstå kontexten, personal och olika situationer. Hammersley och Atkinson (2007) anger att det finns ytterligare roller emellan dessa ovan nämnda. Det kommer att uppstå tillfällen då situationen kräver att observatören kommer att behöva engagera sig socialt och lägga forskningsintresset åt sidan. Det pågår (och måste så vara) en ständig diskussion kring forskarens positionering och relation till det studerade. I min roll som lärare är jag trygg och kompetent och kanske finns det delar i min undervisning som går per automatik. Per automatik så tillvida att min didaktiska erfarenhet sitter i ryggmärgen. I min roll som forskare har jag fått möjlighet till ett annat perspektiv på undervisning och kunnat reflektera över hur studiens förskollärare hanterat densamma. I min roll som forskare har jag fått påminna mig om (i detta har även mina handledare här varit påpassliga) och tränat på mina färdigheter av att observera och analysera mer än att (som i min lärarroll) planera och genomföra, exempelvis i intervjugssammanhang och i undervisningssituationer. Då jag är välbekant med och har kunskap gällande lärmiljön, undervisning och även inom matematikområdet har jag uppmärksammat och uppmärksammats på att ”se det jag ser” och inte ”se det jag vill och tror att jag ser”. I detta sammanhang har datainsamlingens transkriptioner och videoinspelningar varit till gott stöd. Däri finns möjligheter att läsa, lyssna och se till en situation vid upprepade tillfällen.

7. RESULTAT

I kapitlet redogörs det övergripande resultat som denna uppsats bidrar till genom sitt syfte och frågeställningar. För att besvara dessa har de två delstudiernas resultat utgjort grunden. Initialt i detta kapitel redovisas därför en sammanfattning av de båda artiklarnas syften och forskningsfrågor kopplade till uppsatsens syfte och forskningsfrågor. Artiklarna presenteras i korthet. Avslutningsvis görs en syntes för att besvara det övergripande syftet.

Författaren till denna uppsats har bidragit med och varit delaktig i alla delar som ingår i processen av att färdigställa en artikel (insamling av datamaterial, videoinspelning, transkription, analys, skrivande och revideringar).

Studiens övergripande syfte är att beskriva på vilket sätt förskollärare utvecklar och iscensätter aktiviteter om tal ochräknande, och vilket kunnande som blir möjligt för barnen att utveckla. Målet är att studien ska bidra med fördjupade kunskaper om hur olika planeringar och iscensättande av aktiviteter genererar olika möjliga lärtillfällen av aritmetiska färdigheter för barnen.

Studiens preciserade frågeställningar:

- Hur hanterar förskollärare innehållet i aktiviteter avseende barns utveckling av taluppfattning och räknefördigheter?
- Hur uttrycker sig förskollärarna om innehållet i sin undervisning om taluppfattning och räknefördigheter?
- Hur kan insikter om förskollärares uppfattningar av sin undervisning om tal och räknande bidra till utökad förståelse av barns förutsättningar för utveckling av aritmetiska färdigheter?

Den första frågeställningen besvaras främst genom artikel 1 (och underordnat i artikel 2), den andra frågeställningen besvaras främst genom artikel 2 (och underordnat i artikel 1). Den tredje frågeställningen besvaras genom en syntes av resultaten i de båda artiklarna.

Artikel 1

Sharpening the focus on numbers and counting: Preschool educators differentiating aspects of mathematical knowledge for teaching.

Camilla Björklund & Maria Alkhede (2017)

I den första delstudien beskrivs en process kring förskollärares kollektiva lärande. Genom att reflektera och diskutera egna

dokumentationer utvecklas de i sin profession kring lärandet av tal och räknande i aktiviteter med barn. Med andra ord, förskollärares egna dokumentationer och samtal om tal och räknande som innehåll för lärande i verksamheten. I de senare dokumentationerna finns det många fler tillfällen för lärande, detta för att fokus då riktas mot en kritisk aspekt gällande utbildning – barnens meningsskapande gällande lärandet av tal och räknande. Förskollärarna i studien urskiljer flera dimensioner och aspekter av tal och räknande under studiens gång, såsom förekomsten av siffror och tal i barnens aktiviteter, innebördens av att använda tal och räknande, barnens identifiering av tal och räknande, skillnader i barns kunskaper och förmågor samt tals innehörder.

Under ett läsår (september – april) deltog åtta förskollärare från fyra olika förskolor i en studie om matematik i förskolan med fokus på taluppfattning och räknefärdigheter. Med utgångspunkt i den egenhändigt utformade dokumentationen uppmuntrades förskollärarna att dela med sig av sina erfarenheter och sin kunskap kring matematiken i förskolan. Dokumentationerna, 40 till antalet i form av text, foto och film, samlades in via kommunens IT-plattform, utgör grunden för vår analys men är även utgångspunkten för de diskussioner som förskollärarna förde med forskarna. Vid sex tillfällen under läsåret diskuterades barnens matematik, Vad? Hur? och Varför? I studiens analys redogörs för

hur lärarna uppfattar taluppfattning och räknefördigheter som ett innehåll för lärande, samt vilken matematik som barnen erbjuds att lära i förskolan.

Med variationsteorin som ansats beskriver och identifierar vi hur de deltagande förskollärarna urskiljer taluppfattning och räknefördigheter som ett innehåll i förskolans matematiklärande. Att lära är enligt variationsteorin en process av att urskilja fler och fler aspekter av ett fenomen, i detta fall är det förskollärarna som lär sig om sin egen verksamhet, hur tal ochräkande blir innehåll för lärande. I ett kollektivt lärande, såsom när en grupp förskollärare träffas och delar med sig av sina erfarenheter, är möjligheterna stora till att det i diskussionen dyker upp skilda sätt att förstå det som diskuteras. Skillnaderna beror på att förskollärarna urskiljer olika aspekter av samma fenomen. I variationsteoretiska termer handlar detta om att öppna upp dimensioner av variation där deltagarna tillsammans utforskar hur aspekter varierar inom fenomenet och mellan fenomen.

Resultatet visar att förskollärares lärande om ämnesinnehåll är en komplex process, då området tal ochräkande kräver kunskaper om och förståelse för innebördar av en stor mängd begrepp och principer (Björklund, 2013; Björklund & Palmér, 2018). Förskollärarnas delade erfarenheter, det kollektiva lärandet, gör det möjligt för dem att urskilja nya aspekter av tal ochräkande.

Ytterligare resultat handlar om vilka aspekter som urskiljs över tid i processen: från att främst prata om förekomsten av räknande i barnens aktiviteter till att upptäcka skillnader i barns kunskaper och färdigheter, fram till att själva dokumentera processen av att utforska tal och räknande som ett objekt för lärande. Detta resultat pekar även på att vissa aspekter är grundläggande för att andra aspekter ska framträda, såsom förekomsten av tal och räknande i barns aktiviteter, för att kunna se skillnader i barns kunskaper och färdigheter. Med andra ord, en förutsättning för att kunna urskilja *hur* barn gör när de räknar, är att kunna urskilja *till vad och när* de använder tal och räknande.

Studien bidrar till en djupare förståelse för de utmaningar som ligger i förskollärarnas eget lärande avseende ett ämnesinnehåll, men visar också på möjligheter som finns i processen av att, genom det kollektiva lärande, fokusera på tal och räknande som ett innehåll för lärande. I en profession där grundutbildningen är av mer allmän art men där lärandet kräver viss ämneskunskap kan detta vara avgörande för utveckling både för förskollärare och för barnen i förskolan.

Artikel 2

Preschool children's learning opportunities using natural numbers in number row activities.

Maria Alkhede & Mona Holmqvist (2020)

Syftet med den andra delstudien var att studera hur förskollärare, utifrån en och samma beskrivning av en aktivitet, iscensätter sin undervisning. Med utgångspunkt i aktiviteten ”Var är skatten?”, som handlar om talens ordning och relationer mellan talen 1–10, fick två grupper med förskolebarn i åldern 4–6 år erbjudanden om att urskilja, lära och utveckla tal. Beroende på hur förskollärarna iscensatte aktiviteten, vilka former av tal som erbjöds att urskiljas samt inom vilken av Chi's (2009) former (aktiv, konstruktiv, interaktiv) aktiviteten genomfördes påverkades barnens möjligheter till lärande under aktiviteterna.

Ursprungligen var det fyra förskollärare som ombads planera och iscensätta en aktivitet med innehåll av taluppfattning och räknefördigheter. Syftet var att studera olika lärandemöjligheter som uppkommer i iscensättande av aktiviteter. Två av dessa fyra förskollärare genomför oberoende av varandra, en aktivitet av samma ursprung ”Var är skatten?”. Detta gjorde det möjligt att studera lärandemöjligheter av två iscensättande av en aktivitet (vad och hur). Videoinspelningar av vad barnen erbjöds att urskilja användes i analysen, vilken baserades på variationsteori

(Marton, 2015) och Chi's (2009) taxonomi av lärandeprocesser i en aktivitet (tabell 1).

Skillnaderna i aktivitetens genomförande ligger i förskollärarnas sätt att ta sig an lärandesituationen och vilka variationsmönster av tal som erbjöds. Lärandeobjektet tal erbjuds i det ena utförandet att urskiljas som nominaltal och ordinaltal. De representationsformer av tal som erbjöd var räkneord och symboler för tal. Medan tal i det andra utförandet presenteras som; nominaltal, ordinaltal och kardinaltal. De representationsformer som erbjöds var räkneord, symboler för tal, bild, samt konkreta föremål. Med andra ord, en av barngrupperna ges större möjlighet att urskilja aspekter av lärandeobjektet simultant. En kritisk aspekt av tal är enligt Resnick (1983) och Cross et al. (2009) den kardinala aspekten av tal. Att tillsammans med andra aspekter urskilja tal som antal är avgörande för utvecklingen av taluppfattning och därmed matematikutvecklingen.

Vidare så studerades även till vad, i vilken form, räkneorden användes. Bara för att barn kan rämsräkna, säga räkneorden i ordning betyder inte detta att barn har kunskap om talets innehörd (Fuson, 1988a). I aktiviteten med den ena förskolegruppen användes räkneorden främst som nominaltal (86%), men även som ordinaltal (13%), dock inte alls som kardinaltal (0%). I den andra

aktiviteten användes räkneorden som nominaltal (33%) ordinaltal (40%) och kardinaltal (6%).

Att utforma aktiviteter för matematiklärande för förskolebarn är både viktigt och utmanande. I leken, oberoende av om den är planerad eller spontan, kan ett lärande göras möjligt. Oavsett förskollärarens intention med aktiviteten påverkas barnens lärande. Forskning (Wickstrom, Pyle & DeLuca, 2019) pekar på att barns aktiva deltagande är den viktigaste faktorn för effektiva undervisningsinsatser och för att utveckla barns matematiska förmågor. Med stöd i Chi's (2009) taxonomi om aktiviteter (tabell 1), där olika aktiviteter definieras som aktiv, konstruktiv eller interaktiv, kan vi studera förhållandet mellan aktivitetsform och möjligheter till lärande. Att vara aktiv kännetecknas av att göra något fysiskt, som att peka, prata, titta och visa hur de svarar på materialet eller kommunikationen. De kognitiva processerna aktiverar tidigare kunskaper och handlar om att hantera och lagra ny information. På nästa nivå, i en konstruktiv aktivitet, producerar barnet ett resultat som går utöver den "information" det har fått. I en konstruktiv aktivitet observeras förklaringar, motiveringar, reflektioner samt nya sätt att planera. De kognitiva processerna handlar om när barnet bygger ny kunskap, genom att slå samman tidigare kunskap med ny kunskap, korrigera och organisera egen kunskap.

The framework consists of a taxonomy that generates a hypothesis, that interactive activities might be better than constructive activities, which in turn might be better than active activities, which would be better than passive activities. (Chi, 2009, s. 97)

Slutligen kännetecknas de interaktiva aktiviteterna av en dialog om samma ämne med avseende på andras perspektiv och kommentarer. Barnet konfronterar eller försvarar sina kunskaper, reviderar sina argument eller handlingar baserat på feedback från andra eller svarar på stöd. De kognitiva processerna tar hänsyn till partnernas bidrag. Detta innebär att barnens aktiva delta-gande, oavsett form av aktivitet, kan utvecklas mer eller mindre beroende på hur involverade de är i processerna.

Resultaten tyder på att aktiviteten med en begränsad varierad utformning var mer anpassad för lärande för de barn som hade behov av att urskilja mer enkla samband, till exempel att koppla samman symbolen för tal med det verbala uttrycket. Barnen med en mer utvecklad förståelse krävde en utformning med mer variation av aspekter av tal som nominal, ordinal och kardinala representationer. Skillnaderna mellan hur lärarna valde att iscensätta aktiviteterna resulterade i olika möjligheter att lära för barnen. Skillnaderna i vilka aspekter av tal som gjordes tydliga var nära kopplade till egenskaperna (interaktiv form) i den iscensatta aktiviteten. I en av förskolegrupperna fanns det möjligheter att urskilja den nominella formen av tal, medan den andra förskolegruppen hade fokus på alla former (nominal, ordinal och

kardinal) av tal samtidigt. Dessutom hade barnen i denna grupp möjlighet att utveckla ett - till - ett korrespondens, en förmåga som gynnar förmågan att urskilja tals kardinalitet (Cross et al., 2009). Resultaten visade även ett samband mellan hög grad av variation samt aktivitetsform (interaktiv form) medan barnen som hade en mindre variation av aspekter mötte en aktiv form där de mestadels pekar och benämner.

Studiens resultat bidrar med kunskap om hur utformningen av en aktivitet påverkar barnens lärande på olika sätt, vilket är viktig kunskap för att planera aktiviteter och undervisning för lärande.

Syntes

Studiens övergripande syfte är att beskriva på vilket sätt förskollärare utvecklar och iscensätter aktiviteter om tal och räknande, och vilket kunnande som blir möjligt för barnen att utveckla. Målet är att studien ska bidra med fördjupade kunskaper om hur olika planeringar och iscensättande av aktiviteter genererar olika möjliga lärtillfällen av aritmetiska färdigheter för barnen.

För att besvara det övergripande syftet har två studier genomförts, den första som fokuserar förskollärares intentioner med matematikaktiviteter med barnen, och den andra med fokus på förskollärarnas iscensatta matematikaktiviteter med matematiskt innehåll i förskolan. I den första studien framkom att

förskollärarnas kollektiva lärande utvecklades i projektet, men huruvida denna utveckling ledde till skillnader i vad barnen erbjöds var inte i fokus. I den andra studien fokuserades därför de iscensatta aktiviteterna, som båda utgick och komмуunicerades utifrån en och samma beskrivning av en aktivitet med matematiskt innehåll. Trots det blev det skillnader i iscensättandet, dels beroende på förskollärarnas olika sätt att förstå beskrivningen, dels utifrån deras möte med respektive barngrupp.

Den första frågan handlar om hur förskollärare hanterar innehållet i aktiviteter för barns utveckling av taluppfattning och räknefärdigheter. I den första studien finns resultat av hur förskollärarna uttrycker sig när de diskuterar matematik, taluppfattning och räknefärdigheter i sina dokumentationer av aktiviteter. Dess resultat visar att förskollärarnas lärande om ämnesinnehåll är en komplex process. Förskollärarnas delade erfarenheter gör det möjligt för dem att över tid urskilja nya aspekter av tal och räknande och därmed också hantera innehållet i aktiviteter på ett förändrat sätt. En förutsättning för att kunna urskilja *hur* barn gör när de räknar, är att kunna urskilja *till vad* och *när* de använder tal och räknande.

I den andra studien framkommer det tydligt att förskollärarna, trots att de utgår från samma beskrivning av en aktivitet, tolkar och iscensätter aktiviteterna helt olika. I sin tur ger dessa olika

aktiviteter två skilda möjligheter till utveckling för barnen. Frågan är om lärarna är medvetna om de skillnader de själva erbjuder utifrån sina val att iscensätta aktiviteten, eller om de är slumpmässiga val? För att besvara detta krävs mer framtida forskning.

Den andra frågan fokuserar på hur förskollärarna uttrycker sig avseende innehållet i sin undervisning om taluppfattning och räknefördigheter. Även här utgör den första studien en grund för hur vi kan förstå de iscensatta aktiviteterna i delstudie två. Genom att studera hur lärarnas kollektiva ämneskunskaper ökas genom projektet, utifrån analys av förskollärarnas förståelse, blir den andra studien en fördjupning för att se hur förskollärarna uttrycker sig avseende tal och räknande i iscensättandet av aktiviteterna. I de två matematiksituationerna som studerades uttryckte sig en förskollärare med begränsad begreppsvokabulär, medan den andra uttryckte mer distinkt begrepp som tydliggjorde likheter och skillnader mellan tals olika former. En förklaring till det kan vara att en av förskollärarna har en bättre ämnesdidaktisk grund, vilket forskningen inte har fokuserat. Det skulle vara en intressant frågeställning för kommande forskning, på vilket sätt förskollärares ämneskunskaper påverkar både aktivitetsformen och vad barnen erbjuds i lärsituationen.

Slutligen, den tredje forskningsfrågan ska besvara huruvida studiens resultat bidrar till utökad förståelse av barns förutsättningar för utveckling av aritmetiska färdigheter. I den första studien framkommer att vissa aspekter av tal är grundläggande för att andra aspekter ska framträda, såsom förekomsten av tal och räknande i barns aktiviteter. Genom ett kollektivt lärande, en process över tid, urskiljer förskollärarna nya aspekter av tal och räknande som ett objekt för lärande.

I den andra studien genomfördes analysen utifrån två olika teoretiska perspektiv, vilket visade på en ny teoretisk förståelse för sambandet mellan innehållets behandling och aktivitetsformer. Genom dessa båda teoretiska analyser framkom det att den lättare som har ett mer nyanserat och differentierat begreppsavhållande också hade den mest interaktiva formen i sin undervisning. Studien är begränsad till två fall, och därmed kan det inte uteslutas att denna skillnad är en slump. Även här finns det en möjlighet för vidare studier att fördjupa förståelsen för om detta är ett mer generellt samband eller ej. Oavsett begränsningen är det intressant att se på vilket sätt två olika teoretiska perspektiv kan bidra till en ny förståelse för den komplexitet som lärande i förskolan utgör.

8. DISKUSSION

Det övergripande syftet för studien är att beskriva på vilket sätt förskollärare utvecklar och iscensätter aktiviteter om tal och räkning, och vilket kunnande som blir möjligt för barnen att utveckla. Målet är att studien ska bidra med fördjupade kunskaper om hur olika planeringar och iscensättande av aktiviteter genererar olika möjliga lärtillfällen av aritmetiska färdigheter för barnen.

De resultat som främst framkom i de båda delstudierna är hur betydelsefull lärares kompetens är för barns möjligheter till lärande inom matematik. Resultaten från den första delstudien (Björklund & Alkhede, 2017) gällande förskollärares förhållande till ämnesinnehåll stämmer överens med de resultat som tidigare framkommit i studier av McIntosh et al. (1997) och Björklund, Pramling Samuelsson och Reis (2018). Ett resultat från den andra delstudien (Alkhede & Holmqvist, 2020) pekar på betydelsen av en lärares didaktiska kompetens, gällande utformning och iscensättande av en aktivitet vilket även här tidigare framkommit i studier (Marton & Booth, 1997; Chi, 2009; Marton, 2015). De båda delstudierna visar på lärarens betydelse för att skapa mening, organisera miljöer i en didaktisk anda samt

vikten av att presentera aktiviteter med en variation av innehållets aspekter som både utmanar och engagerar.

Hantera innehållet i aktiviteter

Den första forskningsfrågan, avser att undersöka hur förskollärare hanterar innehållet i aktiviteter för barns utveckling av taluppfattning och räknefördigheter. Resultatet i den första delstudien (Björklund & Alkhede, 2017) visar att förskollärarna, genom kollegial kompetensutveckling, över tid urskiljer fler och fler aspekter av innehållet i aktiviteter, fler aspekter av innehållet att förhålla sig till och hantera. Från att främst ha hanterat tal i form avräknande i barnens aktiviteter till att hantera tal som ett objekt för lärande (Marton & Booth, 1997; Marton, 2015).

En annan aspekt på forskning om undervisning på förskolans villkor är att den oftast utgår från ett perspektiv och belyser därmed ett skeende utifrån samma principer. I den andra delstudien som ingår i denna uppsats (Alkhede & Holmqvist, 2020) framkom vissa samband mellan undervisningens innehållsliga komplexitet och aktivitetsform vilket även tidigare studier pekar på (Chi, 2009). Genom att inte studera dessa aspekter isolerade från varandra framkom ett mönster som vore intressant att studera vidare i större och mer kontrollerade studier.

Uttrycka innehållet i undervisningen

Den andra forskningsfrågan handlar om hur förskollärarna uttrycker sig avseende innehållet i sin undervisning om taluppfattning och räknefärdigheter. Resultatet i den första delstudien visar förskollärarnas förändrade uttryck gällande tal och räknande, från att främst prata om förekomsten av räknande i barns aktiviteter till att uttrycka barns kunskaper om tal och räknande i aktiviteter. Resultat i den andra delstudien (Alkhede & Holmqvist, 2020) visar på olika möjligheter till lärande beroende på en mer eller mindre varierad utformning av aktiviteten. Tal kan presenteras på flera sätt (Lesh, 1981; Kilpatrick, et al., 2001) och detta gynnar förståelsen för tal. Beroende på viken nivå barn befinner sig på gällande förståelse av tal, krävs olika utformningar av en aktivitet som både utmanar och stöttar barn i lärandet (Holmqvist, 2004). I en mer varierad utformning kan fler barn erbjudas att på ett meningsfullt och relevant sätt använda tal (Cross, et al., 2009). Genom att organisera för undervisning och med variation synliggöra lärandeobjektet kan lärande möjliggöras (Holmqvist, Gustavsson & Wennberg, 2008). Barn utvecklar förståelse för tal i olika sammanhang och situationer. Genom att uppmärksamma barn på tal och räkneord i vardagen kan vi visa på tals betydelse och dess meningsfullhet (Björklund & Palmér, 2018).

Förutsättningar för utveckling av aritmetiska färdigheter.

Den tredje forskningsfrågan handlar om hur studiens resultat kan bidra till utökad förståelse av barns förutsättningar för utveckling av aritmetiska färdigheter. Resultatet i första delstudien (Björklund & Alkhede, 2017) bidrar till en djupare förståelse för de utmaningar som ligger i att lära, men visar även på de möjligheter som finns i processen av att fokusera på tal och räknande som ett innehåll för lärande.

Den andra delstudien (Alkhede & Holmqvist, 2020) bidrar till kunskap om sambandet mellan hög grad av variation i en aktivitet och aktivitetsform (Chi, 2009). Beroende på hur en aktivitet utformas påverkas möjligheterna till lärande.

I förskolan är matematik motiverat som kunskapsområde, dels genom att barn tidigt tillämpar matematik, dels att den är inskriven i våra styrdokument. Matematiken är dock osynlig i många sammanhang. Aritmetiken verkar förefalla som självklar (Pang & Ki, 2016) dock inte i sin fulla betydelse utan mer i form av räkneord och symboler för tal. Måluppfyllelse kräver dock att den som organiserar för lärande har didaktiska kunskaper såväl som ämneskunskaper.

Att organisera för matematiklärande

Det är viktigt att i verksamheten uppmärksamma komplexiteten i lärande om tal och räknande. Även att uppmärksamma att kunskaper om räkneord och namn på symboler för tal inte alltid är detsamma som kunskap om tals innebörd.

Subitizing ligger till grund för att förstå kardinalitet. Redan mycket små barn har förmåga att subitisera. Då kardinalitet i sin tur är grunden för fortsatt utveckling av taluppfattning (Baroody, 1987) är det viktigt att uppmärksamma och utveckla förmågan att uppfatta (inte räkna) ett litet antal. Genom att uppmärksamma barn på mönster och egenskaper som del-helhet, dela upp och sätta samman, kan förmågan av att subitisera utvecklas (Clements, 1999).

Många aspekter av tal och räknande kan kanske för oss vuxna ses självtala, men i vardagen kan de för vissa människor bli osynliga. Att förstå och använda tal i olika sammanhang och situationer handlar inte endast om (be)räknande. För att kunna förstå och använda tal behöver vi även känna till talens egenskaper. Det är även viktigt att visa på meningsfullheten, motivera, (be)räknandet och i detta dra nytta av barns naturliga önskan av att lära, upptäcka och undersöka tal (Howden, 1989). Vidare visa på talrelationer och talrepresentationer (Lesh, 1981; Kilpatrick, et al., 2001). Om man alltför fort inför symboler för tal bara för

att operera med kan de förbli symboler utan innebörd (Malmer, 1999; Ahlberg, 2000).

Min förhoppning är att jag med denna uppsats, genom att uppvisa att tal har fler aspekter än (de som är vanligast förekommande eller tagna för självklarheter), räkneord och symboler för tal, riktar uppmärksamheten mot aritmetikens komplexitet både gällande undervisning och lärande.

Metoddiskussion

Den metod som användes i de olika studierna kännetecknas av en kvalitativ praktiknära forskning. I den första delstudien var utgångspunkten de sex lärarträffar, där lärarnas egna dokumentationer av aktiviteter, reflektioner och diskussioner ligger till grund för en analys. Utgångspunkten, att utgå från lärarnas egna dokumentationer av tal och räknande, att dela med sig kollegialt, och att dela erfarenheter med varandra som kollegor, visade sig leda till utveckling av professionen. I den andra delstudien var utgångspunkten ett antal videoinspelade situationer i olika förskolor. Förskollärarna hade i detta sammanhang en frihet att själv välja och utforma aktiviteterna. De två situationer som valdes för analys utgick från en beskrivning av en och samma aktivitet. På det sättet framkom skillnader i innehållets behandling, där förskollärarnas inställning till hur aktiviteten skulle genomföras präglade utformningen. Den andra delstudien knyter här an till den första delstudien, där resultaten visar

förskollärares delade erfarenheter blir till en utveckling av innehållet i undervisningen. Den andra delstudien indikerar att ämneskunskaper kan ge didaktiska möjligheter att planera och iscensätta aktiviteter för ett lärande.

Då min studie är en del av en större studie, projektet FASETT, har jag förhållit mig till och agerat inom de ramar som gällt för jämförelsegruppen i projektet FASETT. Det som tillkommit är videofilmning av aktiviteter i verksamheten, vilka legat till grund för den andra delstudien. Tillsammans med andra forskare, har beslut tagits om vilka delar av matematiken som varit särskilt intressanta att fokusera på.

Fortsatt forskning

Det skulle vara mycket intressant att, i förskola eller förskoleklass, få genomföra en liknande studie likt den andra delstudien i större skala. Detta för att vidare fördjupa mig i den del som handlar om hur förskollärare planerar och iscensätter matematikaktiviteter med fokus på tal och räknande. Detta för att på ett mer generellt sätt göra ett uttalande om matematik- och aritmetikundervisning i förskolan.

För att förstå och hantera tal behövs det även språkliga kunskaper. Genom språket kan vi kommunicera, tänka och lära. Förutom förståelse för aritmetikens tal och räknande behöver vi även förstå semantiken, exempelvis i en problemlösning.

Språkets betydelse för utveckling av taluppfattning och räknefärdigheter bör inte undanskattas. Om man inte förstår semantiken, innebördens i ord som mellan, tillsammans, samt fler eller färre, kan det bli det svårt att lösa en uppgift. Jag har under mina år som lärare samlat på mig otaliga exempel på hur språket blir till ett hinder för att tillämpa matematiken. Risken är att okunskap om språkets betydelse felaktigt kan leda till tankar om matematiksvårigheter och bli ett hinder i matematikutvecklingen. Språk i relation till kunskap om tal har betydelse för hur man presterar i matematik (Miura & Okamoto, 1989). Det skulle vara intressant att studera språk (semantiken) och matematik i ett didaktiskt sammanhang i förskolan.

ENGLISH SUMMARY

This is the English summary of the essay *Aritmetik i förskolan – en studie av taluppfattningens betydelse för matematikundervisningen*. [Arithmetic in preschool – the importance of number sense in mathematics education.]

Introduction

In my role as a teacher, I have often met students who express having problems with mathematics. They say that they are “not good” at mathematics, that they are not interested in it, and that they have no use for it. After further conversations about mathematics in everyday life, about confidence in one’s own capacity, and about mathematical knowledge, I have found that the experienced difficulties relate to school mathematics, not mathematical reasoning per se. Students’ concern is about perceiving, handling, and using numbers; assessing the size of numbers; and understanding reasonableness in computational data (McIntosh, 2008). The part of mathematics that becomes an obstacle in everyday life concerns *arithmetic* and *number sense* (Dowker, 2005).

Arithmetic is the part of mathematic that deals with numbers and their basic properties, arithmetic methods, arithmetic strategies, and arithmetic rules. It is central to mathematics because

arithmetic skills are necessary to be able to handle several different areas of mathematics, such as geometry, algebra, and statistics (Baroody, Lai & Mix, 2005; Dowker, 2005; Sarama & Clements, 2008). Further, to operate with numbers, to use them in a purposeful and meaningful way, one must understand and manage quantities and the symbols that represent them. The concept of understanding and using numbers is termed *number sense*, and it is another important part of mathematics – not only for arithmetic but also for areas such as algebra, statistics, and problem solving. Number sense is about understanding and using numbers in different situations and contexts; it is the decisive factor when it comes to developing useful arithmetic strategies, making mathematical assessments, and being able to make decisions. Researchers believe that the conception of numbers is a fundamental part of mathematical development (Fuson, 1988a; McIntosh, Reys & Reys, 1992).

Number, including beginning arithmetic, is arguably the most important topic. To build a strong number sense, children must develop and link competencies in several areas, especially counting, recognition of the numerosity of small groups, comparing and ordering, and arithmetic. (Sarama & Clements, 2008, p.71)

Even very small children meet numbers and use their arithmetic skills (Fuson, 1991). Children use arithmetic words for nursery rhymes (one, two, three, four, five, once I caught a fish alive) and for enumeration of objects (one, two, three cars). Children also perceive numbers as quantities at an early age; they can

distinguish small numbers without counting, for example three dots on a dice (Wynn, 1995).

We become familiar with and apply mathematics (arithmetic in particular) from an early age, but for some people, somewhere along the way through education, it becomes both uninteresting and unusable. This raises questions about what happens in pre-school in practice regarding arithmetic and number sense. It also raises questions about how teachers manage the area in pre-school to achieve a learning progression. Perhaps children's knowledge of numbers as words and as symbols is mixed up with their arithmetic knowledge of the numbers, such as the order and quantity the numbers represent. Accordingly, activities that contain symbols for numbers do not automatically make the meaning of numbers clear to children.

Aim and research questions

The overall purpose of the study is to describe how preschool teachers develop and enact numbers and counting in activities with children, and how this affects what becomes possible for the children to learn. Namely, the study aims to contribute in-depth knowledge of how different planning and enacting of activities generates different learning opportunities for children to develop arithmetic skills.

Accordingly, the study addresses the following research questions:

- How do preschool teachers handle the content of activities regarding children's development of numbers sense and counting skills?
- How do preschool teachers express themselves regarding the content of their teaching of number sense and counting skills?
- How can insights about preschool teachers' perceptions of their teaching of numbers and counting contribute to expanded understanding of children's condition for the development of arithmetic skills?

The concepts used in this study are number sense, counting skills, and arithmetic skills. As previously stated, *number sense* means understanding and using numbers in different situations and contexts. *Counting skills* refer to being able to recite counting words (e.g. in a nursery rhyme) and use a counting word to enumerate objects. Additional counting skills concern understanding the parts and whole of a number and being able to use arithmetic methods and arithmetic strategies. These concepts – number sense and counting skills – can thus together be described as *arithmetic skills*.

Theoretical framework

This study employs two theoretical frameworks. The first describes assumptions about learning based on phenomenography and variation theory. The connection between teaching and learning that is pronounced in the theory of variation is highlighted in the two sub-studies. The phenomenographic approach contains theoretical assumptions about knowledge, about qualitative changes in perceptions of a phenomenon, and about the learning person in relation to the world (Marton & Booth, 1997; Lo, 201; Marton, 2015). The second theoretical framework is based on Chi's (2009) taxonomy of activities (Table 1), where different activities are defined as active, constructive, or interactive. With this taxonomy, we can study the relationship between activity form and opportunities for learning.

The theory of variation

The development from phenomenography, as a more descriptive research approach, to theoretical assumptions of the conditions of learning through variation theory, leads to a more pedagogically oriented theory for predicting and analysing teaching and learning in (learning) space (Marton & Tsui, 2004; Marton, 2015). Thus, phenomenography and theory of variation contribute to two different possible analyses of data, depending on the purpose of the researcher (Holmqvist & Selin, 2019). There is a variation in how people perceive and experience things. Each person experiences different aspects and, therefore, learns

differently. For learning to take place, the learner must discern several aspects of the learning object at the same time. That is, the learner must understand the parts and the whole of the learning object simultaneously. Learning takes place when the puzzle pieces with their respective characteristics such as colour and shape fit together and form a whole – a finished puzzle, a whole picture (Marton & Booth, 1997; Björklund, 2012). This study uses variation theory to discover the conditions necessary for learning. With the tools of variation theory, we can study what the learners are offered to learn rather than what they learn; thus, we can plan for and implement a more varied teaching. Variation theory was developed to emphasise the conditions required for learning based on the different experiences of the learners (Marton & Booth, 1997; Marton, 2015). Key concepts in the theory are discernment, variation, and simultaneity. For learning to take place, the learner must be given the opportunity to discern aspects of the learning object, aspects that together create an understanding of the whole. Learning is about changing perspectives, seeing a phenomenon in a new or changed way, discerning more aspects of it than the learner had previously discerned.

Chi's taxonomy about activities

Designing activities for mathematics learning for preschool children is both important and challenging. In play, regardless of whether it is planned or spontaneous, learning can be made possible. Regardless of the preschool teacher's intention with the

activity, if it is designed to offer opportunities for learning, it will affect the children’s learning. Research indicates that children’s active participation is the most important factor for effective teaching efforts and for developing children’s mathematical abilities (Wickstrom, Pyle & DeLuca, 2019). Using Chi’s (2009) taxonomy of activities (Table 1), we can study the relationship between activity form and opportunities for learning. Being active is characterised by children doing something physical, such as pointing, talking, looking, and showing response to the material or communication. The cognitive process in such activities activate previous knowledge and facilitate managing and storing new information. At the next level, in constructive activities, children produce results that go beyond the “information” they have received. Their activities at this level are explanations, linking previous knowledge to new knowledge, thereby allowing them to reflect and plan in new ways. The cognitive process in constructive activities involve children building new knowledge by merging earlier with new knowledge, correcting, and organising their own knowledge.

The framework consists of a taxonomy that generates a hypothesis, that interactive activities might be better than constructive activities, which in turn might be better than active activities, which would be better than passive activities. (Chi, 2009, p. 97)

Finally, the interactive activities are characterised by a dialogue about the perspectives and comment of others on a particular

topic. Children confront or defend their knowledge, revise their arguments or actions based on feedback from others, or respond to support. The cognitive processes consider the partners' contributions. This means that the children's active participation, regardless of the form of activity, can develop depending on how involved they are in the processes.

Methodological frame

This study investigates a comparison group originating från a project called FASETT, funded by the Swedish Research Council. This group's activities would in principle continue as usual ("business as usual") with one exception: the collegial competence development that took place during the academic year, which is described in the first sub-study (Björklund & Alkhede, 2017). The study includes four preschools with a total of 72 children, 14 preschool teachers, and a preschool director. Data collection took place during autumn 2015 to spring 2016. The study data consist of (transcribed) audio recordings and notes from six teacher meetings as well as the participating preschool teachers' documentation, which comprises 40 items of text, picture, and video.

Two researchers together conducted six meetings with eight preschool teachers during the aforementioned period. The meetings involved conversations and reflections on the preschool teachers' authentic activities, the staged learning of numbers, and

counting as a content for learning. The study's approach is reflective and based on pedagogical documentation. Furthermore, the author made video recordings of spontaneous and planned activities about numbers and counting from each preschool on three occasions at preschool A, C, and D, and on four occasions at preschool B. From these recordings, video sequences that are relevant for the second sub-study have been transcribed. To make the interaction between children and preschool teachers even clearer, preschool teachers were asked before the third opportunity for video recordings to plan and enact an activity with mathematical content and with a focus on numbers and counting. Collected data material are presented in Appendix 2. All names in the study of persons from preschools (i.e. teachers, children, etc.) are fictitious.

In the first sub-study (Björklund & Alkhede, 2017), the researchers carried out a content analysis of the preschool teachers' 40 items of documentation (text, picture, and video) based on the assumptions of variation theory. In other words, we investigated what aspects of numbers and counting as a learning object were expressed in the teachers' documentation. The preschool teachers focused on documenting numbers and counting, a content for learning in their daily pedagogical activities. These documentations have been the centre of discussion in five recurring teacher meetings for eight months. (At the first teacher

meeting, no documentation had yet been collected.) Audio recordings and notes from these meetings have supported the interpretation of the visual, audio, or graphic documentation. The documentation itself is the most important data source in this study, supplemented by the recorded discussion where the teachers' express certain intentions or interpretations. Since the goal was to study the preschool teachers' distinction between numbers and counting over time, the documentation had to be analysed chronologically, in order to detect any progress in distinguishing aspects of numbers and counting as a content for learning. The analytical strategy in this study provides a description of this specific group of preschool teachers and their learning about numbers and counting as content for preschool learning.

The assumptions of variation theory (Marton, 2015) draw attention to the aspects of numbers and counting as content for learning that are expressed in the teachers' documentation. Each documentation item has been described in terms of what was prominent in the text, picture, or video recording with the support of the teacher's own expressed intentions and interpretations from the teacher meetings. They constitute aspects that make visible the teachers' perception of the learning object. By interpreting these aspects over time, we found out how some of them emerged as central; moreover, new aspects that became visible to the teachers during the meetings influenced whether they

expanded their perceptions of numbers and counting as learning content in preschool.

In the second sub-study (Alkhede & Holmqvist, 2020), we transcribed and analysed video recordings of two different preschool groups of children, aged 4-6 years, in a preschool teacher planned and enacted activity. Both researchers viewed the video recordings to compare them with the transcript for reliability assessment. The material has also been analysed during seminars with other researchers. In order to validate the authors' interpretation, a descriptive analysis was initially performed of the content presented during the implementation of the activities. The descriptive analysis capture frequencies of the number words used during the activity by both the children and the teachers; it also showed the form in which the participants express the number words (i.e. nominal, ordinal, or cardinal form). The analysis also focused on discovering the learning opportunities offered to children; it investigated the aspect of numbers and counting, number representation, and number relations offered to learn in the activity. The content was analysed based on variation theory (Marton, 2015), while the activities were analysed through Chi's (2009) framework for activities. Using Chi's (2009) taxonomy (where activities are defined as active, constructive, and interactive; see Table 1) allowed the researchers to compare the

properties of activities, point out what is visible, and show the cognitive processes.

Results

The overall purpose of the study is to describe how preschool teachers over time handle and express themselves regarding numbers sense and counting skills in activities with children, and how this affects what becomes possible for the children to learn. The study aims to develop knowledge of how different planning and enacting of activities generates different learning opportunities for the children to develop arithmetic skills.

To achieve the overall purpose, two studies have been conducted – the first focusing on preschool teachers' intention in carrying out numbers and counting activities with the children, and the second focusing on the preschool teachers' enacted activities with numbers and counting as content in preschool. The first study showed that the preschool teachers' collective learning was developed during the project, but whether this development led to differences in what they offered the children was not in focus. The second study focused on the enacted activities in two groups. It revealed that, in both situations, the teachers based the activities on one and the same description of an activity with numbers and counting as content. Nevertheless, there were differences in the enacting, partly because the preschool teachers

understood the description differently and partly because their encounters differed with each group of children.

The first question addresses how preschool teachers handle the content of activities for children's development of number sense and counting skills. The first study reveals how preschool teachers express themselves when they discuss mathematics, numbers sense, and counting skills in their documentation of activities. Its results show that preschool teachers' learning about subject content is a complex process where their shared experiences enable them to distinguish new aspects of numbers and counting and thus also change the way they handle the content of activities.

The second question focused on how preschool teachers express themselves regarding the content of their teaching about numbers sense and counting skills. Here the first study also offers a foundation for understanding the enacted activities addressed in sub-study two. By analysing the preschool teachers' understanding and studying the changes in their collective content knowledge throughout the project, the second study offers an in-depth look into how the preschool teachers express themselves. In the two mathematical situations studied, one preschool teacher used limited concept vocabulary, where the other expressed more distinct concept that clarified similarities and differences between different forms of numbers. One explanation

for this may be that one of the preschool teachers has a better content didactic basis, which this research has not focused on. Therefore, future research, could investigate how preschool teachers' content knowledge affects both the form of activity and the content they offer to the children in the learning situation.

The third research question addresses the results of the study contribute to theoretical knowledge about children's condition for the development of arithmetic skills. The first study shows that certain aspects of numbers are fundamental for other aspect to emerge, such as the presence of numbers and counting in children's activities. Through a collective learning, a process that develops over time, preschool teachers distinguish new aspects of number sense and counting skills as an object for learning.

Discussion and Conclusion

This study describes how preschool teachers handle and express themselves about number sense and counting skills in activities with children, and how this affects what becomes possible for the children to learn. It aims to develop knowledge of how different activities generate different possible learning opportunities of arithmetic skills for the children.

The first sub-study (Björklund & Alkhede, 2017) describes a process of preschool teachers' collective learning. By reflecting

and discussing their own documentation, they develop their professional knowledge of the learning of numbers and counting in activities with children. Documentation that was made and discussed later in the research period shows more opportunities for learning because it focuses on a critical aspect of education: the children's meaning-making regarding the learning of numbers and counting. The preschool teachers in the study distinguish several dimension and aspects of number sense and counting skills during the course of the study, such as the presence of numbers in the children's activities, the meaning of using numbers and counting, the children's identification of numbers and counting, and differences in children's knowledge and abilities.

The second sub-study (Alkhede & Holmqvist, 2020) investigate how preschool teachers, based on one and the same description of an activity, enact their teaching. Based on the activity "Where is the treasure?", which is about the order of the numbers and the relationships between the numbers 1-10, two groups of preschool children aged 4-6 years receive different offers to distinguish numbers. Depending on how the preschool teachers enact the activity, the study distinguishes which forms numbers are offered and within which of Chi's (2009) activity forms (active, constructive, interactive) did the children's opportunities for learning during the activities fall.

The main results that emerged in the two sub-studies reveal the importance of teachers' competence for children's learning opportunities in mathematics. The results from the first sub-study (Björklund & Alkhede, 2017) regarding preschool teachers' relationship to subject content are consistent with the results previously obtained in studies by McIntosh et al. (1997) and Björklund, Pramling Samuelsson, and Reis (2018). Further, the second sub-study (Alkhede & Holmqvist, 2020) reveals the importance of teacher's didactic competence in designing and enacting an activity, which has also emerged in previous studies (Marton & Booth, 1997; Marton, 2015; Chi, 2009). In addition, the two sub-studies show the importance of the teacher's role in creating meaning, organising environment in a didactic spirit, and presenting activities with a variety of content that both challenges and engages children.

REFERENSLISTA

- Ahlberg, A. (1997). *Children's ways of handling and experiencing numbers*. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.
- Ahlberg, A. (2000). *The sensuous and simultaneous experience of numbers*. IDP-rapport nr. 2000:03. Göteborg: Institutionen för pedagogik och didaktik, Göteborgs universitet.
- Alkhede, M., & Holmqvist, M. (2020). Preschool children's learning opportunities using natural numbers in number row activities. *Early Childhood Education Journal*. <https://doi.org/10.1007/s10643-020-01114-9>
- Ball, D. Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Baroody, A. J. (1987). *Children's mathematical thinking*. New York, NY: Teachers College.
- Baroody, A., Lai, M-L., & Mix, K. (2005). The development of young children's early number and operation sense and its implications for early childhood education In B. Spodek & O. Saracho (Eds.), *Handbook of research on the education of young children*, (2nd ed.) (pp.187–222). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Baroody, A., & Rosu, L. (2006). Adaptive expertise with basic addition and subtraction Combinations – The number sense view. *Paper presented at the Meeting of the American Educational Research Association*, San Francisco, CA, April 2004.

Bertram, C., & Christiansen, I. (2012). Editorial. Teacher knowledge and learning – Perspectives and reflections. Special issue. *Journal of Education*, 56,1-16.

Bishop, A. J. (1988). Mathematics education in its cultural context. *Educational Studies in Mathematics* 19, 179–191. SpringerLink.

Björklund, C. (2012). *Bland klossar och bollar: matematik för de yngsta*. Lund: Studentlitteratur AB.

Björklund, C. (2013). *Vad räknas i förskolan? Matematik 3–5 år*. Lund: Studentlitteratur.

Björklund, C. (2014). Powerful teaching in preschool – a study of goal oriented activities for conceptual learning. *International Journal of Early Years Education*, 22(4), 380–394.

Björklund, C., & Barendregt, W. (2016). Teachers' mathematical awareness in Swedish early childhood education. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 60(3), 359-377.

Björklund, C., & Alkhede, M. (2017). Sharpening the focus on numbers and counting: Preschool educators differentiating aspects of mathematical knowledge for teaching. Special issue. *Mathematics teacher education and development*, 19(3), 117-134.

Björklund, C., Pramling Samuelsson, I., & Reis, M. (2018). Om nödvändigheten av undervisning i förskolan – Exemplet matematik. *Barn*, 36(3–4), 21–37.

<https://doi.org/10.5324/barn.v36i3-4.2895>

Björklund, C., & Palmér, H. (2018). *Matematikundervisning i förskolan. Att se världen i ljuset av matematik*. Stockholm: Natur & Kultur.

Björklund, C., & Palmér, H. (2019). I mötet mellan lekens frihet och undervisningens målorientering i förskolan. *Forskning om undervisning och lärande*, 7(1), 64–85.

Björklund, C., Ekdahl, A-L., & Runesson Kempe, U. (2020). Implementing a structural approach in preschool number activities. Principles of an intervention program reflected in learning, *Mathematical Thinking and Learning*, 23(1), 72-94. DOI: 10.1080/10986065.2020.1756027.

Brownell, W. A. (1935). Psychological considerations in the learning and the teaching of arithmetic. In *The Teaching of Arithmetic, tenth Yearbook of NCTM*, edited by D.W. Reeve, 19-51. New York: Teachers College.

Brownell, W., A. (1947). The Place of Meaning in the Teaching of Arithmetic. In *Elementary school Journal* 47, 256-65. Chicago: The University of Chicago Press.

Carpenter, T., & Moser, M. (1982). The development of addition and subtraction problem-solving skills. In T. P. Carpenter, J. M. Moser & T. A. Romberg (Eds), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (pp. 9-24). Hillsdale NJ: Lawrence Erlbaum.

Chi, M. T. H. (2009). Active-Constructive-Interactive: A conceptual framework for differentiating learning activities. *Cognitive Science 1*, 73-105. *Psychology in education*, Arizona state university.

Clements, D. H. (1999). Subitizing. What is it? Why teach it? *Teaching children mathematics*, 5(7), 400-405.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2014). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. New York, NY: Routledge.

- Coles, A., & Sinclair, N. (2018). Re-thinking ‘normal’ development in the early learning of numbers. *Journal of Numerical Cognition*, 4(1), 136-158.
- Cross, C. T., Woods, T. A., & Schweingruber, H. (Eds.). (2009). *Mathematics learning in early childhood: Paths toward excellence and equity*. Washington: The National Academic Press.
- Davydov, V. V. (1982). Psychological characteristics of the formation of mathematical operations in children. In T. P. Carpenter, J. M. Moser, & T. A. Romberg (Eds.). *Addition and subtraction: cognitive perspective* (pp. 225–238). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Dehaene, S. (2011). *The number sense. How the mind creates mathematics*. New York, NY: Oxford University Press.
- Doverborg, E., & Pramling Samuelsson, I. (2012). *Att förstå barns tankar: Kommunikationens betydelse*. Stockholm: Liber.
- Doverborg, E., Pramling, N., & Pramling Samuelsson, I. (2013). *Att undervisa barn i förskolan*. Stockholm: Liber.
- Dowker, A. (2005). *Individual Differences in Arithmetic. Implications for psychology, neuro-science, and education*. New York: Psychology Press.
- Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics*, 3, 413-435.
- Fuson, K. C. (1988a). *Children's Counting and Concept of Number*. New York, NY: Springer Verlag.
- Fuson, K. C. (1988b). Some further clarifications of numerical terminology using results from young children. *Behavioral and Brain Sciences*, 11(4), (583-585).

Fuson, K. C. (1991). Children's early counting: Saying the number-word sequence, counting objects, and understanding cardinality. In K. Durkin & B. Shire (Eds.), *Language and mathematical education* (pp. 27-39) Milton Keynes, GB: Open University Press.

Fuson, K. C. (1992). Relationships between counting and cardinality from age 2 to age 8. In J. Bideaud, C. Meljac, & J-P. Fischer (Eds.), *Pathways to number: Children's developing numerical abilities* (pp.127-150). Hillsdale, NJ.: Lawrence Erlbaum Associates.

Fuson, K. C., & Hall, J. W. (1983). The acquisition of early number word meanings: A conceptual analysis and review. In H. P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking* (pp. 49–107). New York: Academic Press.

Gelman, R., & Gallistel, C. (1986). *The child's understanding of number*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Hannula, M. (2005). *Spontaneous Focusing on Numerosity in the Development of Early Mathematical Skills*. (Diss.). Turku: Annales Universitatis Turkuensis.

Hannula, M. M., & Lehtinen, E. (2005). Spontaneous focusing on numerosity and mathematical skills of young children. *Learning and Instruction* 15, 237-256. Elsevier.

Hammersley, M., & Atkinson, P. (2007). *Ethnography: Principles in practice*. New York, NY: Routledge.

Hardgreaves, A. (2000). Four ages of professionalism and professional learning. *Teachers and Teaching*, 6(2), 151–182.

Heikkilä, M., & Sahlström, F. (2003). Om användning av videoinspelning i fältarbetet. *Pedagogisk Forskning i Sverige*, 8(1–2), 24–41.

Hill, C.H., Blunk, M.L., Charalambos, C.Y., Lewis, J.M., Phelps, G.C., Sleep, L., & Leowenberg Ball, D. (2008). Mathematical knowledge for teaching and the mathematical quality of instruction: An exploratory study. *Cognition and Instruction*, 26(4), 430–511. DOI:10.1080/073700802177235

Holmqvist, M. (Red.). (2004). *En främmande värld*. Lund: Studentlitteratur.

Holmqvist, M., Gustavsson, L., & Wernberg, A. (2008). Generative learning: learning beyond the learning situation, *Educational action research*, 15(2), 181-208. New York, NY: Routledge. <https://doi.org/10.1080/09650790701314684>.

Holmqvist Olander, M. (2013). *Learning study i förskolan*. Lund: Studentlitteratur.

Holmqvist, M., & Selin, P. (2019). What makes the difference? An empirical comparison of critical aspects identified in phenomenographic and variation theory analyses. *Palgrave Communications*, 5(1), 1-8.

Howden, H. (1989). Teaching number sense. *The Arithmetic Teacher*, 36(6), 6-11.

Kaufman, E. L., Lord, M. W., Reese, T. W., & Volkmann, J. (1949). The discrimination of visual number. *American Journal of Psychology*, 62, 498-525. doi:10.2307/1418556.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Ed.). (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: The National academy press. Hämtad 2020-05-04
<http://nap.edu/9822>

Klette, K. (2007). Trends in research on teaching and learning in schools: Didactics meets classroom studies. *European Educational Research Journal*, 6(2), 147-160.

Kullberg, A., Mårtensson, P., & Runesson, U. (2016). What is to be learned? Teachers' collective inquiry into the object of learning. *Scandinavian journal of education research*, 60(3), 309–322.

Kullberg, A., Runesson, U., & Marton, F. (2017). What is made possible to learn when using the variation theory of learning i teaching mathematics? *ZDM - Mathematics education* 49(3), 559-569. doi: 10.1007/s11858-017-0858-4. Springer.

Kullberg, A., & Björklund, C. (2019). Preschoolers' different ways of structuring part-part-whole relations with finger patterns when solving an arithmetic task. *ZDM*, 52, 767–778. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01119-8>.

Larsson, S. (1986/2011). *Kvalitativ analys – exemplet fenomenografi*. Hämtad 2020-05-04 <https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:253401/FULLTEXT01.pdf>

Lesh, R. (1981). Applied Mathematical Problem Solving. *Edu-cational Studies in Mathematics*, 12(2), 235-264. Springer.

Lo, M. L. (2014). *Variationsteori: för bättre undervisning och lärande*. Lund: Studentlitteratur AB.

Löwing, M. (2004). *Matematikundervisningens konkreta gestaltning. En studie av kommunikationen lärare - elev och matematiklektionens didaktiska ramar*. (Doctoral thesis, Gothenburg Studies in Educational Sciences, 108). Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis..

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics. Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. New York, NY: Routledge.

Malmer, G. (1999). *Bra matematik för alla. Nödvändig för elever med inlärningssvårigheter*. Lund: Studentlitteratur.

Mathematics and Science Partnership (MSP). (2010). *Knowledge reviews: Deepening teachers' content knowledge. Knowledge management and dissemination*. Hämtad 20-05-04
<http://www.mspkmd.net/blasts/tck.php>

Marton, F. (2015). *Necessary conditions of learning*. New York, NY: Routledge.

Marton, F., Hounsell, D., & Entwistle, N. (1986). *Hur vi lär*. Stockholm: Rabén Prisma.

Marton, F., & Booth, S. (1997). *Learning and awareness*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Marton, F., & Booth, S. (2000). *Om lärande*. Lund: Studentlitteratur.

Marton F., Dahlgren L-O., Svenson L., & Säljö R. (1977). *Inlärning och omvärldsuppfattning*. Stockholm: Prisma.

Marton, F., & Tsui, A. (Eds.). (2004). *Classroom discourse and the space of learning*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

McIntosh, A. (2008). *Förstå och använda tal – en handbook*. Göteborg: Göteborgs universitet, NCM.

McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, 12(3), 2-8.

McIntosh, A., Reys, B., Reys, R., Bana, J., & Farell, B. (1997). *Number sense in school mathematics: student performance in four countries*. Perth, Australia: Mathematics, Science & Technology Education Centre, Edith Cowan University.

Miura, I. T. (1987). Mathematics achievement as a function of language. *Journal of Educational Psychology*, 9(1), 79-82. American psychological association, Inc.

Miura, I. T., & Okamoto, Y. (1989). Comparisons of U. S. and Japanese first grader's cognitive representation of number and understanding of place value. *Journal of educational psychology*, 81(1), 109-113. American psychological Association, Inc.

Mulligan, J. T., & Mitchelmore, M. C. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal*, 21(2), 33-49.

Neuman, D. (1987). *The origin of arithmetic skill: A phenomenographic approach*. Göteborg: Acta Universalis Gotheburgensis.

Neuman, D. (2013). Att ändra arbetssätt och kultur inom den ledande aritmetikundervisningen. *Nordisk Matematikdidaktik*, 18(2), 3–46.

Opperman, E., Anders, Y., & Hachfeld, A. (2016). The influence of preschool teachers' content knowledge and mathematical ability beliefs on their sensitivity to mathematics in children's play. *Teaching and Teacher Education*, 58, 174-184.

Paliwal, V., & Baroody, A. J. (2020). Cardinality principle understanding: the role of focusing on the subitizing ability. *ZDM Mathematics Education, special issue*, 52, 659-661.<https://doi.org/10.1007/s11858-020-01150-0>.

Pang, M.F., & Ki, W. W. (2016). Revisiting the idea of "Critical Aspects", *Scandinavian Journal of Educational Research*, 60(3), 323-336.

Resnick, L. B. (1983). A developmental Theory of number understanding. In H. P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking* (pp. 109–151). New York: Academic Press.

Resnick, L. B. (1989). Defining, Assessing and Teaching Number sense. In J. T. Sowden & B. P. Schappelle (Ed.). *Establishing foundation for research on number sense and related topics: Report of a conference.* (pp. 35- 39). San Diego, California, February 16-17, 1989.

Reys, B. (1994). Promoting number sense in the Middle Grades. *Mathematics teaching in the middle school*, 1(2). DOI: 10.5951/MTMS.1.2.0114

Runesson, U. (1999). *Variationens pedagogik. Skilda sätt att behandla ett matematiskt innehåll.* (Doctoral thesis, Gothenburg Studies in Educational Science 129). Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

SCB. Statistikmyndigheten. (2019). *Hitta statistik.* Hämtad 2020-05-04 [https://www.scb.se/hitta-statistik/
artiklar/2019/23-000-barn-gar-inte-i-forskola/](https://www.scb.se/hitta-statistik/artiklar/2019/23-000-barn-gar-inte-i-forskola/).

Sarama, J., & Clements, D. H. (2008). Mathematics in early childhood. In O. N. Saracho & B. Spodek (Eds.), *Contemporary perspectives on mathematics in early childhood education* (pp.67- 94). Charlotte, NC, Information age publishing, inc.

Sarnecka, B. W., & Carey, S. (2008). How counting represents number: What children must learn and when they learn it. *Cognition* 108, 662-674. Elsevier.

Sarnecka, B. W., & Wright, C. E. (2013). The idea of an exact number: Children's understanding of cardinality and equinumerosity. *Cognitive science*, 37(8), 1493-1506. DOI:10.1111/cogs.12043

Sella, F., Lucangeli, D., Kadosh, R. C., & Zorzi, M. (2019). Making sense of number words and arabic digits: Does order count more? *Child development*, 91(5), 1456-1470. <https://doi.org/10.1111/cdev.13335>

SFS 2010:800. *Skollag*. Stockholm: Utbildningsdepartementet. Hämtad 2020-05-04. <http://rkrattsdb.gov.se/SFS-doc/10/100800.PDF>

Sheridan, S., & Williams, P. (Red.) (2018). *Undervisnings i för-skolan. En kunskapsöversikt*. Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (1998). *Läroplanen för förskolan Lpfö98*. Stockholm: Fritzes.

Skolverket. (2011). *Läroplan för förskolan Lpfö98. Reviderad 2010*. Stockholm: Fritzes.

Skolverket. (2018). *Läroplan för förskolan Lpfö18*. Stockholm: Fritzes.

Socialstyrelsen. (1981). *Arbetsplan för förskolan. Förskolans pedagogiska verksamhet – mål och inriktning*. Stockholm: Liber Förlag. Hämtad 2020-05-04 https://gupea.ub.gu.se/bitstream/2077/30766/1/gupea_2077_30766_1.pdf

SOU 1972:26. *Barnstugeutredningen*. Stockholm: Fritzes Hämtad 2020-05-04. <http://www.regeringen.se/rattsdokument/sta-tens-offentliga-utredningar>

SOU 1987:3. *Pedagogiskt program för förskolan*. Stockholm: Socialstyrelsen. Hämtad 2020-05-04. <http://hdl.handle.net/2077/30947>

SOU 1992:94. *Skola för bildning*. Stockholm: Utbildningsdepartementet.

SOU 1997:157. *Att erövra omvärlden*. Hämtat 20-05-04
<https://www.regeringen.se/49b722/contentas-sets/c6efb6f855df4585b7f6504e937c8c7f/sou-1997157a>

Svensson, P. (2015). Teorins roll i kvalitativ forskning. I G. Ahrne & P. Svensson (red.). *Handbok i kvalitativa metoder* (s. 208–219). Stockholm: Liber.

Tracy, S. J. (2010). Qualitative Quality: Eight “Big –Tent” criteria for excellent qualitative research. *Qualitative inquiry*, 16(10), 837–851.

Utbildningsdepartementet (2010). *Förskola i utveckling – bakgrund till ändringar i förskolans läroplan*. Stockholm: Utbildningsdepartementet.

Venkat, H., & Askew, M. (2012). Mediating early number learning: Specialising across teacher talk and tools? In: Teacher knowledge and learning – Perspectives and reflections. Special issue. *Journal of Education*, 56, 67–90.

Vetenskapsrådet. (2017). *God forskningssed*. Hämtad 2020-05-04. <https://www.vr.se/analys/rapporter/vara-rapporter/2017-08-29-god-forskingssed.html>

Wickstrom, H., Pyle, A., & DeLuca, C. (2019). Does theory translate into practice? An observational study of current mathematics pedagogies in play-based kindergarten. *Early Childhood Educational Journal*, 47(3), 287-295.

Wiese, H. (2003). Iconic and non-iconic stages in number development: the role of language. TRENDS in *Cognitive sciences*, 7(9). Elsevier.

Wirtz, R. W. (1974). *Mathematics for Everyone*. Washington, D.C.: Curriculum Development Associates.

Wynn, K. Children's Understanding of Counting (1990). *Cognition*, 36(2), 155-193.

Wynn, K. (1991). Children's early counting: Saying the number-word sequence, counting objects, and understanding cardinality. In K. Durkin & B. Shire (Eds.), *Language and mathematical education* (pp. 27-39). Milton Keynes, GB: Open University Press.

Wynn, K. (1992). Children's acquisition of the number words and the counting system. *Cognitive psychology* 24, 220-251. Academic press.

Wynn, K. (1995). Infants possess a system of numerical knowledge. *Current directions in psychological science*, 4(6), 172-177. Cambridge university press.

BILAGOR

Bilaga 1 Översikt datamaterial

Bilaga 2 Plan för FASETTs jämförelsegrupp

Översikt datamaterial

Förskola och avdelning	Förskolepersonal deltagande i 1 lärarträffar (n=8) 2 videoinsp. Plan. (n=4) 3 videoinsp. Övr. (n=5) 4 förskolechef (n=1) som deltog vid två lärarträffar	Antal barn 3-5års avdelningen 2015-2016	Videofilm Datum sekvenser minuter <i>Sekvenser diskuterade och analyserade under lärarträffarna och till artikel 2*</i>
A-förskolan Anemonen	Anna ¹ Astrid ³ Aina ³ Agneta ³ Alva ⁴	22 barn	2016-01-11 8 sekv 14min <i>Födelsedag 2:53</i> <i>Dukning 1:07</i> 2016-02-01 3 sekv 51 min <i>Kalender, räkna barn och frukt 8:30</i> 2016-04-04 3 sekv 30 min <i>Brunnen och Vargen 15.00</i> S:a inspelningstid 95 min
B-förskolan Blåklockan	Bea ^{1,2} Bodil ² Barbro ²	20 barn	2015-12-09 5 sekv 22 min 2015-12-10 4 sekv 27 min <i>Räkna barn och födelsedag 3:30</i> 2016-02-02 3 sekv 22 min <i>Masken i asken 5.00</i> 2016-04-05 2 sekv 45 min Muggarna* <i>14.31</i> S:a inspelningstid 116 min
C-förskolan Cikorian	Cissi ¹ Carina ^{1,2} Carita ²	18 barn	2015-12-10 11 sekv 18 min 2016-04-06 1 sekv 14 min 2016-05-12 6 sekv 26 min Lådorna* <i>12.21</i> S:a inspelningstid 58 min
D-förskolan Dagg-droppen	Doris ^{1,3} Diana ^{1,3} Dina ¹ Disa ¹	14 barn 5-åringar	2015-11-05 7 sekv 22 min <i>Måla siffror 3.07</i> <i>Hoppa Hage 2.30</i> 2016-02-03 3 sekv 15 min 2016-04-08 1 sekv 30 min <i>Locken 11.54</i> S:a inspelningstid 66 min
4 förskole-avdelningar	14 förskollärare 1 förskolechef	74 barn	S:a inspelningstid 335 min 5 tim 35 min. (3h och 12 min)
Övrigt	Lärarträffar 1-6 Ljudinspelningar 11 tim 30 min (transkriberat) Anteckningar	Dokument 40 st., se artikel I.	

Plan för FASETTs jämförelsegrupp

Syfte: Att beskriva hur man arbetar med och uppmärksammar tal och räkning i förskolan, där pedagogisk dokumentation är utgångspunkt för verksamhetens planering och genomförande.

Hur når vi syftet: Samtala och reflektera om lärarnas autentiska aktiviteter, det icsensatta lärandet. Ansatsen är reflektande, med utgångspunkt i pedagogisk dokumentation.

Empiri: Lärarnas pedagogiska dokumentation avgränsat till barns lärande i matematik (tafförståelse och räknefärdigheter). På vilka sätt stödjer verksamheten barns matematikutveckling? Observationer av verksamheten, observationsanteckningar, ljudinspelning och filminspelning.

Vad gör vi i jämförelsegruppen?

Vi vill att lärarna får syn på matematiken i förskolan och hur de arbetar med talbegrepp och taluppfattning tillsammans med barnen och hur barn räknar. Vad, hur och varför är bärande begrepp i diskussionerna. Lärarnas dokumentationer styr, ser på vad man gjort och hur man kan gå vidare.

TIDPUNKT	TEMATIK	UPPDRAF
v. 39 24 sept	Matematik i förskolan och förskoleåldern <ul style="list-style-type: none"> - Vad vet vi om barns taluppfattning och räknefärdigheter? - Hur gestaltar sig taluppfattning och räknefärdigheter bland förskolebarn? 	Dokumentera matematikarbetet (tal och räkning).
v. 43 20 okt	Barnens matematik <ul style="list-style-type: none"> - Reflektion och respons på dokumenterat matematikarbete - Vad, hur och varför? 	Dokumentera utifrån följande frågor till nästa träff: <ul style="list-style-type: none"> - När räknar man i förskolan? - Hur räknar barnen? - Hur ser interaktionen ut när man räknar med barnen?
v. 48 25 nov	Interaktion med räknande i fokus <ul style="list-style-type: none"> - Reflektion och respons på dokumentationerna av räknanget 	
2016 v.4 26 jan	Forskning och teorier som utgångspunkt för pedagogisk verksamhet <ul style="list-style-type: none"> - Kommentarmaterial till läroplanen, <i>Förskola i utveckling</i> (Skolverket, 2010) - matematiska aktiviteter 	Dokumentera vad som händer i olika matematiska aktiviteter <ul style="list-style-type: none"> - Konstruera - Lokalisera - Mäta - Räkna - Leka - Förklara
v.9 1 mars	Progression i räknefärdigheternas utveckling och taluppfattning <ul style="list-style-type: none"> - Reflektion och respons på dokumentationerna av matematiska aktiviteter - Vad, hur och varför? 	Dokumentera till nästa träff: <ul style="list-style-type: none"> - Hur räknar barnen? - När räknar man i förskolan? - Hur ser interaktionen ut när man räknar med barnen i olika aktiviteter?
v.17 27 april	Pedagogiskt arbete med tal och räkna i förskolan <ul style="list-style-type: none"> - Reflektion och respons på dokumentation - Tillbakablick till höstens dokumentation 	

I

Sharpening the Focus on Numbers and Counting: Preschool Educators Differentiating Aspects of Mathematical Knowledge for Teaching

Camilla Björklund
University of Gothenburg

Maria Alkhede
University of Gothenburg
Malmö University

Received: 31 March 2017 / Accepted: 16 October 2017
© Mathematics Education Research Group of Australasia, Inc.

This article reports a study of educators differentiating aspects of mathematical knowledge for teaching in preschool as part of a further-education programme. Eight Swedish preschool educators participated in focus group discussions about documentations from their own practice during a school year, to enhance their awareness of their mathematics education practice. The object of learning for the participants is more specifically how numbers and counting are made content for learning in preschool practice. The educators' authentic documentations are reflected upon in focus group meetings and further analysed by the researchers to find out what aspects the educators differentiate during the programme. Results show that educators' learning about content for children's learning in preschool is a complex process. This process involves several aspects necessary to discern for a professional development to occur, but the collaborative approach seems prosperous in that new aspects are brought to the fore, influencing their reflective practice.

Keywords: mathematical knowledge for teaching • numbers and counting • preschool educators • professional development • variation theory

Background

The Swedish national curriculum for preschool and the political agenda highlights mathematics as a necessary content for learning in the early years. There is a growing body of research on mathematics education in the early years confirming that mathematics education in preschool is decisive for further learning and development of mathematics skills (Duncan et al., 2007; Östergren & Träff, 2013). The early childhood educator is in this respect a key person to provide experiences to young children that will lay the foundation for children's further development.

In order to enhance the current knowledge about preschool mathematics and in particular how numbers and counting are made objects for learning in early childhood mathematics education, a research project was launched¹ in Sweden, conducted in close collaboration between researchers and preschool educators. The current study is one part of this larger project, focusing specifically on educators' perceptions of numbers and counting as a content for learning in

¹ FASETT, financed by the Swedish National Research Council 2015-2018, grant nr. 721-2014-1791

preschool. Here we present an analysis of the progression in the educators' perceptions as it is expressed in their documentations in texts, pictures and videos. Our study will contribute to the understanding of educators' mathematical knowledge for teaching (MKT) in that it offers a description of how numbers and counting are conceptualised as learning content among the participating preschool educators. This will provide deeper knowledge about professional development and what it means to teach mathematics in early childhood education.

Context of the Study

Sweden has the same curriculum for all children enrolled in preschool from the age of 1 to 5 years. The national curriculum was revised in 2010, bringing in a stronger focus on mathematical content and competences, but very little is said in the guidelines about how to teach preschool mathematics. It is up to the educators to make informed choices of methods for teaching and objects for learning, in an effort to offer meaningful experiences of mathematical content such as shape and space, number, order, measurement and change (National Agency for Education, 2011).

Swedish preschool is included in the education system but not all educators have a teacher degree. There are many child minders employed in preschool and together with preschool teachers, they have a common responsibility to provide the children with a stimulating environment (National Agency for Education, 2011). Swedish preschool educators (teachers and child minders) are generalists with a broad competence and holistic responsibility to ensure that each child is provided with opportunities to develop socially, emotionally and cognitively (Pramling & Pramling Samuelsson, 2011). Specific content knowledge for teaching is in this respect very limited in the professional education programmes and depends on individual interests and studies. A recent evaluation of preschool in Sweden done by the Swedish Schools Inspectorate (2016) reveals a general lack of knowledge and implementation of teaching and instruction in preschool practice. The critique concerns missed opportunities to extend children's experiences in goal-oriented activities. One reason, based on an overview of preschool teachers' pedagogical awareness (Björklund & Barendregt, 2016) might be that a lack in content knowledge influences the approach to teaching specific contents (see also Ma, 1999). Mathematics is specified by the national curriculum as a knowledge area for preschool children, but a general or ambivalent approach to the subject may impact on how mathematics teaching is orchestrated.

A lot of effort have been made in recent years to improve the quality of early childhood education, not least due to the changes in the Education Act (The Ministry of Education, 2010) that states teaching is supposed to occur in all school forms, including preschool. The Education Act even provides guidance for how quality is to be ensured, through documentations. This is expressed in the curriculum in the following way: "The quality of the preschool shall be regularly and systematically documented, followed up, evaluated and developed. Evaluating the quality of the preschool and creating good conditions for learning requires that the child's learning and development be monitored, documented and analysed." (National Agency for Education, 2011, 14). The curriculum further points out the importance of using different forms of documentations and evaluation instruments to provide knowledge of the conditions of the learning practice and to make it possible to monitor children's learning and development in mathematics, among other knowledge areas. This documentation is supposed to be completed regularly and systematically to allow analyses of how the preschool is fulfilling the goals as intended in the curriculum.

The intention of the use of documentations is clear enough, but there are discrepancies in the ways policy documents and guidelines expect the documentation task to be conducted. Documentation as a concept is described in two ways in some texts (complementary to the curriculum) provided by the National Agency for Education: 'documentation' and 'pedagogical

documentation'. In the policy documents, the term documentation is used to point out that children's development and learning shall be followed up and analysed. The curriculum also says to use different kinds of documentations and evaluations. The complementary material that is to facilitate the implementation of the curriculum does however use the term 'pedagogical documentation', in other words not only as a tool for evaluating progress but as a basis for further pedagogical planning. How the educators understand and manage documentation in preschool practice can thus lead to different educational consequences.

Accordingly, all preschools are to document their practice and in the current project these documentations are a central point of departure for the educators' reflections, discussions and developing understanding of their pedagogical practice. In this study we consider these documentations to be expressions of the educators' perceptions of the contents for learning. The specific research question we are addressing is: How are numbers and counting perceived as learning content by preschool educators during a prolonged period of reflective actions?

Professional Development in Early Childhood Mathematics Education

Educators' professional knowledge is generally considered composed of propositional, practical and personal knowledge that includes both content knowledge and pedagogical knowledge (Bertram & Christiansen, 2012). The profession constitutes 'teaching' as the primary activity, which may be defined as an act to enable someone to discern and develop awareness of phenomena that he or she has not been able to 'see' before (Pramling Samuelsson & Pramling, 2013). This implies that educators need to know more than just the facts of a content area. They need to know the underlying principles and the conceptual structure of the content and what facilitates children's learning or discerning of these principles and structures. Furthermore, teaching requires constant professional judgement and decision-making that is informed by both theoretical and methodological knowledge within the field. Difficulties in implementing mathematics teaching are according to Venkat and Askew (2012) primarily linked to limited pedagogical content knowledge regarding mathematical structures and how to present them to the learners.

Due to the heavy influence of policy and politics, the public and the education community, teaching is a profession in constant change (Hargreaves, 2000). Most countries have experienced similar changes in the teaching profession: earlier, there was emphasis on managing a group of learners so that they are likely to acquire knowledge, whereas the teaching practice of today to a large extent is assumed to address the individual needs of the students and to interact with them. The former approach consequently demands different skills than the latter. The former quite practical trade of teaching, meant that once the teacher had been trained and graduated, the teacher was left alone in her classroom to manage a large group of learners where disciplinary skills to organise the classroom situation were perhaps more important than subject knowledge (which were rarely questioned or reflected upon). "One learned to be a teacher through practical apprenticeship, and one improved as a teacher by individual trial-and-error" (Hargreaves, 2000, 156). This image of teaching had to be challenged, as it simplifies the teaching profession of today, which is heavily influenced by new technology, rapidly changing policy and increasing cultural diversity. Teacher individualism in such a time does not improve teaching practice. According to Hargreaves, key features for improvement are instead further education's closeness to the teaching practice and the teachers' sense of meaning for their practice. No teacher can manage to learn all new methods and technologies, as well as subjects, on their own to cope with uncertainty and new reforms. This calls for a collective approach in professional development, which in many ways is a necessity in contemporary education. The Swedish government has adopted this collective view and argues in the policy documents for education the need for collective

development processes among educators. This is apparent not least in recent drives for professional development through online courses and teaching guides. These drives aim at developing communities of practice, where members learn through a process of mutual engagement and enterprise and developing discourses (Kennedy, 2005). Learning in these communities is based on the interaction that takes place between the members. The added value (compared to individuals attending courses and mentoring programmes) is the combination of different individuals' knowledge and experiences that will contribute to a creation of new knowledge.

Professional development in contemporary education systems is a reoccurring issue, but the content of the development process is known to be crucial for its success. Timperley (2008, 13) holds it necessary that focus is directed not only on structure and on teaching methods, but rather on the question "What do we as teachers need to learn to promote the learning of our students?" Such development processes can only take place close to the teaching-learning practice. Studies of effectiveness of professional development show that programmes aiming at educators' enhanced skills to focus the responsiveness and learning outcomes of the students are most likely to succeed, rather than focusing on methods and knowledge of teaching in general.

As earlier mentioned, preschool educators in Sweden are educational generalists without specialisation in any particular academic subject. Still, they are obliged to teach mathematics and utilise the knowledge and experiences they have of mathematics education and young children's learning. It thereby becomes of interest to direct attention towards this presumably problematic feature of preschool teaching: if effective teaching (meaning that children will discover new ways of understanding and making use of mathematics) is to be facilitated, then educators' knowledge of the content should be highlighted as equally important as their general pedagogical skills. Ma's (1999) findings from classroom studies show that mathematical knowledge alone does not correlate with efficient teaching and students' learning outcomes, but profound mathematical knowledge (conceptual understanding of the structure and connections of mathematical content) opens up more opportunities to engage students and see opportunities to develop concepts that emerge in a situation. An intervention study of early childhood educators highlighted similar issues, whereas teaching material and methods were rarely used in conceptually developing ways if the educator did not recognise the underlying structure, for example an abacus and its base-ten structure, that may facilitate and reify arithmetic computation and understanding (Venkat & Askew, 2012). The present study can shed some light on the conditions for such development among preschool educators, through our inquiry of the educators' differentiating numbers and counting as content for learning in preschool.

If professional development is to occur, the content for learning has to be an essential part of the educators' practice and a source for challenges that the educators are interested in developing their knowledge about. Numbers and counting are in this sense relevant content to discuss with preschool educators as potential contents for learning. These notions are familiar to preschool practice, even though "counting" does not occur as a goal to strive towards in the national curriculum. Even so, studies show that counting is indeed a common activity or act with young children (Björklund & Barendregt, 2016). Numbers are mentioned in the curriculum in terms of "develop their understanding of ... the basic properties of sets, quantity, order and number concepts" (National Agency for Education, 2011). The relationship between numbers (or rather numerical magnitude) and arithmetic (counting) skills is furthermore unchallenged in the field of research on children's mathematics development, but these skills constitute the basis for further learning in different mathematical areas (Siegler & Braithwaite, 2017). Empirical studies give evidence for the necessity of a profound understanding of numbers to develop efficient strategies in arithmetic problem solving, which are founded in the early years before formal education begins (Neuman, 1987; 2013; Östergren & Träff, 2013). Consequently there are enough

reasons for choosing numbers and counting as relevant content in which to enhance educators' awareness. Even so, as research clearly shows, it is not enough for educators to have substantial knowledge of numbers and counting per se.

Mathematical knowledge for teaching (MKT) young children involves knowledge about how mathematical procedures work, what challenges children are likely to encounter and how to best define mathematical terms and notions to the children (Hill et al., 2008). Learning, and teaching, about numbers and counting is in this respect a complex matter, since number sense and arithmetic procedures rely on several basic ideas and principles. Number sense means knowledge and facility with numbers, knowledge and facility with operations, and applying this knowledge and facility with number and operations to a range of computational settings (McIntosh, Reys, & Reys, 1992). A large body of research shows that children have abilities to determine the quantity of small sets of numbers before they learn to count, in a process called 'subitising'. They also seem to have arithmetical expectations of their surrounding world and magnitude estimation abilities at a very early age (McCrink & Wynn, 2004; Wynn, 1998). But to develop this fundamental sense of number and magnitude into representations of numbers, such as number words and numerals, children need instruction and participation in a socio-cultural environment where it is necessary to communicate about quantities. To use numbers in numerical operations or arithmetic problem solving requires knowledge about numbers' cardinality and ordinality, meaning that a number word may determine the quantity of a set and number words are related to each other in orderly fashion (see Gelman & Gallistel, 1978). However, to operate with numbers in arithmetic problem solving, one also needs knowledge about the part-whole structure of numbers and the problem to be solved (what is the whole and what is a part to be added or subtracted) and knowing which strategies to use for which kind of operation (Baroody, Torbeyns, & Verschaffel, 2009). This complexity in learning to know and use numbers and counting strategies is an important aspect of preschool educators' mathematical knowledge for teaching, but as Klette (2007) concludes, this kind of conceptual insight to the content for learning is often taken for granted and is not problematised in the educational settings.

Theoretical Framework

Our interest in this study is the educators' perceptions of numbers and counting as content for learning in preschool and more specifically how their perceptions change over a time of reflective activities. In other words, we identify how the educators learn to differentiate numbers and counting as a content for learning in the practice they themselves plan, enact and evaluate. We will use the theoretical framework of Variation theory of learning (Marton, 2015) to analyse the educators' perceptions and towards what aspects of numbers and counting as a content for learning they direct their attention.

Learning is in accordance with Variation theory (Marton, 2015; Marton & Booth, 1997) considered to be the process of differentiating more and more aspects of a specific phenomenon. When encountering a phenomenon, certain aspects are discerned, due to the person's earlier experiences of similar kinds or due to what is made possible to discern in the current situation. In other words, when a person sees a familiar phenomenon, he or she understands it based on earlier experiences, but if the phenomenon is presented in a way that a new aspect, not earlier recognised by the person, is made possible to discern, learning occurs since the person then changes his or her way of seeing the phenomenon.

In collective processes, such as focus groups where educators get together and share their experiences of similar situations or content for learning, the possibility is that different ways of understanding emerge in the discussion. These differences depend on the participants discerning different aspects of the same phenomenon. In variation theory terms, such occurrences open up

dimensions of variations, where the participants in interaction explore how aspects vary within the phenomenon and between phenomena. One example of this taken from the current project is one educator describing that many of her 5-year-olds enjoy counting on the counting sequence, up to 10 and further. Another educator reacts to this by saying "but even if they count up high, it doesn't mean they understand the numbers they say". These educators share their understanding of children's mathematical knowledge and skills often through examples from their practice. In the collective sharing process, different interpretations bring aspects that may not have been considered before, as the first educator proudly encouraged her children to count on the sequence, but had not considered the possibility that the counting did not necessarily mean that the children could make use of their impressive skills to count high. In our study, these occurrences of differentiating new aspects of the learning object (numbers and counting as content for learning in preschool in this case) are of central interest as they are expressed in authentic documentations from their preschool practice. In accordance with the theoretical frame, once a new aspect has been discerned it is more likely it will be recognised in forthcoming similar situations. Placing their own perception in contrast to a different perception is necessary for such insights to appear, which are facilitated in collective discussions between practitioners working in similar practices.

Educators' perceptions, or rather their knowledge of the content in their pedagogical work, has been conceptualised by Ball, Thames and Phelps (2008; see also Shulman, 1986) in terms of mathematical knowledge for teaching (MKT), which includes both the educator's subject knowledge and pedagogical content knowledge. MKT refers to the relation between educator's knowledge of the content itself (what does it mean to know numbers and how to count) and the children they aim to teach, including teaching methods (what have the children experienced as difficult before and how can the learning content be made understandable to them). Thus, it is not enough to have subject knowledge or knowledge of children's learning respectively, there is a relation between the learner and the content to be learnt that has to be considered and respected in a teaching situation. MKT is of interest in our study, since mathematical knowledge for teaching is made the object of learning for the participating educators. We are thereby not directing any interest to their content knowledge or skills per se, but how they perceive numbers and counting as a content to be learnt by the preschool children with whom they work. There are several studies of teachers' mathematical content knowledge in elementary school and some from Kindergarten and early mathematics education (Mathematics and Science Partnership (MSP), 2010) but rarely regarding preschool educators and the specific educational context that preschool, and in particular Swedish play-based and child-centred preschool, entails (see Oppermann, Anders & Hachfeld, 2016, for one rare example).

Methods of Inquiry

A group of educators (n=8) from four different preschools in a municipality in the southwest of Sweden (named A, B, C and D) participated in focus group discussions during one preschool year (September–April). The focus groups were designed to be part of an in-service training programme aiming at facilitating collective professional development within the area of mathematics education in preschool. The participants have different educational backgrounds, both child minder and preschool teacher qualifications, and the number of years in preschool profession varies between less than 5 years and more than 20 years. One or two educators from each preschool attended the meetings. The focus group approach intended to encourage the participants to share their experiences and knowledge about numbers and counting as a content for learning in their daily preschool practice. The programme took a collective learning approach, meaning that the educators themselves were the driving force for their professional development,

supported by their documentations from their own work with numbers and counting. The educators' documentations of their pedagogical practice consisted of photo collages, video-films and written observations and were collected on a common web domain for the participants to enable sharing within the group and with the researchers. These were the basis for focus group discussions and the educators' forthcoming documentations. The researchers' role in the focus group process was not to guide the participants' learning, but to maintain focus on the learning object - numbers and counting as content for learning in preschool. Six focus group meetings were conducted during the programme, each meeting lasting for 2.5 hours.

The analysis in this particular study concerns the content for learning expressed in the documentations, and how the perceptions of this content evolves over a period of time. We will thereby describe and make inferences of how the educators perceive numbers and counting as learning content, and furthermore what children are offered to learn in preschool mathematics education, based on a content analysis of the documentations. Variation theory of learning provides the guiding principles for our analysis allowing us to describe such aspects that constitute the direction of the educators' perceptions.

Data Material and Analysis

The curriculum for Swedish preschool states that pedagogical practice has to be documented for pedagogical purposes and assessment. How this is accomplished is an open question, but many preschools use photographs and video documentations that are used for reflection with both the children and the educators. These documentations are also meant to be used as tools for assessing them achieving their goals. In other words, if the preschool practice has offered the children sufficient opportunities to learn the goals mentioned in the curriculum. The documentations used for this study are in this respect authentic resources with a specific aim to document work with numbers and counting.

The data we have analysed are 40 documentations made by the eight participating educators, consisting of texts, pictures and videos. Not all preschools provided documentations for every meeting. The primary focus for the educators has been to contribute with documentations directed at numbers and counting, as it appears as content for learning in their daily pedagogical practice. These documentations have been the centre for discussions in six reoccurring focus group meetings during eight months. Audio-recordings and field notes from these have supported our interpretations of the visual, audio or graphical documentations. The documentations themselves are the main data source in this particular study, complemented by the recorded discussions where the educators express certain intentions or interpretations. The focus group design followed a pre-defined schema in that the initial meetings (and related documentations) were to concentrate on when and how children count and encounter numbers in the preschool practice. In the following session participants were also encouraged to direct attention towards interaction occurring in mathematical situations. In the second semester (meetings 4-6) these themes were repeated and national guidelines and support material for curriculum implementation were added. Altogether, these topics were used to retain focus on numbers and counting as content for learning in preschool.

Table 1 shows the documentations provided by the four preschools (A-D), which are used as data sources for analysis in the current study.

Table 1
Documentations Used as Data for Analysis

Date for meeting	A	B	C	D
September		Introductory meeting		
October	Making a row of stones Comparing big cup - small cup Building with wooden bricks Turn-taking in game Setting the table	Necklace of pearls in different shapes Game of mushrooms with dots and numerals	Cubes with numerals 1-10 in a tower Marbles in a hand making dice patterns	Constructing patterns and 3-D structures with "Fischer Tip" material Decorating a picture frame with ten diamonds
November	Playing with balls, standing in a circle Cushions in geometrical shapes to build and play with Measuring pieces (in centimetres) put together in a long row	Counting pearls to make a picture of pearls following a model Circle time, counting children	Constructing tracks for marbles Making picture patterns of pearls Making seven fish of pearls for an aquarium	Playing and sorting plates with numbers as a jig-saw puzzle Discussing numerals on the clock on the wall
January	Measuring snow depth with ruler	The cup game, numerals 1-10		Creating letters and numerals of building sticks Building a tower, children comparing with their length

		Hiding the end of a pearl string in a box – figuring out the number of the hidden pearls	Video of toddlers sorting shapes, sizes and counting
March		Pairing numerals with number of objects and pictures	
April	Task cards “finding n” in the woods Numeral shapes found in the woods	Making shapes with own bodies, comparing number of sides with picture model Video of children making shapes with their bodies Arithmetic-app on computer tablet together with corks and finger counting Playing Monopoly board game Weighing, counting and sorting different pearls	Counting number of letters on a board Discovering the shapes of boots Dividing bread evenly in baskets Sorting corks with numerals and letters Setting the table for the trolls, imaginary play

Since our aim was to study the process of differentiation over time, it is vital that the documentations are analysed chronologically, to discern any progression in differentiating aspects of numbers and counting as content for learning. The documentations do not reveal progress on an individual level, they are treated as a collective that includes educators with different background, experiences and motivation. Nevertheless, our analytical approach will provide a description of this specific group of educators and their learning about numbers and counting as content for learning in preschool.

Variation theory informs our analysis in directing attention to what aspects of ‘numbers and counting as learning content’ that are expressed in the educators’ documentations. Each documentation has been described in terms of what was prominent in the text, picture or video, supported by the educator’s own expressed intentions and interpretations from the focus group meetings. In accordance with the theory, those aspects made visible constitute the educators’ perception of the learning object. By interpreting the aspects made visible over time, we found out how different aspects appeared as central and new aspects made visible to the educators extended their perceptions of numbers and counting as learning content in preschool.

Results

In general, considering the documentations as a collective of perceptions, there is a movement during the programme from a very diffuse and overarching focus that rather presents mathematics appearing in different situations, towards a greater awareness of numbers and counting, ending up in documented activities where children's learning processes are focused. The shift is an important result since it implies that the educators during a rather long period of time have differentiated aspects of numbers and counting as content for learning that were not present in their perceptions in the beginning of the project. We will in the following text present in more detail how this progress emerged and what aspects appeared central in the documentations.

The analysis reveals five aspects that were differentiated during the project time:

1. occurrences of numbers and counting in children's activities;
2. purpose for using counting and numbers;
3. children identifying numbers and numerals;
4. differences in children's knowledge and skills; and
5. learning the meaning of numbers.

These aspects appear as qualitatively different from each other but together they constitute a coherent understanding of the complex phenomenon the educators are learning about in the programme.

Occurrences of Numbers and Counting in Children's Activities

Many of the initial documentations show activities and play situations where counting is assumed to happen, but the educators rather emphasise other aspects of mathematics, such as the children knowing which cup is bigger and sorting sticks in a long row encourages discussions of location (in front, behind). The documentations generally visualise situations where the children's knowledge of counting is expressed and used, but not made an object for inquiry of deeper meaning, such as in one documentation showing a table with a long row of stones, initiated by a child to make it easier to count the collected stones (see Figure 1).



Figure 1. A child has taken initiative to sort stones in a long row, to make them easier to count.

Numbers are not documented as a specific content for learning, nor expressed as part of the activities other than as a natural part of the counting procedures (e.g. as number words). The

educators differentiate counting activities as part of the activities they involve children in or that children initiate themselves. The aspect that the educators are discerning is mainly the *occurrence of counting* in children's play and activities, in line with the guidance from the focus group meetings, to document children's exploration of numbers and counting in planned and in spontaneous situations. These early documentations rarely include any processes of an explorative or instructive nature. They are catching the counting act in children's play. Figure 1 is nevertheless an example of emerging process documentation.

Purpose for Using Counting and Numbers

The early documentations of numbers and counting as content for learning in the participating preschools have a distinct common theme: using counting as a strategy to solve tasks where you need to know 'how many items'. This is found in different documented activities, such as setting tables, making patterns and playing board games. Characteristic for these early documentations is the focus on counting as an act to solve tasks of enumeration, not arithmetic problem solving, in games and play.

One documentation shows the setting of the lunch table where counting helps the children decide the number of cutlery needed. Counting is, based on such documentations, discerned as a tool for the children solving the task. At the third meeting the educators' documentations show a more explicit focus on counting as a strategy to find out the cardinality of a set of items, in other words: to know how many there are. Documented acts are sorting and pattern making, in particular where the children have shown initiatives to count to complete their task.

Two preschools had documented measuring activities, one using informal measures (bricks measuring the height of the children) and one using a folding rule measuring the snow depth in the yard (see Figure 2).



Figure 2. Measuring snow depth requires tools and strategies such as counting the number of units on the ruler or measuring with a concrete reference point (shovel).

Numbers are mathematised in these documentations, meaning that the children discovered phenomena or problems where they needed numbers to make sense of the situation. Numbers (and numerals on the ruler) and their numerical meaning were brought forward as necessary for the children to use. The initial documentations did present similar activities where children counted, but the measuring activities highlight a different aspect of numbers and counting, where

counting a number of units (blocks or centimetres) has a different and more complex meaning than counting sets of items.

Children Identifying Numbers and Numerals

Counting is perhaps an easier act to recognise and document as an occurrence in preschool, but during the discussions about the documentations another aspect is brought to the fore: children discovering numerals in their surroundings and taking initiatives to sort them in order and make meaning of them in different contexts. This aspect also frames activities that are directed towards children's existing knowledge and acts, rather than the process of learning and developing meaning.

One preschool shared, at the third meeting, documentations where numbers and numerals were differentiated as potential learning objects. The educator presented pictures of two children's play with plates with numerals fitting together as a jig-saw puzzle, enabling the plates to be ordered by the children in the number sequence. The other documentation showed a picture of the clock on the wall, in addition to written descriptions of the children telling the counting sequence found on the clock and then discussing at what time each child would leave the preschool and go home. These documentations show children exploring numerals and their meaning as parts of an ordered string of symbols. The order is important and children are observed discussing and elaborating on this meaning. Focus is here directed towards numbers and numerals and the meaning they constitute to the children in certain situations.

At the meeting that followed the clock and puzzle documentations, several documentations from the other preschools also included numbers and numerals as central features. Numbers were shown as objects included in the counting sequence in planned games. "The cup game" (see Figure 3) was played with the whole child group sitting in a half circle with a number line in front of them and cups with numerals 1-10 written on their bottoms (up-side-down on the floor). An item was hidden under one of the cups and one child was to guess under which cup the item was hidden. If the guess was wrong, the other children supported the guesser by saying she should look for a "higher" or "lower" number. The reasoning within this game concerned mainly recognition of numerals and the order of the numerals in the counting sequence.



Figure 3. "The cup game", to find out under which cup an item is hidden by the clues given by other children.

The focus on numerals is also found in a play activity where children construct the shape of numerals of wooden sticks. The meaning of the numerals is not emphasised or discussed according to these documentations. The documentations rather show the children's competences in identifying numbers and numerals.

Differences in Children's Knowledge and Skills

At the initial meetings of the programme, most documentations are directed towards activities where numbers and counting occur and which strongly emphasise the activities themselves or the children's existing skills that are discovered within these activities, rather than any learning or teaching acts involved. At the third meeting one documentation does however stand out from the other activity-focused ones. It is a written reflection saying:

We always count how many children there are at circle time. How many are not here? We count together and the children can answer, some know and some make guesses. The children who know have counted silently. Or they just know.

This shows a shift from merely observing when counting occurs in children's activities towards the differences in knowledge expressed by the children in a counting activity. Similar reflections can be found in the later documentations where this aspect is brought forward, for example when children are invited to sort caps with numerals written on them and discussions arise about plausible strategies, which offers the educator an opportunity to observe children's differences in number knowledge and counting skills.

Learning the Meaning of Numbers

The fifth meeting provided fewer documentations but they had quite a different focus than earlier ones and brought to the fore an aspect that had not previously been discerned among the documentations and educators' reflections. Numbers were now made an object for learning with the children, for example arranging sets of objects in order of quantity and relating them to numerals. Another game was also documented: "the worm in the box" where ten pearls on a string was called "the worm" and the educator hides some of the pearls in a box, leaving the other pearls on the string outside the box (see Figure 4).



Figure 4. "The worm in the box", a game where some (of ten) pearls on a string are hidden in the box. The purpose is to find out how many are hidden based on the visible ones outside the box. The text on the documentation says "If you see 7 hearts... how many does the worm in the box have?" (in Swedish).

These documentations have a clear goal for learning and the documentations are directed towards the process of making meaning of numbers, orchestrated by the educator in different ways to challenge the children's conceptions of numbers and use of counting strategies. These documentations are in line with the documentation of "the cup game" at the previous meeting, since they emphasise a goal for learning about numbers, but differ from the previous one in the attention towards the meaning of numbers' cardinality and how children are about to learn this meaning.

One explicit example of the educator differentiating children's processes of learning the meaning of numbers and counting is an activity around a computer tablet, where a child's hand is visible showing four raised fingers, some counters are found on the table grouped as four together and one on the side and the game on the tablet showing a task of subtracting $5 - 1 = 4$ (see Figure 5). This documentation reveals the new aspect differentiated by the educators: the relationship between representations and how to work with that with the preschool children.



Figure 5. Documentation of a game on the tablet computer that is complemented with concrete manipulatives and children's use of fingers.

As previously mentioned, one educator made use of milk bottle caps with numerals written on one side and letters on the other side. An explorative activity was taking place in the documentation where children were allowed to sort the caps in accordance with their symbolic nature (numerals or letters), symbolic value (ordering 1-9), symbolic similarity (categorising ones, twos, threes...) and use of strategy to determine the sets of ones, twos, threes, and so on. The process of learning to understand the meaning of numerals and numbers is focal in this documentation as well, even though the educator allowed the children to explore freely the different aspects of numbers in more spontaneous manners.

Summary of the Educators' Differentiating the Complexity of Learning Numbers and Counting in Preschool

The last documentations are at first glance quite different in terms of the activities and in content, but they are similar in that they express learning processes where children explore numbers and counting primarily. The educators also add to the visual documentations that they have an idea of what is possible to learn in the documented activities, as in the game including the computer tablet added with other props and representations.

There is a great variety of documented activities, where similar ones as in the earlier meetings reappear later during the project, such as finding numerals shaped in nature (tree branches), but are presented in more nuanced ways where the process of learning is prominent. In other words, the educators are in the beginning of the programme differentiating aspects characterised by activities and occurrences, whereas they later in the programme differentiate the process of learning. The latter discerned aspects are closely related to the concept of mathematical knowledge for teaching in that the educators learn to reflect upon what it means to learn about numbers and counting in preschool and what teaching methods are used with success or are less successful.

Conclusions

Our analysis of educators' differentiation of aspects of numbers and counting as content for learning in preschool reveals two main findings: The first is that the educators' shared experiences enable them to differentiate new aspects of the learning object. In other words, they are inspired by each other, which clearly shows over time where one documentation that stands out in one meeting usually is followed up by other educators, and are *extended*, in the following meeting and new aspects are thereby discerned. The second main finding is the progression in the aspects that are discerned by the educators through the process, from recognising the existence of counting as part of children's activities, through discovering children's differences in knowledge and skills, towards documenting the process of exploring numbers and counting as learning objects. In the former cases the educator is quite invisible but in the latter there is a conscious use of manipulative material and instruction, even though they are utilised in different ways.

The aspects found to be prominent in the educators' documentations change over time, and in chronological order. This indicates that there are some aspects that are foundational for other aspects to be discerned, such as the occurrences of numbers and counting in children's activities that are necessary for seeing and reflecting on differences in children's knowledge and skills, which in turn are necessary for reflections and actions regarding the learning process and the educators' own teaching acts. Venkat and Askew's (2012) point made from empirical intervention programmes is also relevant to address here: what is made possible to learn for children is related to the educators' mathematical knowledge for teaching, since this determines *what* content is chosen for learning (for example: numbers for enumeration only, or number meaning explored as part-whole-relationship) and *how* this content is explored (utilising available resources in sporadic or in goal-oriented manners). Increasing the differentiated aspects of the learning object entailed a direct focus on the learning process rather than only the occurrences of children counting or using numbers. It is related to educators' mathematical knowledge for teaching (Hill, et al., 2008), since they enhance their awareness of the complexity of learning and teaching numbers and counting in preschool. The results of our analysis are to be seen as a coherent picture of what it means to work with numbers and counting in preschool, and what knowledge is necessary for teaching this content.

According to the national curriculum, making the learning process the object for evaluation, is central in sustaining high quality education in preschool. But as our study shows, it is not self-evident how this way of documenting practice and processes for pedagogical purposes is to be done or is even possible without reflective actions. Our study may, however, shed light on some necessary features of professional development in the context of preschool education, in line with Timperley's (2008) conclusions: professional development should centre around educators' awareness of what is necessary to know in order to facilitate learning for their children and that both focusing on a knowledge area and time are necessary to take into account. Furthermore,

Timperley argues that successful professional development needs a demarcated area of knowledge, on which the teachers make thorough reflections. Our study supports Timperley's argument, in that the narrow content, numbers and counting, was investigated deeply and during a prolonged time and changes in the educators' perceptions were appearing gradually.

The study design allows us to discern patterns in the educators' perceptions as the content of the documentations change over time. One pattern stands out, as there is a reoccurring line in progression from a very general expression of numbers and counting as tools for other mathematical exploration, towards a sharpened focus on numbers and counting as the object of learning itself. Our conclusion is that a common content such as numbers and counting cause challenges to implement as learning objects, even though educators themselves are confident in them offering children mathematics to learn in preschool practice (Björklund & Barendregt, 2016). The play-based child-centred practice causes these challenges, since learning is supposed to occur in play and daily routines rather than as planned content (Oppermann et al., 2016). The general conclusion from our study is thereby that children in these Swedish preschools are offered a broad spectrum of mathematics in their daily activities in preschool, but are rarely offered the depth and complexity of any specific learning object. This conclusion is drawn based on the general view this study provides, that orientation towards a learning object is not a common way to teach in preschool practice and it is a challenging task for educators to differentiate the necessary aspects of numbers and counting that are important to conduct any deeper inquiry with the children. Nevertheless, this change in approach is important for improving the learning outcome in any school form (Kennedy, 2005). In the process of differentiating aspects of the learning object, the educators open up several new dimensions of numbers and counting as a content for learning: first through recognising the content as part of the children's activities (counting to find out the quantity of sets), then the ways numbers and counting are made use of, (measuring) towards exploring numbers as learning objects where there are many aspects for the children to discern and make sense of the learning object. Initially, the window of opportunities that appear on a daily basis, as the documentations show, provides the children with experiences of the kind most of them are familiar with, generalising their previous knowledge in different contexts rather than extending their knowledge through challenging questions or inquiry. In the later documentations, there are many more opportunities for learning since focus is directed towards a critical aspect of education and professional development – the children's process of making meaning of the target learning content: numbers and counting.

Significance of the Study

Our study will contribute to a deeper understanding of the challenges but also opportunities that lie within the process of sharpening the focus on numbers and counting as a content for learning. This is essential for professional development among early childhood educators, since their basic education is general and teaching demands certain content knowledge, pedagogical knowledge and not least mathematical knowledge for teaching even with the youngest learners. The evaluation report done by the Swedish Schools Inspectorate (2016) shows the need for professional development, which our study has shown is made possible through collective reflective actions.

This study directs attention to a crucial feature of education, and in particular early childhood education, namely what is supposed to be learnt and how is this learning facilitated in the pedagogical activities offered to the children. Teaching, in the sense of making someone else aware of their surrounding world in a new or more nuanced way (Marton, 2015), has in preschool tradition settled with activities where opportunities to explore mathematical phenomena are made possible, in games, play or a milieu that offers stimulating materials (Oppermann et al., 2016). As recent studies (Sheridan, Williams, Sandberg, & Vuorinen, 2011) indicate, there is an

uncertainty about learning goals since the national curriculum emphasise goals to strive for (not to achieve at a certain age or level) and the importance of children's own initiatives in pedagogical practice. Preschool children are therefore rarely offered opportunities to challenge their conceptions of numbers and counting, content that is complex and basic understanding of which is not easily developed (also shown in Björklund & Barendregt, 2016). This study provides some idea of the reasons for this lack of teaching children the basics in number concepts and arithmetic. Focusing on children's activities alone and what learning content there may emerge will not support children's development to their full potential (as stated to be the preschool's mission by the curriculum), nor will it provide the practice evidence for the quality of their ways to stimulate children's learning (as meant to be done through the mandatory documentations). When educators differentiate more aspects of the learning content, including children's various perceptions of the same, the educators perceive the content for learning in ways that were not previously possible and their mathematical knowledge for teaching enhances. Now their focus on children learning about numbers and counting as shown in their documentations, contribute to their pedagogical mission in that they differentiate what children have to understand to make sense of and use numbers and counting in different situations.

Acknowledgements

This study was conducted within the project FASETT, funded by the National Research Council in Sweden (grant nr. 721-2014-1791).

References

- Ball, D., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Baroody, A., Torbeyns, J., & Verschaffel, L. (2009). Young children's understanding and application of subtraction-related principles. *Mathematical Thinking and Learning*, 11, 2-9.
- Bertram, C. & Christiansen, I. (2012). Editorial. In: Teacher knowledge and learning – Perspectives and reflections. Special issue. *Journal of Education*, 56, 1-16.
- Björklund, C. & Barendregt, W. (2016). Teachers' mathematical awareness in Swedish early childhood education. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 60(3), 359-377. doi:10.1080/00313831.2015.1066426
- Duncan, G. J., Dowsett, C. J., Claessens, A., Magnuson, K., Huston, A. C., Klebanov, P., . . . & Japel, C. (2007). School readiness and later achievement. *Developmental Psychology*, 43(6), 1428-1446.
- Gelman, R., & Gallistel, C. (1978). *The child's understanding of number*. Cambridge, Mass.: Harvard University.
- Hargreaves, A. (2000). Four ages of professionalism and professional learning. *Teachers and Teaching*, 6(2), 151-182. doi:10.1080/713698714
- Hill, C.H., Blunk, M.L. Charalambos, C.Y., Lewis, J.M., Phelps, G.C., Sleep, L. & Leowenberg Ball, D. (2008). Mathematical knowledge for teaching and the mathematical quality of instruction: An exploratory study. *Cognition and Instruction*, 26(4), 430-511. doi:10.1080/0737000802177235
- Kennedy, A. (2005). Models of continuing professional development: A framework for analysis. *Journal of In-service Education*, 31(2), 235-250.
- Klette, K. (2007). Trends in research on teaching and learning in schools: Didactics meets classroom studies. *European Educational Research Journal*, 6(2), 147-160.
- Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Math and Science Partnership (MSP). (2010). *Knowledge reviews: Deepening teachers' content knowledge. Knowledge management and dissemination*. Retrieved from: <http://www.mspkmd.net/blasts/tck.php>
- Marton, F. (2015). *Necessary conditions of learning*. New York: Routledge.
- Marton, F. & Booth, S. (1997). *Learning and awareness*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

- McCrink, K., & Wynn, K. (2004). Large-number addition and subtraction by 9-month-old infants. *Psychological Science*, 15(11), 776–781.
- McIntosh, A., Reys, B., & Reys, P. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, 12(3), 2-8.
- Neuman, D. (1987). *The origin of arithmetic skills: A phenomenographic approach*. Gothenburg: University of Gothenburg.
- Neuman, D. (2013). Att ändra arbetssätt och kultur inom den inledande aritmetikundervisningen. *Nordisk Matematikdidaktik*, 18(2), 3-46.
- National Agency for Education (2011). *Curriculum for the Preschool Lpfö98. Revised 2010*. Stockholm: Fritzes.
- Oppermann, E., Anders, Y., & Hachfeld, A. (2016). The influence of preschool teachers' content knowledge and mathematical ability beliefs on their sensitivity to mathematics in children's play. *Teaching and Teacher Education*, 58, 174–184. doi: 10.1016/j.tate.2016.05.004
- Östergren, R. & Träff, U. (2013). Early number knowledge and cognitive ability affect early arithmetic ability. *Journal of Experimental Child Psychology*, 115(3), 405–421.
- Pramling, N., & Pramling Samuelsson, I. (Eds.) (2011). *Educational encounters: Nordic studies in early childhood didactics*. Dordrecht: Springer.
- Pramling Samuelsson, I., & Pramling, N. (2013). Orchestrating and studying children's and teachers' learning: Reflections on developmental research approaches. *Education Inquiry*, 4(3), 519–536. doi: 10.3402/edui.v4i3.22624
- Sheridan, S., Williams, P., Sandberg, A., & Vuorinen, T. (2011). Preschool teaching in Sweden – a profession in change. *Educational Research*, 53(4), 415 – 437. doi: 10.1080/00131881.2011.625153
- Shulman, L.S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Siegler, R. & Braithwaite, D. (2017). Numerical development. *Annual Review of Psychology*, 68(1), 187-213.
- Swedish Schools Inspectorate (2016). *Förskolans pedagogiska uppdrag – Om undervisning, lärande och förskollärares ansvar*. Report nr. 2015:5671.
- The Ministry of Education (2010). *Education Act SFS 2010:800*. Stockholm: The Ministry of Education.
- Timperley, H. (2008). *Teacher professional learning and development*. Brussels: International Academy of Education.
- Venkat, H., & Askew, M. (2012). Mediating early number learning: Specialising across teacher talk and tools? In: Teacher knowledge and learning – Perspectives and reflections. Special issue. *Journal of Education*, 56, 67–90.
- Wynn, K. (1998). Numerical competence in infants. In C. Donlan (Ed.), *The development of mathematical skills*. (pp. 3–25). Hove: Psychology Press.

Authors

Camilla Björklund
University of Gothenburg, Sweden
email: camilla.bjorklund@ped.gu.se

Maria Alkhede
University of Gothenburg, Sweden
Malmö University, Sweden
email: maria.alkhede@gu.se

II

*Preschool Children's Learning
Opportunities Using Natural Numbers in
Number Row Activities*

Maria Alkhede & Mona Holmqvist

Early Childhood Education Journal

ISSN 1082-3301

Early Childhood Educ J
DOI 10.1007/s10643-020-01114-9



Your article is published under the Creative Commons Attribution license which allows users to read, copy, distribute and make derivative works, as long as the author of the original work is cited. You may self-archive this article on your own website, an institutional repository or funder's repository and make it publicly available immediately.



Preschool Children's Learning Opportunities Using Natural Numbers in Number Row Activities

Maria Alkhede^{1,2} · Mona Holmqvist³

Accepted: 24 September 2020
© The Author(s) 2020

Abstract

This study analysed how preschool teachers differently enacted the same mathematical activity for preschool children to discern numbers, and how this affected the children's learning opportunities during the activity. The analysis was based on variation theory and Chi's taxonomy of learning activities. Two Swedish preschool teachers' enactment of the same mathematical activity for 27 children aged 4–6 years was studied. Video recordings of what the children were offered to discern were used in the analysis. The results indicate that variations in how the teachers chose to enact the activity produced two different learning opportunities for the children. Differences in what aspects were made discernible were closely linked to the characteristics of the activity implemented. The enactments differed even if the same game was chosen and the same amount of time was used in the play-based activity. In one preschool group, there were few opportunities to discern more than the nominal form of numbers; the other preschool group had an activity focused on all number forms simultaneously. In addition, in the latter group, the children had the opportunity to develop equinumerosity. The results suggest that the activity with limited variation was more appropriate for learning with undeveloped knowledge; the children with more developed understanding required a more varied design. This study contributes to the knowledge of how the design of an activity affects children's learning differently, which is important when planning learning-based preschool activities.

Keywords Preschool mathematics · Number forms · Cardinality · Equinumerosity

Introduction

Designing mathematical learning activities for children in preschool is important and sometimes challenging for teachers. Pyle and Bigelow (2015) found that kindergarten teachers implemented play to develop children's learning in their daily work differently, depending on personal beliefs of their own role in the activity. Play is an activity with many forms. Taylor and Boyer (2020) identified different types of play-based learning (PBL) in kindergarten. They distinguished between teacher- and child-directed play. Regardless of the teacher's direction, an activity is designed to offer learning

opportunities for the children and to affect their learning. Children's active participation in the learning situation was found to be the most important factor for designing effective teaching interventions to develop children's mathematical ability (Papadakis et al. 2017).

In research on how to improve preschool mathematics education in play-based kindergarten activities, four different forms of mathematics pedagogy used by teachers were identified: free play, guided play, teacher-directed play, and direct instruction (Wickstrom et al. 2019). The results also showed that play was the main arena of observed mathematical activities; teacher-directed play was the main arena for 'math incidents' (p. 294) supporting the children's active participation. The study presented in that article was in a Swedish preschool context. Björklund and Barendregt (2016) have defined such a context as a learning environment that is supposed to work with mathematics, as it occurs in children's self-initiated activities; however, the learning environment also has to make it possible to explore a specific mathematical principle in goal-oriented play and meaningful activities (p. 371). By analysing a questionnaire answered

✉ Mona Holmqvist
mona.holmqvist@mau.se

¹ Department of Children, Youth and Society, Malmö University, Malmö, Sweden

² Department of Education, Communication and Learning, University of Gothenburg, Gothenburg, Sweden

³ Department of School Development and Leadership, Malmö University, Malmö, Sweden

by 116 teachers, Björklund and Barendregt found that goal-oriented activities were rarer than the children's self-initiated activities. Breive et al. (2018) found in their design-based study that kindergarten teachers following the instructions of activities for mathematical learning "lost opportunities" for adopting an inquiry approach to the learning of mathematics and that playful learning was implemented to a limited degree' (p. 196). Lerkkanen et al. (2016) argue that child-centred and teacher-directed activities in preschool are based on different theoretical assumptions. The child-centred approach is founded on constructivist theory: children are seen as constructors of knowledge, and the teachers' role is more of a facilitator for their learning. By contrast, the teacher-directed approach is based on traditional learning theory and didactics: the teachers are regarded as significant people in contributing with knowledge and challenging children's previous knowledge. Those authors' results indicate a strong positive effect of child-centred activities for children's learning.

The focus of learning in the present study is understanding the different forms of natural numbers. One argument for this choice is that cardinality (i.e., giving a number word that represents an entire set of entities) has been found to be important for children's mathematical learning (Resnick 1983; Cross et al. 2009)—both in a short- and long-term perspective. Children who enter school with developed mathematical understanding are more likely to succeed in future mathematical learning (Papadakis et al. 2017). Further, a developed understanding of the distinction between cardinal and ordinal forms of numbers is required to understand equinumerosity. Equinumerosity (Sarnecka and Wright 2013) refers to the knowledge that a number (e.g., two) corresponds only to exactly that number of items (e.g., two spoons, not three spoons). If children develop equinumerosity, they also understand cardinality (Sarnecka and Wright 2013). Cardinality is the knowledge of the succession in a number row by adding one item to the previous item. If the child is not aware of the addition of one item, they might understand numbers as labels (nominal understanding) or as words in a number chant (ordinal understanding). The sequence of counting words is one of the most important tools of early mathematics learning (Fuson 1992). Young children's initial contact with numbers probably occurs when they first use the words for numbers in a song, a poem, or perhaps when they count some objects in a context. Thus, young children are introduced to number symbols early in their learning environment (Fuson 1992; Clements and Sarama 2007) by learning numbers as labels or names without knowing what amounts they represent: 'In these cases the fact that a child says the correct number word does not ensure that the child has understood or is using the cardinal, ordinal, or measure numerical reference of the symbol' (Fuson 1988, pp. 12–13). To enhance the children's understanding

of numbers, discernment of diversity in number representations (i.e., written symbols, spoken symbols, real-world situations, and manipulative models and pictures) affect the children's learning opportunities (Lesh 1981). Simultaneously, discernment of numbers in different shapes, both in the form of representation as well as cardinal and ordinal, is important for children's future mathematical performance (Fuson 1988; McIntosh et al. 1992). The understanding of cardinality is the key to success for developing a number sense; thus, an important field of study is to obtain more knowledge about how teaching can be designed to offer children their best learning opportunities.

This study analysed how preschool teachers differently enacted the same mathematical activity for preschool children to discern numbers and how this affected the children's learning opportunities during the activity. The study addresses the following questions:

RQ1. What differences are evident in two preschool teachers' enactment of the same mathematical activity for children?

RQ2. How do those differences contribute to the variety of learning opportunities for the children?

Number Sense

Number sense refers to a person's general understanding of numbers and operations along with the ability and inclination to use this knowledge in flexible ways. Number sense is crucial for making mathematical judgements and developing useful strategies for handling numbers and operations (McIntosh et al. 1992). This concept has been well researched in the literature over many years. Research attempts to describe number sense include the meaning of numbers (Brownell 1947), multiple representations (McIntosh et al. 1992), understanding of quantity (Davydov 1982; Wynn 1989), partial–whole knowledge (Carpenter and Moser 1982), various uses of number words (Fuson and Hall 1983), knowledge about magnitude (McIntosh et al. 1992; Howden 1989; Baroody 1987), computing and counting strategies (Reys and Reys 1995), a benchmark system (McIntosh et al. 1992), and using numbers in operations (McIntosh et al. 1992; Cross et al. 2009; Gelman and Galistel 1986; Davydov 1982).

Four mathematical aspects for understanding and managing number sense in early childhood have been identified (Cross et al. 2009): cardinality (i.e., giving a number word for a set of entities); number word list (ordinal; i.e., knowing the number sequence); one-to-one counting correspondence (equinumerosity), where numerals correspond to objects; and written numerical symbols. Reading, writing, and understanding written number symbols are also

important in reference to the nominal form of numbers. These four aspects are initially separated in teaching children to gradually learn to detect and use them in different situations in an integrated and simultaneous way. When using numbers, adults do not need to distinguish between the number's ordinal and cardinal meanings. However, children first learn these meanings individually and then must link them together (Cross et al. 2009). To perform a calculation, it is necessary to have knowledge of several aspects simultaneously. Using numbers in numerical operations or arithmetic problem-solving requires the knowledge of numbers' cardinality and ordinality (i.e., a number word may determine the quantity of a set and number words are related to each other in orderly fashion) (Gelman and Gallistel 1986).

The research results stress the importance of fully understanding cardinality (Resnick 1983; Cross et al. 2009). Among Gelman and Gallistel's (1986) five principles for enumeration, the cardinal principle is found to be the most challenging, but also the key to successfully developing number sense. To correctly determine a number, it is necessary to use two more of these principles (i.e., one-to-one correspondence, equinumerosity) and stable order, simultaneously. Children, aged between three and five, are beginning to develop their cardinal understanding of numbers. Understanding cardinality requires the understanding that it is not dependent on enumeration, but relates to a multitude (Wynn 1992). Very young children also have knowledge about cardinality, which starts with subitising (i.e., perceiving a small amount [three to four] without counting) (Clements 1999). The concept of subitising was defined by Kaufman et al. (1949): 'We wish to avoid terms now in use, having other meanings, and terms with the misleading connotations of estimating, counting, or grasping by intuition. The term proposed is *subitize*' (p. 520). There are two types of subitising: perceptual and conceptual. Children use perceptual subitising as a prelude to understanding cardinality (Clements 1999). Conceptual subitising is about using a pattern to perceive a (larger) number, e.g., two pictures with four dots on each, resulting in eight dots. Here, conceptual subitising can be linked to arithmetic abilities, such as calculations and operating with numbers. Research results show that understanding cardinality is the basis for counting, operating with numbers, and other complex skills involving addition and subtraction (Fuson 1992; Wynn 1992; Clements and Sarama 2014). In their study, Bermejo et al. (2004) showed that children's cardinality learning was enhanced if cognitive conflicts were used. The role of the teachers in pointing out contradictions during the interventions was also an important variable.

Besides the discernment of ordinal and cardinal aspects, understanding numbers requires the discernment of the diversity of numbers and the variation in representations of the same number. Understanding and using numbers

as mathematical concepts in different situations requires a translation process to map between these contexts, as explained in a model by Lesh (1981). In this model, several aspects of how numbers are translated between contexts and forms of representations are related by the activities into which the representations are translated. For example, manipulative models can be used to symbolise written symbols, but written symbols can also be concretised using manipulative models. Manipulative models can also be used to describe particular details of real-world situations as well as generalisations for them (Fig. 1).

Number sense itself contains several components; therefore, learning and development in this field becomes an intricate and complex process. By giving children the opportunity to discover and discern all these number forms simultaneously, their number sense can be developed (i.e., the children can develop their ability to perceive, pronounce, describe, discuss, and construct numbers): 'Understanding numbers and related concepts includes understanding concepts of quantity and relative quantity, facility with counting, and the ability to carry out simple operations' (Cross et al. 2009, p. 22). Number sense is about discerning different aspects of numbers and understanding their meaning and importance, in addition to being able to see the meaning of and relevance in using numbers. However, it is well known that the development of an understanding of numbers involves a long process (Fuson 1991; Cross et al. 2009; Gelman and Meck 1992).

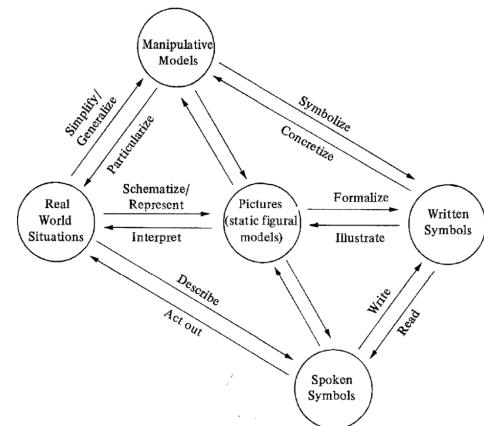


Fig. 1 Lesh's (1981, p. 246) translation processes (with the author's permission)

Theoretical Frameworks

Chi's Taxonomy of Activities

The long process of learning numbers consists of different kinds of learning opportunities in activities with diverse supports. Wickstrom et al. (2019) found that children's mathematical play-based learning in preschool has four different forms: free play, guided play, teacher-directed play, and direct instruction. However, this is a definition of the characteristics of the forms of the activities: Wickstrom et al. (2019) do not define how the children's active participation is related to the content.

The taxonomy of Chi (2009) allows activities to be defined as active, constructive, or interactive (Table 1). This means that free play, guided play, teacher-directed play, and direct instruction can be defined as active, constructive, or interactive. Being active is characterised by physically doing something, such as pointing, talking, looking, and showing, in response to materials or forms of communication; it constitutes overt activity. Cognitive processes are suggested as activating previous knowledge as well as attending to and storing new information. At the next level (constructive activities), the child produces outputs that go beyond the information they have received. Overt activities are explanations, connecting previous knowledge to new knowledge: the child reflects and plans in new ways. Cognitive processes when a child constructs new knowledge are, for example, when they create new knowledge by merging previous knowledge with new knowledge, correct inaccuracies, and organise their

own knowledge. Finally, interactive activities are characterised by a dialogue about the same topic with respect to other people's perspectives and comments. Overt activities are, for example, when a child confronts or defends their knowledge, revises their arguments or actions based on feedback from others, or responds to support. Cognitive processes involve taking other people's contributions into consideration. This means that whatever the form of learning activity, children's active participation can more or less develop according to how involved they are in the learning processes: 'The framework consists of a taxonomy that generates a hypothesis, that interactive activities might be better than constructive activities, which in turn might be better than active activities, which would be better than passive activities' (Chi 2009, p. 97).

Variation Theory

A theoretical framework with assumptions of necessary conditions for learning can guide efforts to determine how a learner understands a defined content (Holmqvist et al. 2014; Marton 2015). To capture a part of the learning process (i.e., the children's expressed understanding), variation theory can be used as an analysis approach to study learning opportunities that have been offered. Variation theory focuses on aspects of the phenomenon that are discernible or not discernible during a learning activity; it captures what was possible for the children to discern during their learning activity (Holmqvist 2011). When based on variation theory, learning requires variation of aspects of the object of learning: that

Table 1 Chi's (2009, p. 77) categorization of overt activities as active, constructive, and interactive

	Active	Constructive	Interactive
Characteristics	Doing something physically	Producing outputs that contain ideas that go beyond the presented information	Dialoguing substantively on the same topic, and not ignoring a partner's contributions
Overt activities	<i>Engaging Activities</i> Look, gaze, or fixate Underline or highlight Gesture or point Paraphrase Manipulate objects or tapes Select Repeat	<i>Self-construction Activities</i> Explain or elaborate Justify or provide reasons Connect or link Construct a concept map Reflect or self-monitor Plan and predict outcomes Generate hypotheses	<i>Guided-construction Activities in Instructional Dialogue:</i> Respond to scaffolding Revise errors from feedback <i>Sequential or Co-construction Activities in Joint Dialogue</i> Build on partner's contribution Argue, defend Confront or challenge
Cognitive processes	<i>Attending Processes</i> Activate existing knowledge Assimilate, encode, or store new information Search existing knowledge	<i>Creating Processes</i> Infer new knowledge Integrate new information with existing knowledge Organize own knowledge for coherence Repair own faulty knowledge Repair own faulty knowledge	<i>Jointly Creating Processes</i> Creating processes that incorporate a partner's contributions

variation simultaneously focuses on different aspects that are essential for the content; to develop new knowledge, the simultaneous variation offers the learner the chance to discern what has so far not been discerned. This means that in order to understand the number three, children have to discern what numbers are by discerning the aspect ‘numbers’ simultaneously with the features one, two, three, and so on, to discern the similarities (numbers) and differences (values) among them. If a child encounters only one number, such as the child’s age in years, the child’s counting may be the experience of a kind of attribute rather than a number. The way in which the aspects of a phenomenon vary follows a pattern (Holmqvist et al. 2014), which can include contrast, such as contrasting the number three with the number four to ensure that the children experience the difference between them and can separate them. Another pattern of variation is generalisation, which in this case means the possibility for the children to discern different representations of the same thing by separating the principle from its representation. Three is always three no matter whether you use three apples, three flowers, or three teddy bears as examples. Finally, fusion is the highest order of the pattern of variation, which means that several aspects can vary simultaneously. If a child is introduced to the number three, the child will discern the name, its placement in an order (between two and four), and also the amount it represents (three items). Therefore, the child can identify these aspects for each number from among various numbers.

Methodology

The Context of the Study: A Swedish Preschool

The Swedish National Agency for Education (2019) states that preschool education, which since 2011 has been included in Sweden’s education system, should rest on both a scientific basis and proven experience. The agency emphasises that knowledge is expressed in various forms as facts, understanding, skills, and familiarity, which interact with and presuppose one another. In particular, the agency emphasises the importance of mathematics learning and notes that it helps people to make well-informed decisions in daily life and increases the opportunities to participate in society’s decision-making processes (Swedish National Agency for Education 2019). Professionals working in Swedish preschools are mainly preschool teachers, but there are also child minders with no teaching degree. The justification for teaching preschool mathematics is that preschool education should give children the opportunity to use mathematics to investigate and describe their surroundings and solve everyday problems (Swedish National Agency for Education 2016). Preschools should

give each child the prerequisites for developing the ability to use mathematics and understand its basic properties, including order and numbers. The preschool mathematics curriculum focuses on two basic elements: room perception (room, time, and form) and number sense (quantities, number, order, and measurement) (Swedish National Agency for Education 2016, 2018).

Children’s learning about numbers and counting in the present study, which is part of a larger research project including interventions (Kullberg and Björklund 2019), focuses on four preschools in a small municipality in south-western Sweden during a school year (September–April). Questions such as when and how preschool children learn to count were processed. The study focused on looking at what happens in different activities with mathematics content offered to children at the participating preschools. Four preschool teachers were asked to plan and facilitate an activity with the content of numbers and counting. Two of the activities were chosen because the teachers occasionally based their activities on the same PBL activity. This made it possible to study two different enactments of an activity with the same intentions and learning goals. The specific objectives were to describe the number and nature of the numerical words used in the two activities, and to uncover in what way the differences affected the children’s learning opportunities, depending on the combination of different designs and the students’ prior knowledge.

In this study, two activities that were found to originate from similar instructions became especially interesting to analyse because the same activity was enacted differently (i.e., the Boxes and Cups activities), which can be defined as a PBL situation (Taylor and Boyer 2020). The activity was inspired by an article in a Swedish journal for mathematics education for teachers and researchers, *Nämnen* (<https://ncm.gu.se/namnen>), published by the National Center for Mathematics Education in Sweden. In that article, the activity is called ‘Where is the treasure?’ The activity is aimed at developing knowledge about number sequences and the relationships between numbers. The materials used are 11 cups, labelled with the numbers 0–10, and something to hide under the cups, e.g., a pearl. One person hides the treasure while the others close their eyes, and then these students propose the cup number under which they think the treasure is hidden. If the chosen cup does not contain the treasure, it is removed. The student who hid the pearl provides a clue regarding ‘higher’ or ‘lower’ cup numbers (Olsson and Forsbäck 1998, p. 17), and the search continues. Even though the use of the words ‘higher’ and ‘lower’ is problematic because it connotes location rather than quantity, the teachers made this choice following what they read in the *Nämnen* article. We preferred the use of the wording ‘smaller’ or ‘bigger’

number. These two activities were analysed with a focus on the enactment of the learning situation based on two theoretical frameworks, Chi's taxonomy, and variation theory.

Participants

Two groups of children aged 4–6 years ($n=27$) and their teachers ($n=5$) from Swedish preschools participated in this study. The two groups were from preschools B and C—two different preschools in a small municipality in south-western Sweden. The Boxes activity was planned and led by a child minder with 13 years of preschool experience; the Cups activity was planned and led by a preschool teacher with over 10 years of preschool experience. One or two additional teachers were also physically present during the activity, but they did not contribute (Table 2). The participants spoke in Swedish. Written consent was sent to the children's parents and the teachers, collected by the teachers, and then returned to the principal investigator (Camilla Björklund) of the main project, FASETT, financed by the Swedish Research Council (grant number 721-2014-1791). An ethical application for the project was approved by the regional review board (2015-04-27 Dnr: 258-15).

Data-Collection Method

The data was collected between August 2015 and May 2016. The first author made video recordings using a hand-held camera to capture the activities. These recordings focused on the activity, the teachers, and the children who participated in the activity. The children and their teachers were originally from four preschools. The groups engaged in activities familiar to them in their ordinary preschool environment. There were no interventional aspects to this study; instead, the first author instructed the teachers to plan and enact an activity focusing on numbers and counting to enhance their students' learning in line with their ordinary preschool activities. The choice of the same game for two groups of children at different preschools was a coincidence.

The video recordings from the four preschool groups were long (5 h 35 min), and so the observations made during the project were extensive. Of this entire material, the two focused activities chosen for detailed analysis lasted 26 min 50 s for the two groups (12 min 20 s for one; 14 min 30 s for the other); as with the rest of the material, the content was transcribed verbatim. The video recordings of the two preschool groups lasted 58 min for one and 1 h 56 min for the other. The focused analysis of parts of the video observations began and finished with the targeted activity. Qi et al. (2006) have studied children's behaviour characteristics in teacher-directed structured activities and child-directed unstructured activities; they found an observation time of 60 min to be sufficient (divided into 10-min periods).

Enactment of the Teachers' Activities and Data Collected

The teachers' two activities are described briefly here to set the scene of the analysis made to answer this study's aim and research questions. It is important to remember that this is the same activity (based on the treasure activity); however, it was interpreted and enacted differently by the participating teachers. To distinguish between them in this paper, we have named the activities based on the materials used by the teachers (one using cups and the other using boxes to hide the treasure). The Cups activity consisted of a representation of a number row consisting of 10 cups with the numbers 1–10 written on the bottom of the cups, which were placed upside down on a table. No cup represented 0. The children were sitting in a circle, which meant that for some of the children, the numbers were upside down and the number row (a paper strip) reversed. The teacher placed the cups in a certain order that contradicted with how the number row was placed. A child saw this contradiction and tried to correct the number row into the proper order but was stopped by the teacher. Instead, the teacher changed the order of the cups. The children were asked about the names of the numbers written on the cups, which were placed into the correct order. After this exercise, a small piece of paper (i.e., the treasure) was placed under one of the cups, while

Table 2 Participants, data and number representations

Mathematical activity	Boxes	Cups
Participants (children/teachers)	14 (12/2)	18 (15/3)
Data collected	Video recording 12 min 20 s	Video recording 14 min 30 s
Number representations offered	Digits (written symbols) Fingers (real-world situation) Boxes (manipulate models) Dots (pictures)	Digits (written symbols) Verbalised (spoken symbols)
Number of relationships offered	18	2

one of the children closed her or his eyes. The child was allowed to open his or her eyes and guess where the piece of paper could be found. The other children gave cues such as whether it was higher or lower. The cups that were taken were returned, which made it a bit more difficult as the children forgot what had already been guessed. There was no representation of the cardinality of the numbers, e.g., two combined with the representation of two dots.

In the Boxes activity, the boxes were placed in the same order as the cups in the activity above; however, the numbers on the boxes were supplemented with dots to represent the amount of the number (e.g., three and ●●●), and all numbers between 0 and 10 were used. Another difference was that the teacher did not show the boxes in order; the children had to correct the number row by discussing the number order instead. The teacher did not use a separate number row in this activity. A small plastic bear was used as the treasure in this activity. Another difference was that all children had to close their eyes except for the one who was hiding the bear. All of the children became active in trying to find out where the treasure was. The teacher turned the boxes upside down after the number had been taken, and the children received cues such as 'higher' or 'lower' when their guess was incorrect. At the end of the activity, the teacher collected the boxes by asking the children to give her the box representing her three fingers, the box that was higher than eight, and so on. Lesh's (1981) framework showing diversity in number representations (mapped in Fig. 1) was used to visualise the forms of number representations used by the teachers.

Analysis

The video recordings from two different preschool groups of children aged 4–6 years old were analysed based on two frameworks: variation theory (Marton 2015) and Chi's taxonomy of activities (Chi 2009). The material was transcribed and analysed initially to capture the overall understanding of the two different activities. Both researchers watched the recordings to compare them against the transcriptions for consistency. Parts of the material were also analysed in seminars with other researchers to validate our interpretation. A descriptive analysis was performed initially. The initial descriptive analysis shows the measured number words uttered by the teachers and children. The number words were divided into nominal, ordinal, or cardinal numbers. The discernment of equinumerosity was also analysed. For example, if the child said the cup was number three, it was categorised as nominal; if they said the numbers in order in a number sequence ('one, two, and three'), it was categorised as ordinal; and 'there are three dots' was categorised as cardinal. The equinumerosity category refers to the number that involves both ordinal and cardinal meaning, e.g., when the

child counted one, two, and three and recognised that this meant three items: a one-to-one correspondence.

This step was followed by an analysis to capture what aspects were made discernible based on variation theory (Marton 2015). During this part of the analysis, the focus was on what aspects were made discernible for the children separately and simultaneously. One process used to capture what aspects were offered to the children to discern, was to describe the frequency of words used by teachers and children. First, the total amount of number words was determined; they were then divided according to meaning as nominal, ordinal, cardinal, or equinumerosity. The assumption was that activities using different word meanings were also indicators of differences in offered learning possibilities; that was based on an assumption of variation theory about what becomes discernible. The second step of the variation theory analysis examined what simultaneous opportunities the activities offered concerning number forms and counting: the dimensions of variation (such as contrast, generalisation, and fusion) expanded during the activity. The content was analysed based on variation theory (Marton 2015); however, the learning activities were analysed using Chi's (2009) framework. The third step in the analysis of the two activities assessed the ways in which the activities consisted of active, constructive, or interactive structures. An analysis was also made of the implicative characteristics of the overt and cognitive processes.

Results

The results are presented in accordance with the study's specific objectives. First, the results of the research questions are presented: RQ1 (What differences are evident in two preschool teachers' enactment of the same mathematical activity for children?) and RQ2 (How do these differences contribute to the variety of learning opportunities for the children?).

The analyses of the measured number words uttered by the teachers and children show a difference between what was said during the two activities (Table 3). The analysis indicates that the Boxes activity includes a greater variation of which forms of the number are discussed, and by that the opportunity to simultaneously discern nominal, ordinal, and cardinal forms of the number as well as equinumerosity. In Table 3, the design of the lesson also showed that a wider range of number representations were used in the activity with boxes, i.e., digits (written symbols), fingers (real-world situation), boxes (manipulated model), dots (pictured), and verbalisations (spoken symbols) based on Lesh's (1981) definitions. In the Cups activity, only two representations were offered: digits (symbols), and verbalisations (words). This shows a difference in the enactment of the activities,

Table 3 Layout of the activities

Elements	Boxes	Cups
Setting Material	All participants are sitting in a circle on the floor - One larger pink box (zero) - 10 small boxes in the large box with the numbers 1–10 and also the same quantity of dots corresponding to the number on the box - A little plastic teddy bear the treasure	All participants are sitting in a circle on the floor - Blue velvet cloth - 10 cups with the numbers 1–10 - One yellow paper strip with the number sequence 1–10 - One little piece of paper = the treasure
Preparations	No further presentation, the participants are already aware of the activity. As soon as the teacher shows the material, the children react	No further presentation, the participants are already aware of the activity. As soon as the teacher shows the material, the children react
	Children: I know, it is the boxes! Ah, the boxes. Yes, I love it!	Teacher: You remember these things? <i>Show the cups in a pile</i> Children: Yes! Teacher: What is this digit? <i>Showing the cup with 1</i> Child: One Teacher: One <i>The teacher puts the cup with 1 on the blue cloth and then continue to show the cup with 2</i> Child: two...three... <i>The teacher puts the cup with 2 on the blue cloth and so on until all cups are placed in a row from 1–10 on the blue cloth</i>
Introducing the game	Teacher: Now we will see... Child: Can't you find one, eh? All: One! <i>A box with 1 is put on the floor in front of the group</i> Child: Do you find two? Child: see two Teacher: Do you see two? All: Two! <i>A box with 2 is put on the floor. The teacher picks up all the boxes one at a time both in order [1, 2, 3] and in disorder {3, 4, 6} and finally all boxes 1–10 are placed on the floor</i>	

Table 3 (continued)

Elements	Boxes	Cups
The number row 1–10 in place	Children: [giggling and counting on] Eleven, twelve, thirteen ... 26, 27, 28, 29 Teacher: It's enough with 30? How many boxes are there then?	Teacher: Good, one, two, three, four, five, six, seven, eight, nine, ten. Oh, now I realized that I forgot something... <i>The teacher fetches a long yellow strip of paper with the number row 1–10 written on it</i>
Children: Ten	Teacher: Which... which number is the lowest?	
Children: One	Teacher: Is one the lowest number?	
Children: Yes	Teacher: Which number is the highest then?	
Children: Ten	Teacher: Which number is in the middle?	
	A child leans forward and touches the boxes	
Child: Aah... Five... Two [boxes]... five and six...	Teacher: You mean those? Points at 5 and 6?	
Child: One, two, three, four and one two three four	The child counts the boxes that are on the sides of 5 and 6	
Teacher: How do you know that 5 isn't in the middle?	Child: Because then there are one, two, three, four, five [boxes] and one two three, four [boxes]	
Teacher: Is it not possible to have just one box in the middle?	Child: No, there must be one [box] more then. One more, zero	
Child: Then number 5 had been in the middle. But now [into the number row 1–10] it had to be two boxes	The teacher now adds a bigger pink box to the number row representing box number zero. The child puts the box number 6 forward and now counts the boxes beside it	
Teacher: No, stop! Number 5, yes?	Child: No, stop! Number 5, yes?	
Starting the game	Teacher: Boris, do you want to close your eyes so I can hide the little piece of paper? Now you [talking to the other children], can't say anything out loud. You mustn't say under what digit it is, Boris will guess. Now Boris, where do you think we have hidden it?	
Continuing the game	<i>The teacher continues to hide the treasure throughout the activity</i>	
5 sets	15 sets	
	<i>The teacher is the one who hides the treasure while one child closes his or her eyes. This child may then search for the treasure with support from the other participants</i>	
	Clues: higher, lower, this way, that way	
	When guessing wrong, i.e., the cup is empty, the cup puts back in its place in the number row	

Table 3 (continued)

Elements	Boxes	Cups
Wrapping up	The teacher collects the boxes in the number row by giving the children different kinds of tasks - Can you give me the one with two dots, someone higher than five, lower than eight, etc	When all participants have searched for and found the treasure, <i>the teacher ends the activity by packing up all material</i>

Italics highlights ongoing activities

although they are inspired by the same game. The teachers also had slightly different approaches regarding the children's activities: the children in the Cups activity only let one child in the group close her or his eyes, while all children in the Boxes activity closed their eyes except for the one who hid the treasure. Another prominent finding was that the teachers used the Swedish word for digit (*siffra*) when talking about numbers instead of the Swedish word *tal*. This means that when the teachers talk about 10, it becomes difficult to use the word 'digit' because the two digits are not separate but combined in a number (*tal*). In English, it would be equivalent to naming 10 as a digit.

Differences Found in the Enactments of the Activity (RQ1)

A prominent result of the analyses is the direction of the activity, where the Cups activity is more clearly teacher-directed play than the Boxes activity, which is more of a teacher-initialized play. The activities were divided into six levels after defining the setting and materials used, i.e., preparation, introducing the game, starting the game, the number row 1–10 in place, continuing the game, and wrapping up. The layout of all activities in each group is described in Table 4. Even if the duration of the Boxes activity was slightly shorter (12 min 21 s) than the Cups activity (14 min 30 s), the former provided more learning opportunities. First of all, all children were active in the Boxes activity because all of them guessed where the treasure was; by contrast, one child was guessing and watched by the others in the Cups activity. There was also a difference in the amount of repetitions, with five repetitions in the Boxes activity and 15 in the Cups activity.

Furthermore, based on Chi's (2009) framework, there were also differences in the enactments. The Cups activity did not include many active, constructive, or interactive aspects. However, there were parts of active processes. For example, in the beginning, the children were physically engaged in the placement of the cups, and they also performed some engaging activities because they needed to look, gaze, and fixate on the cups and their numbers. It is not easy to tell whether the children were involved in cognitive processes, but if they had not already developed knowledge of the relationship between the written digit and its verbal sound, they might have been involved in active cognitive processes. The Boxes activity was more focused on constructive and interactive processes. For example, the order of the boxes was negotiated between the teacher and the children, which opens up constructive processes where the children are free to express ideas that go beyond the presented information. The Boxes activity also provided examples of self-constructive activities, as the students were asked in a way to make them reason about their acts or outcomes.

Whether the children were creating processes to develop new knowledge was not studied because the children's prior and post-knowledge were not assessed. However, there was a strong focus on interactive processes in the Boxes activity, where the teachers continuously discussed and reflected upon all children's expressions and guided them to reflect on and re-think the situation. When the number row was in place, the teacher challenged the children's thinking by giving them a task to find the 'middle' of the boxes by putting the numbers and dots on the boxes into the background and dividing the boxes into two groups to find the middle.

This example of providing opportunities to develop equinumerosity knowledge is also a good example of illustrating learning opportunities based on a variation theoretical analysis. The dimensions of variation are limited regarding the Cups activity but are rich in contrasting the numbers with each other and connecting the digits to their verbal representation. With the Boxes activity, patterns of variation were found for the contrasting number forms (nominal, ordinal, and cardinal) simultaneously. This makes the activity more complex and suits children who have developed the basic learning about numbers already and need some more challenges. The activity where the children were asked to find the 'middle' is an example of fusion, which requires the knowledge of several aspects of the object of learning. The children must discern the verbal and written form of digits to understand equinumerosity and also that three is always $\bullet\bullet\bullet$ items. Furthermore, the students must shift their focus and ignore the signs on the boxes to see them as new parts of another whole (i.e., two equal groups of boxes with different signs). This equality only refers to the exact number of boxes in both parts, showing that four boxes is the same as four other boxes regardless of their symbols (i.e., digits and dots).

Differences Contributing to the Variety of Learning Opportunities (RQ2)

The children's expressions were measured to identify the differences in the enactment of the learning activity. The results of this analysis (Table 4) show similarities in what is expressed by the children and the enactment of the activities (i.e. the children speak more in the Boxes activity), which had more interactive processes.

In the Boxes activity, the teachers expressed 43% of the number words, while the children expressed 57%. In the Cups activity, the situation was reversed, with 63% and 37% of the number words expressed by the teachers and children, respectively. Differences were also observed in the distribution of nominal, ordinal, and cardinal number words. All three forms were represented in the Boxes activity, which had a more complex design, although the cardinal form was the least frequently spoken. In the Cups activity, there was a strong focus on the nominal and ordinal forms, and it was mainly the teacher who spoke. Regarding equinumerosity, this was only captured in the complex Boxes activity. Here, when wrapping up, the teachers and children worked with ordinal and cardinal number forms simultaneously, as shown in the excerpt below:

Teacher: Calle can you give me the box that has three dots [shows three fingers]?

Three, three dots, please.

Calle gives the teacher the box with three dots.

[...].

Teacher: Eight. Charlotte can you give me one that is lower than eight?

Charlotte gives the teacher the box with 5.

Teacher: Five. Clara, someone give me one higher than five, a higher digit than five, please.

Clara gives the teacher the box with 7.

Teacher: Cissi, higher than the digit seven?

Table 4 Distribution of number words among teacher and children

Distribution of expressions	Boxes		Cups	
	Teachers	Children	Teachers	Children
Verbal number words	n=122 52 (43%)	70 (57%)	n=110 69 (63%)	41 (37%)
Nominal (names)	n=40* 16 (40%)	16 (40%)	n=94 53 (56%)	41 (44%)
Ordinal (order)	n=49 27 (55%)	22 (45%)	n=14 0 (0%)	0 (0%)
Cardinal (amount)	n=7 1 (14%)	6 (86%)	n=0	—
Equinumerosity (ordinal+cardinal)	n=26 8 (47.5%)	18 (52.5%)	n=2 1 (50%)	1 (50%)

*Eight (20%) of the words were simultaneous because the teachers and children were counting together

Cissi first touches the box with 1, then the box with 4 and also the box with 6...

Teacher: ... more than seven.

[...].

Teacher: Cemal, lower than nine.

Cemal picks up the box with 8.

Teacher: Can you give me number four, Cecil?

Cecil gives the teacher the last box, number 4.

[...].

Teacher: Not this time, because how many boxes were there?

Children: 10.

The teacher shows all of her fingers.

Teacher: And how many children were there?

Children: 12.

Teacher: Yes, 10 boxes were there [teacher shows all of her fingers]. Was there a box for everyone, then?

Children: No!

In the Cups activity, there was no special learning opportunity when they wrapped up the activity.

Teacher: Good. I think you are very good with this. And now everybody has been tested. Time for a break. I'm going to take these away, and it's time for a bit of fruit.

The teacher collects the cups and put them together, also taking away the number rows and the blue cloth used as a carpet for marking where the activity took place.

learning (Resnick 1983; Cross et al. 2009); thus, studying how preschool teachers try to develop their students' knowledge is important. This study had two specific objectives. The first was to describe the number and nature of the numerical words used in the two activities, based on an assumption that to be able to develop knowledge, the children must be introduced to the learning content. The results show differences between the activities regarding what aspects of numbers were focused on in the activities. In the Boxes activity, the cardinal aspect was offered by the simultaneous presentation of numbers in nominal and cardinal forms, as digits and dots (3 ●●●) were visible on the top of the boxes. The ordinal form was also present, as the boxes were placed in order from 0 to 10. This finding is in line with the results of Papadakis, Kalogiannakis and Zaranis (2017), who demonstrated that various kinds of stimuli enhanced children's ability to discover mathematical concepts. However, in the present study, some children might have found the use of the words 'higher' and 'lower' instead of 'more' or 'less' to be confusing; especially those sitting at the start or end of the number row, as the line could give the impression of a tower or house instead. In the Cups activity, the nominal form of the numbers was the study focus. Research has shown that of the five enumeration principles, the cardinal principle is the most challenging to learn (Gelman and Gallistel 1986), and very few of the number words referred to cardinality in both activities. By offering information in written form, the enactment of the activity and the teachers' different understandings of its assumptions about children's learning resulted in two diverse opportunities for the children's learning.

The second objective was to uncover in what way the differences between the Cups and Boxes activities affected the children's learning opportunities, depending on the combination of different designs and the students' prior knowledge. One important finding is how difficult it is to transfer knowledge of robust teaching methods by modeling best practices or powerful lesson designs. In this study, the same activity was inspired by the PBL activities that the teachers studied; however, the activity was experienced very differently within the perspective of the children's learning opportunities. The Boxes activity was more complex and required the children to have more prior knowledge, while the Cups activity focused on the relationship between the written symbols and spoken forms of numbers. The results from the second question show how these differences contributed to a variety of learning opportunities for the children (i.e., the activities were adjusted for different kinds of learning). However, it is unclear if this result was based on the knowledge of the students' learning or personal choices for enactment based on the teachers' opinions. We used variation theory to analyse the results (Marton 2015); thus, the dimensions of variation used were described. The Boxes

Discussion

The aim of this study was to analyse how preschool teachers differently enacted the same mathematical activity for preschool children to learn to discern numbers, and in what way this affected the children's learning opportunities during the activity. The results underline the importance for preschool teachers to have sound didactical knowledge: they have to make the right choices for learning activities for preschool children. In this study, the activities were initially teacher-directed play, based on the same instruction of the treasure game. However, the direction of the activity did undergo a slight change during the study. Apart from observing this change in the direction, the present investigation makes a contribution about how different aspects of teaching content are made discernible and how this affects children's learning opportunities depending on their prior knowledge.

The ways in which the teachers interpreted and designed the activity resulted in two different versions of the play-based activity about the treasure. The activity was intended to develop children's cardinal understanding. Cardinality has been found to be important for children's mathematical

activity used a greater variety of dimensions, e.g., the nominal, ordinal, and cardinal forms were used in both written/symbolic and verbal representations. These differences are important and both activities are powerful, depending on the children's prior knowledge. However, the Boxes activity was more promising considering cardinality. Cardinality is considered the basis for counting, number operations, and solving complex mathematical tasks (Clements and Sarama 2014); therefore, this finding should be favourable for future mathematical learning. However, based on variation theory, if the children have not yet matched the verbal form of the number with the written form, the Cups activity is probably preferable for these children. Perhaps this aspect of the relational aspect between what knowledge the children have and how teachers can adjust the lesson design based on this knowledge is the most important factor when developing children's learning opportunities. Although this study cannot answer these questions, they would be an interesting focus for future studies.

This study not only focuses on the handling of the content but also the activities themselves; thus, two theoretical frameworks were used to define opportunities for children's PBL activities. Based on Chi's (2009) processes of activities, the analyses showed differences in the characteristics of the moments in the Boxes and Cups activities, where the interactive approach was more prominent in the Boxes activity. The Boxes activity was also found to be the most complex in its opportunities for patterns of variation, considering variation theory analysis (Marton 2015). Differences can also be found when analysing who and what the participants were speaking about and which participants spoke about what and when. In the more complex design of the Boxes activity, the children were the main speakers, and following the guidance of the teacher who opened up challenging dimensions of variation regarding aspects to focus on, the children had the opportunity to express and develop knowledge in new ways. This finding is in line with Bermejo et al. (2004), who used contradictions and cognitive conflicts to enhance the children's learning opportunities.

Another important variable can be found in whether the activity was child centred or teacher directed: the Boxes activity was much more child directed than the Cups one. This finding supports the results of Lerkkanen et al. (2016) about child-centred activities being more powerful for children's learning than teacher-directed ones. An argument against this is that a child-centred activity might not challenge children's knowledge, and a teacher-directed activity can be strongly based on the children's perspectives. Accordingly, variation theory contributes by defining the aspects offered to children during activities and how affordances meet the children's needs. The Boxes activity required more prior knowledge on the part of the children than did the Cups activity. This makes it difficult to determine whether

child-centred or teacher-directed activities account for the differences found.

Equinumerosity (Sarnecka and Wright 2013) could be experienced in the Boxes activity: the teacher frequently showed the amount with her fingers when someone said a number; in written form on the boxes, the number was also represented by dots. The 'finding-the-middle' activity also showed another opportunity for equinumerosity development in the children's knowledge. By using the boxes in another way, the represented number equality was shown by groups of items with the same amount when searching for the 'middle'. This activity seems to be a good example of an interactive activity where the children have the simultaneous opportunity to understand equinumerosity and cardinality (Sarnecka and Wright 2013).

Conclusions

The study results show how the same preschool mathematics learning activity is interpreted and enacted differently by preschool teachers. First of all, the differences gave the children different opportunities to discern that numbers have different forms; in particular, the cardinal form was implicitly enacted in the Cups activity. In the Boxes activity, more aspects were discernible and the activities also had another characteristic: the interactive approach. The children's verbal expressions were more prominent in this activity. The children used number words with a cardinal meaning more often than the teacher did in the Boxes activity; however, this teacher continuously provided the opportunity to discern cardinality in written forms during the activity. In the Boxes activity, both teachers and children also used numbers with an understanding of equinumerosity more frequently. Thus, teachers who provide the opportunity for children to experience more complex and contradictory activities based on their prior knowledge enhance the children's learning opportunities.

Limitations

The children's learning was not measured in this study, which is a limitation because we cannot say anything about whether the offered learning situations actually did result in knowledge development.

Acknowledgements We thank Peter Fogarty, MA English 1st Class, from Edanz Group (<https://en-author-services.edanzgroup.com/>), for editing a draft of this manuscript. We are also grateful for the very valuable comments from the reviewers of the manuscript; they made a significant change to the quality of the paper compared with previous versions.

Funding Open access funding provided by Malmö University.

Compliance with Ethical Standards

Conflict of Interest The authors declare that they have no conflict of interest.

Open Access This article is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License, which permits use, sharing, adaptation, distribution and reproduction in any medium or format, as long as you give appropriate credit to the original author(s) and the source, provide a link to the Creative Commons licence, and indicate if changes were made. The images or other third party material in this article are included in the article's Creative Commons licence, unless indicated otherwise in a credit line to the material. If material is not included in the article's Creative Commons licence and your intended use is not permitted by statutory regulation or exceeds the permitted use, you will need to obtain permission directly from the copyright holder. To view a copy of this licence, visit <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>.

References

- Baroody, A. J. (1987). *Children's mathematical thinking*. New York: Teachers College.
- Bermejo, V., Morales, S., & Deosuna, J. G. (2004). Supporting children's development of cardinality understanding. *Learning and Instruction*, 14(4), 381–398.
- Björklund, C., & Barendregt, W. (2016). Teachers' pedagogical mathematical awareness in Swedish early childhood education. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 60(3), 359–377.
- Breive, S., Carlsen, M., Erfjord, I., & Hundeland, P. S. (2018). Designing playful inquiry-based mathematical learning activities for kindergartens. In C. Benz, A. Steinweg, H. Gasteiger, P. Schöner, H. Vollmuth, & J. Zöllner (Eds.), *Mathematics education in the early years*. Cham, Switzerland: Springer.
- Brownell, W. A. (1947). The place of meaning in the teaching of arithmetic. *Elementary School Journal*, 47, 256–265.
- Carpenter, T., & Moser, M. (1982). The development of addition and subtraction problem-solving skills. In T. Carpenter, J. Moser, & T. Ronberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Chi, M. T. H. (2009). Active-constructive-interactive: a conceptual framework for differentiating learning activities. *Psychology in Education*.
- Clements, D. H. (1999). Subitizing. What is it? Why teach it? *Teaching Children Mathematics*, 5(7), 400–405.
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2007). Effects of a preschool mathematics curriculum: summative research on the Building Blocks project. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38, 136–163. <https://doi.org/10.2307/30034954>.
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2014). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach* (2nd ed.). New York: Routledge.
- Cross, C. T., Woods, T. A., & Schweingruber, H. (2009). *Mathematics learning in early childhood: paths toward excellence and equity*. Washington, DC: National Academic Press.
- Davydov, V. V. (1982). Psychological characteristics of the formation of mathematical operations in children. In T. P. Carpenter, J. M. Moser, & T. A. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: cognitive perspective* (pp. 225–238). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Fuson, K. C., & Hall, J. W. (1983). The acquisition of early number word meanings: A conceptual analysis and review. In H. P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking* (pp. 49–107). New York: Academic Press.
- Fuson, K. C. (1988). *Children's counting and concept of number*. New York: Springer.
- Fuson, K. C. (1991). Children's early counting: Saying the number-word sequence, counting objects, and understanding cardinality. In K. Durkin & B. Shire (Eds.), *Language and mathematical education* (pp. 27–39). Milton Keynes, GB: Open University Press.
- Fuson, K. (1992). Relationships between counting and cardinality from age 2 to age 8. In J. Bideaud, C. Meljac, & J.-P. Fischer (Eds.), *Pathways to number: Children's developing numerical abilities* (pp. 127–150). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Gelman, R., & Gallistel, C. (1986). *The child's understanding of number*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Gelman, R., & Meck, B. (1992). Early principles aid initial but not later conceptions of number. In J. Bideaud, C. Meljac, & J.-P. Fischer (Eds.), *Pathways to number: Children's developing numerical abilities* (pp. 171–189). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Holmqvist, M. (2011). Teachers' learning in a learning study. *Instructional Science*, 39(4), 497–511.
- Holmqvist, M., Gustavsson, L., & Wernberg, A. (2014). Variation theory: an organizing principle to guide design research in education. In A. E. Kelly, R. Lesh, & J. Baek (Eds.), *Handbook of design research methods in education* (pp. 129–148). London: Routledge.
- Howden, H. (1989). Teaching number sense. *Arithmetic Teacher*, 36, 6–11.
- Kaufman, E. L., Lord, M. W., Reese, T. W., & Volkman, J. (1949). The discrimination of visual number. *American Journal of Psychology*, 62, 498–525. <https://doi.org/10.2307/1418556>.
- Kullberg, A., & Björklund, C. (2019). Preschoolers' different ways of structuring part-part-whole relations with finger patterns when solving an arithmetic task. *ZDM*, 1–12.
- Lerkkanen, M. K., Kiuru, N., Pakarinen, E., Poikkeus, A. M., Rasku-Puttonen, H., Siekkinen, M., et al. (2016). Child-centered versus teacher-directed teaching practices: associations with the development of academic skills in the first grade at school. *Early Childhood Research Quarterly*, 36, 145–156.
- Lesh, R. (1981). Applied mathematical problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 235–264.
- Marton, F. (2015). *Necessary conditions of learning*. New York: Routledge.
- McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, 12, 2–8.
- Olsson, I., & Forsbäck, M. (1998). Tankeutmaningar. *Nämnen*, 2, 16–19.
- Papadakis, S., Kalogiannakis, M., & Zarani, N. (2017). Improving mathematics teaching in kindergarten with realistic mathematical education. *Early Childhood Education Journal*, 45(3), 369–378.
- Pyle, A., & Bigelow, A. (2015). Play in kindergarten: an interview and observational study in three Canadian classrooms. *Early Childhood Education Journal*, 43(5), 385–393.
- Qi, C. H., Kaiser, A. P., & Milan, S. (2006). Children's behavior during teacher-directed and child-directed activities in Head Start. *Journal of Early Intervention*, 28(2), 97–110.
- Resnick, L. B. (1983). A developmental theory of number understanding. In H. P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking* (pp. 109–151). New York: Academic Press.
- Reys, B. J., & Reys, R. E. (1995). Perspektiv på Number sense och taluppfattning. *Nämnen*, 1, 28–33.
- Sarnecka, B. W., & Wright, C. E. (2013). The idea of an exact number: children's understanding of cardinality and equinumerosity. *Cognitive Science*, 37, 1493–1506.

- Swedish National Agency for Education. (2016). *Curriculum for the preschool, Lpfö98*. Stockholm: Fritzes.
- Swedish National Agency for Education. (2018). *Curriculum for the preschool, Lpfö18*. Stockholm: Fritzes.
- Swedish National Agency for Education. (2019). *Curriculum for the compulsory school, preschool class and school-age education, Lgr11*. Stockholm: Fritzes.
- Taylor, M. E., & Boyer, W. (2020). Play-based learning: evidence-based research to improve children's learning experiences in the kindergarten classroom. *Early Childhood Education Journal*, 48(2), 127–133.
- Wickstrom, H., Pyle, A., & DeLuca, C. (2019). Does theory translate into practice? An observational study of current mathematics pedagogies in play-based kindergarten. *Early Childhood Education Journal*, 47(3), 287–295.
- Wynn, K. (1989). Children's understanding of counting. Paper presented at the Biennial Meeting of the Society for Research in Child Development. Kansas City, April 1989.
- Wynn, K. (1992). Children's acquisition of the number words and the counting system. *Cognitive Psychology*, 24, 220–251.

Publisher's Note Springer Nature remains neutral with regard to jurisdictional claims in published maps and institutional affiliations.

Malmö Studies in Educational Sciences: Licentiate Dissertation Series

Licentiate Dissertations in Education

Editor: Lena Holmberg (until April 4, 2007)

Editor: Feiwel Kupferberg (from April 5, 2007)

Editor: Claes Nilholm (from January 1, 2014)

&

Licentiate Dissertations in the Theory and Practice of Teaching and Learning Swedish

Editor: Bengt Linnér (until June 30, 2008)

Editor: Johan Elmfeldt (from July 1, 2008)

Editor: Cecilia Olsson Jers (from June 1, 2011)

1. Öhman-Gullberg, Lisa: *Movere. Att sätta kunskap i rörelse.* 2006.
2. Lutz, Kristian: *Konstruktionen av det avvikande förskolebarnet.* 2006.
3. Horck, Jan: *A mixed crew complement.* 2006.
4. Economou, Catarina: *Gymnasieämnet Svenska som andraspråk – behövs det?* 2007.
5. Christensen, Jonas. *Företagsekonomi och ekonomiska studier i Litauen.*
Om ett universitetsämnets konstituering. 2007.
6. Schenker, Katarina. *Perspektiv på ökad tillgänglighet inom högre utbildning – med hjälp av digitala verktyg.* 2007.
7. Holmgren, Barbro. *Svensklärares arbete. Om villkor för gymnasieskolans svenskaämne.* 2008.
8. Hansson, Fredrik: *Tala om text. Om gymnasieelevers metaspråk i gruppssamtal.* 2008.
9. Amhag, Lisbeth. *Potentialen och rösterna i nätbaserade dialoger. Dialogiska och medierande redskap för lärande.* 2009.
10. Jonasson, Kalle. *Klungan och barndomens sociala rum – Socialt gränsarbete och figurationer i rastfotbollen.* 2010.
11. Welwert, Gunnilla. *"Bilden påminner mig om mig själv". En studie om ungdomar och deras bilder i två olika miljöer.* 2010.
12. Dahl, Christoffer. *Ett annorlunda brus. Ett läromedels litteraturförmedling i spänningsfältet mellan tradition och förnyelse.* 2010.
13. Lundström, Mats. *Vetenskap eller pseudovetenskap? En studie om elevers uppfattningar om naturvetenskap, pseudovetenskap och tillförlitlighet.* 2010.
14. Lansheim, Birgitta. *Förstälser av uppdraget specialpedagog. Blivande och nyblivna specialpedagogers yrkeslivsberättelser.* 2010.
15. Kouns, Maria. *Inga IG i Kemi A! En språkdidaktisk studie av en kemilärares undervisningsstrategier i en gymnasieklass med elever med svenska som andra språk.* 2010.
16. Skans, Anders. *En flerspråkig förskolas didaktik i praktiken.* 2011.

17. Lelinge, Balli. *Klassråd – ett socialt rum för demokrati och utbildning.*
Om skola och barndom i förändring. 2011.
18. Bringéus, Eva. *När känslorna får styra. Om litteraturläsning i en mångkulturell gymnasieklass.* 2011.
19. Källström, Lisa. *Berättelser om en röd stuga. Föreställningar om en idyll ur ett svenskdidaktiskt perspektiv.* 2011.
20. Magnusson, Petra. *Läsning i ny tid. Pappersburen skrift i ett multimodalt perspektiv.* 2011.
21. Westlund, Kristina. *Pedagogers arbete med förskolebarns inflytande.* 2011.
22. Thörnqvist, Petter. *Heder på schemat. En didaktisk studie av hederskultur i svensk ungdomslitteratur.* 2011.
23. Waltå Lilja, Katrin. *Läroböcker i svenska? En studie av ett läromedel för yrkesförberedande gymnasieprogram och dess modelläsare.* 2011.
24. Söderling, Maria. *Att sätta erfarenheter i rörelse. En undersökning av hur elever i år 7 läser film och hur svenskundervisningen kan förvalta deras filmläsning.* 2011.
25. Sjögren, Stella. *Att säga tulipanaros... Svensklärares arbete och lärarutbildningens relevans för arbetet som svensklärare sett ur ett professionsperspektiv.* 2012.
26. Thelander, Maria. *Om fostran i förskoleklass.* 2012.
27. Malmström, Martin. *Tillbaka till texten. Derivativt skrivande i en svensk gymnasieklass.* 2012.
28. Andersson, Helena. *En bro mellan högstadiet och gymnasieskolans nationella program. Elever med erfarenheter av det individuella programmet berättar.* 2013.
29. Delacour, Laurence. *Didaktiska kontrakt i förskolepraktik. Förskollärares transformering av matematiska mål i ett läroplansdidaktiskt perspektiv.* 2013.
30. Ljunggren, Åsa. *Erbjudanden till kommunikation i en flerspråkig förskola. Fria och riktade handlingsområden.* 2013.
31. Svensson, Petra. *Elever med utländsk bakgrund berättar. Möjligheter att lära matematik.* 2014.
32. Sjunnesson, Helena. *Bedömning av läsförståelse – och sen då? Pedagogers meningsskapande i en kommun-övergripande bedömningsprocess.* 2014.
33. Dahl, Jonas. *The problem-solving citizen.* 2014.
34. Lembrér, Dorota. *Towards an understanding of how the swedish preschool constructs mathematics. Children being and becoming mathematicians.* 2014.
35. Berkhuizen, Carina. *De yngsta barnens möjligheter till samspel på förskolegården.* 2014.
36. Wester, Richard. *Matematikundervisning utifrån ett elevperspektiv.* 2015.
37. Lindgren, Therese. *Bland dokumentationer, reflektioner och teoretiska visioner. Idéer och diskurser om hur barn skapar mening i förskolan.* 2015.

38. Öhrfelt Sjöstrand, Magdalena. Barn i natur och natur i barn. En diskursanalys av texter om utomhuspedagogik och uteförskola. 2015.
39. Sundman Marknäs, Anna. Betygssättning i grundskolans svenskaämne. 2015.
40. Sjöblom, Marie. Promoting student-to-student interactions in mathematics. A study in a multilingual upper secondary classroom. 2015.
41. Thorshag, Kristina. Barns teknikskapande - en studie av bygg- och konstruktionslek i förskolan. 2019.
42. Lindgren, Ann-Charlotte. Med uppdrag att dokumentera de yngsta barnens lärande. En verksamhetsteoretisk analys av förskolors dokumentation. 2020.
43. Adolfsson Narkaj, Paulina. Att balansera pedagogiska positioner i förskolans undervisning. En fallstudie om hur förskolepersonal hanterar pedagogiska dilemman. 2020.
44. Alkhede, Maria. Aritmetik i förskolan - en studie av taluppfattningens betydelse för matematikundervisningen. 2021.

ISBN 978-91-7877-184-4 (tryckt)

ISBN 978-91-7877-185-1 (pdf)

ISSN 1653-6037

**MALMÖ UNIVERSITY
205 06 MALMÖ, SWEDEN
WWW.MAU.SE**