Geometriska begrepp och metoder i historien

Exemplen area och klassiska konstruktioner

Maria Fahlgren och Mats Brunström

Department of Mathematics
and Computer Science

Working Papers in
Mathematics Education

Karlstad University | 2019:2

Geometriska begrepp och metoder i historien

Exemplen area och klassiska konstruktioner

Maria Fahlgren och Mats Brunström

Department of Mathematics and Computer Science

Working Papers in Mathematics Education | NR 2019:2

Geometriska begrepp och metoder i historien - Exemplen area och klassiska konstruktioner

Maria Fahlgren och Mats Brunström

Working Papers in Mathematics Education | 2019:2

urn:nbn:se:kau:diva-75897

ISBN 978-91-7867-085-7 (pdf)

© Författarna

Distribution:
Karlstad University
Department of Mathematics and Computer Science
651 88 Karlstad
054 700 10 00

Print: Universitetstryckeriet, Karlstad 2019

WWW.KAU.SE

INNEHÅLLSFÖRTECKNING

FÖRORD 3

1. AREABEGREPPET – EN HISTORISK TILLBAKABLICK 5

1.1 TIDEN CA 2000 ÅR F.KR. 5
1.2 GREKERNA OCH AREAGEOMETRI 7
1.3 ARKIMEDES 8
1.4 EUROPA UNDER 1600-TALET 10
1.5 FORMALISERING AV AREABEGREPPET UNDER 1800-TALET 13
REFERENSER 16

2. KONSTRUKTIONER MED PASSARE OCH LINJAL 17

2.1 TVÅ GRUNDLÄGGANDE KONSTRUKTIONER FRÅN EUKLIDES´ ELEMENTA .. 17
2.2 VILKA TAL GÅR ATT KONSTRUERA? 20
2.3 KONSTRUKTION AV REGELBUNDNA MÅNGHÖRNINGAR 25
2.4 TRE KLASSISKA PROBLEM 27
2.5 DYNAMISKA GEOMETRIPROGRAM 31
REFERENSER 34

Förord

I samband med vår forskarutbildning deltog vi i doktorandkursen *Matematikkhistorie* vid Universitetet i Oslo. Som en del av examinationen ingick att fördjupa sig inom någon del av historiens matematik. Maria valde att skriva om areabegreppet och Mats om geometriska konstruktioner. Eftersom båda texterna handlar om geometrin i historien fann vi det naturligt att låta dem ingå i samma nummer av denna tidskrift. Efter en bearbetning av texterna, samt några tillägg, har vi därför gjort en sammanslagen text.

Läser man beskrivningen av ämnet Matematik i grundskolans kursplan och gymnasieskolans ämnesplan ser man att de börjar på exakt samma sätt:

> Matematiken har en flertusenårig historia med bidrag från många kulturer. Den utvecklas såväl ur praktiska behov som ur människans nyfikenhet och lust att utforska matematiken som sådan. (Skolverket, 2018, s. 54)

Vidare lyfts vikten av det historiska perspektivet fram i en utav de sju förmågorna, relevansförmågan, i gymnasieskolans ämnesplan och i grundskolans syftesformulering står att:

> Undervisningen ska ge eleverna förutsättningar att utveckla kunskaper om historiska sammanhang där viktiga begrepp och metoder i matematiken har utvecklats.” (s. 54).

Sammantaget finns alltså starkt stöd i dagens styrdokument för att relatera matematikundervisningen till matematikens historiska utveckling. I texten görs nedslag i historien som vi hoppas kan inspirera både verksamma lärare och lärarstudenter.

Karlstad december 2019
Mats Brunström och Maria Fahlgren

1. Areabegreppet – en historisk tillbakablick

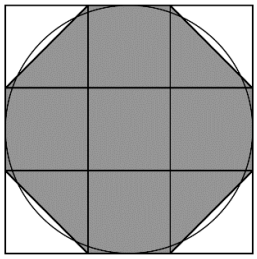
I jämförelse med storheten längd, så är storheten area mer komplicerad ur didaktisk synvinkel. Troligen har detta bland annat att göra med att det är svårare att mäta area än längd. För att mäta längd finns det ett antal olika mätredskap, som linjal, måttstock etc. Motsvarande redskap för att mäta area finns inte.

1.1 Tiden ca 2000 år f.Kr.

Man vet att egyptierna kunde beräkna areor av rektanglar, trianglar och parallelltrapetser. Behovet av att göra dessa beräkningar uppkom i praktiska sammanhang, till exempel i samband med att man ville mäta upp landområden. Bland annat uppstod behovet då Nilen årligen svämmade över. Givetvis hade man inte några formler för dessa beräkningar eftersom man saknade det symbolspråk som vi har tillgång till idag. Mycket av det vi idag känner till om egyptisk matematik från tiden kring pyramidernas uppkomst är hämtade från två kända papyrusrullar som bevarats; Rhindapapyrusen och Moskvapapyrusen. I Rhindapapyrusen finns exempel på praktiska problem och lösningar till dessa, presenterade i verbal form.

Egyptierna lyckades även ta fram en anmärkningsvärt god approximation av cirkelns area. Problem nr 50 i Rhindapyrusen behandlar problemet att bestämma arean av ett cirkulärt område med diametern 9. Problemet löses genom att först subtrahera 1/9 av diametern. Resten, dvs. 8/9 kvadreras därefter och man har ett mått på cirkelns area. Vid en jämförelse med formeln $A = \frac{\pi d^2}{4}$, där $\frac{\pi}{4}$ motsvarar $\frac{64}{81}$, erhålles ett närmevärde på π som är 256/81=3,16049… . Hur kunde egyptierna komma fram till detta? Problem nr 48 ger en ledtråd till hur det kan ha gått till. Där är en oktagon inskriven i en kvadrat med sidan 9. Om man inskriver en cirkel i samma kvadrat ser man att oktagonen och cirkeln har ungefär samma area, se Figur 1. Om vi kan bestämma oktagonens area har vi ett närmevärde på arean av cirkeln. Oktagonen består av 5 hela och 4 halva kvadrater, det vill säga 7 hela kvadrater. Eftersom den omskrivna kvadraten består av 9 mindre kvadrater, utgör oktagonen 7/9 av kvadratens yta. Med modernt symbolspråk

skulle vi uttrycka cirkelns area med formeln $A = \frac{7}{9} \cdot d^2$, där d är sidan på kvadraten (vilket är detsamma som cirkelns diameter). Man kan här tänka sig att egyptierna gjorde approximationen $\frac{7}{9} = \frac{63}{81} \approx \frac{64}{81} = \left(\frac{8}{9}\right)^2$, vilket ger att cirkelns area med ett modernt formelspråk skulle skrivas som $A = \left(\frac{8}{9} \cdot d\right)^2$.



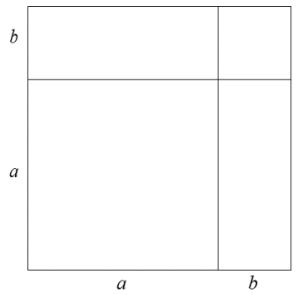
Figur 1. Cirkelns area är approximativt lika med oktagonens area.

Även babylonierna kände till hur man beräknar areor. De bestämde arean av områden som kvadrater, rektanglar och rätvinkliga trianglar. De hade också metoder för att få fram cirkelns area samt arean av cirkelsegment. Precis som hos egyptierna finns problemsamlingar med redovisade lösningar efterlämnade. Dessa är i form av lertavlor som bevarats. Problemen är, som hos egyptierna, tillämpade praktiska problem. De babyloniska skrivarna presenterade lösningar i form av ett slags ”formler”; listor med koefficienter/tal som motsvarar ett matematiskt förhållande hos olika geometriska figurer. Till exempel motsvarar det hexadecimala talet 0;26,15 (=7/16) en koefficient för area av en liksidig triangel. Detta innebär att arean av en liksidig triangel är 7/16 multiplicerat med triangelns sida i kvadrat. Detta värde kan jämföras med det exakta värdet $\sqrt{3}/4$ multiplicerat med triangelns sida i kvadrat. När babylonierna bestämde arean av en cirkel använde man sig utav koefficienten 0;50 (=1/12), vilket innebär att arean av en cirkel är 1/12 av dess omkrets i kvadrat. Om vi idag skulle uttrycka en cirkels area utgående från dess omkrets, skulle vi få dividera omkretsen i kvadrat med 4π (istället för 12). Babyloniernas approximation på konstanten π var dock inte så bra som egyptiernas. De använde talet 3 som förhållandet mellan omkretsen och diametern hos en cirkel.

1.2 Grekerna och areageometri

Elementa är det stora verk som förknippas med den grekiska matematiken ca 300 f.Kr. Det är Euklides som är upphovsmannen till detta mycket omfattande verk, bestående av 13 böcker. Det Euklides gjorde var att sammanställa den matematik som man kände till vid denna tidpunkt. Till skillnad från den babyloniska och egyptiska matematiken så innehåller Euklides *Elementa* så gott som inga numeriska värden. Till exempel tilldelades arean av en yta inte ett mått i form av något tal, utom i några få enkla sammanhang. Man bestämde alltså inte arean av ytor, däremot jämförde man förhållanden mellan areor hos olika geometriska figurer. Till exempel skriver Euklides i en sats att cirklars areor förhåller sig till varandra som diametrarnas kvadrater. Det är i bok I-VI, som det ges definitioner och grundläggande satser för att beskriva plangeometriska begrepp och magnituder. Med magnituder menas här storheter som längd, area, volym samt tid. I bok II beskrivs bland annat den areageometri som pythagoréerna sysselsatte sig med.

Idag används ofta några av de geometriska satserna i bok II som förklaring till aritmetiska räkneregler och algebraiska likheter. Särskilt inom algebran har dessa areamodeller visat sig värdefulla ur didaktisk synpunkt. Exempel på en sådan sats är II-4 som innebär att om en sträcka delas godtyckligt i två delar så är kvadraten på hela sträckan densamma som delarnas kvadrater tillsammans med två gånger den rektangel som bildas av delarna, se Figur 2.



Figur 2. Sats II-4 som illustration av första kvadreringsregeln.

Detta kan *illustrera* den första kvadreringsregeln som med modernt symbolspråk kan uttryckas som $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.

Bok II handlar mycket om problemet att konstruera en kvadrat med samma area som en given geometrisk figur. Jan Thompson (1996) gör i samband med detta en intressant koppling till den moderna måttenheten för area:

> Eftersom kvadraten i modern matematik utgör måttenheten för area (1 m^2 i SI-systemet), kan vi också säga att vi här möter ett försök hos grekerna att finna en lösning på problemet att bestämma en ytas mått i termer av en kvadrat som enhet. (s. 191)

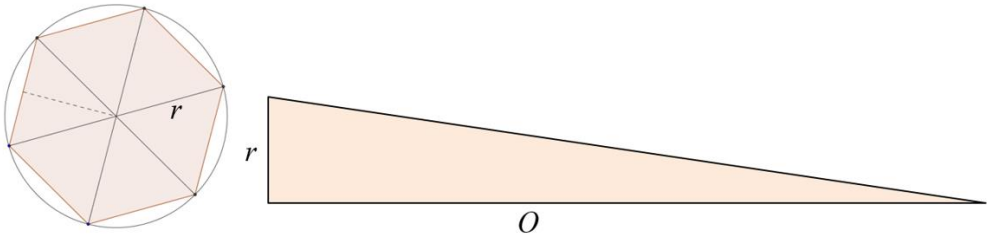
Här måste påminnas om att grekerna inte hade något areabegrepp i modern mening. I bok II beskrivs lösningen på kvadraturens problem för en godtycklig polygon. Att det även blev intressant att hitta lösningen till cirkelns kvadratur är inte konstigt. Någon lösning på detta fann man dock aldrig även om många försök gjordes (se vidare s. 31).

1.3 Arkimedes

Arkimedes levde på 200-talet f.Kr. Även Arkimedes bestämde arean av cirkeln. Enligt honom är arean hos en cirkel lika med arean av en rätvinklig triangel, där kateterna är lika med cirkelns radie respektive omkrets. Med modernt formelspråk kan detta uttryckas som: $A = \frac{r \cdot O}{2}$, där A är cirkelns area, r dess radie och O dess omkrets. Vi ser att detta innebär att $A = \frac{r \cdot O}{2} = \frac{r \cdot 2\pi r}{2} = \pi r^2$.

I beviset av denna sats, använder sig Arkimedes, precis som Euklides, av den så kallade exhaustionsprincipen, då han omskriver respektive inskriver cirkeln med polygoner. Beviset är ett motsägelsevis, där man antar att cirkelns area A inte är lika med den rätvinkliga triangelns area, T. Det finns då 2 möjligheter: Antingen gäller att (i) $A > T$ eller (ii) $A < T$. Låt oss titta på (i), dvs. vi antar att cirkelns area är större än triangelns area ($A > T$). Konstruera en regelbunden polygon (regelbunden n-hörning) inskriven i cirkeln (se Figur 3). Ju större värde man väljer på n, desto närmre blir polygonens area P cirkelns area A. Om $A > T$ bör man även kunna hitta ett värde på n så att $P > T$. Polygonen, som inskrivs i cirkeln, består av kongruenta likbenta trianglar vars sammanlagda area är lika med polygonens area, P. Eftersom polygonen är inskriven i cirkeln, kommer höjden hos varje likbent tri-

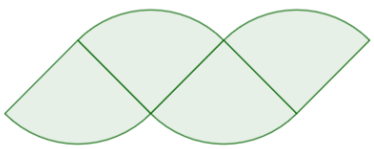
angel (som plygonen består av) att vara mindre än cirkeln radie. Dessutom kommer trianglarnas sammanlagda baser att vara mindre än cirkelns omkrets. Av detta får vi att arean av polygonen, *P*, måste vara mindre än den rätvinkliga triangelns area, *T,* alltså $P < T$. Detta leder till en motsägelse och alltså gäller inte (i) $A > T$. På liknande sätt kan visas att inte heller (ii) $A < T$ kan gälla och vi har då bevisat att $A = T$, dvs. att cirkelns area är densamma som arean av den rätvinkliga triangeln med cirkelns radie respektive omkrets som kateter.



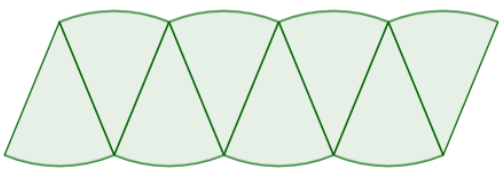
Figur 3. Regelbunden polygon inskriven i en cirkel med radien r samt den rätvinkliga triangeln där kateterna är cirkelns radie r respektive omkrets O.

Idén som Arkimedes använder sig utav när han approximerar ytor genom att låta dem inneslutas respektive omslutas av polygoner, vars areor han kan bestämma samt att han delar in områden i många, mycket små (infinitesimala) områden är banbrytande. Detta är de tankar som ligger till grund för den moderna infinitesimalkalkylen.

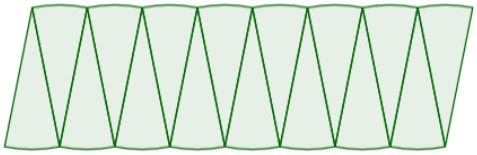
Vi kan använda oss av denna idé, att dela in cirkeln i likbenta, kongruenta trianglar, när vi visar arean av en cirkel för våra grundskoleelever. Man tänker sig då cirkeln hopsatt av många smala cirkelsektorer. Praktiskt kan man genomföra detta genom att klippa isär en cirkel, längs dess diameter, i allt mindre bitar. Ett alternativ är att undersöka med hjälp av dynamiskt matematikprogram (se Figur 4a-d).



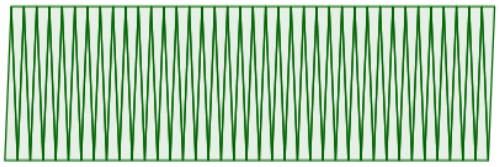
Figur 4a. Cirkel delad i 4 cirkelsegment.



Figur 4b. Cirkel delad i 8 cirkelsegment.



Figur 4c. Cirkel delad i 16 cirkelsegment.



Figur 4d. Cirkeln blir till formen allt mer lik en rektangel.

Om vi nu betraktar varje cirkelsektor, ser vi att desto smalare de blir, desto mer liknar de kongruenta likbenta trianglar. Om vi placerar dessa intill varandra som Figur 4 visar, ser vi att vi i stort sett erhåller en rektangel där ena sidan är lika med cirkelns radie och den andra sidan är lika med halva cirkelns omkrets. På detta vis kan vi få fram formeln för arean av en cirkel.

Arkimedes lyckades även beräkna areor av andra ytor som inte enbart begränsas av räta linjer. Till exempel visade han att arean av ett parabelsegment är lika med 4/3 gånger arean av den största triangel som kan inskrivas i parabelsegmentet.

Gemensamt för de grekiska matematikerna är att de endast är intresserade av att hitta metoder för att beräkna areor samt att bevisa dessa metoders giltighet. Man ger alltså ingen definition av areabegreppet utan nöjer sig med att beskriva metoder för att kunna utföra areaberäkningar.

1.4 Europa under 1600-talet

Det är under 1600-talet som den symboliska abstraktionen blir allt mer framträdande. Det är i och med denna som tal kan betecknas med symboler med vilka man kan utföra operationer. Det är bland annat François Viéte (1540-1603) som förknippas med den symboliska abstraktionens uppkomst. Det var Viéte som införde bokstavssymboler för variabla storheter vilket gjorde det möjligt att skriva algebraiska identiteter på en kortfattad form. Dock kan påpekas att Viéte även använde verbala beteckningar, till exempel skrev han inte a^2, utan ”a quatratus”. Härmed görs ett första steg mot användande av en modern formelnotaion.

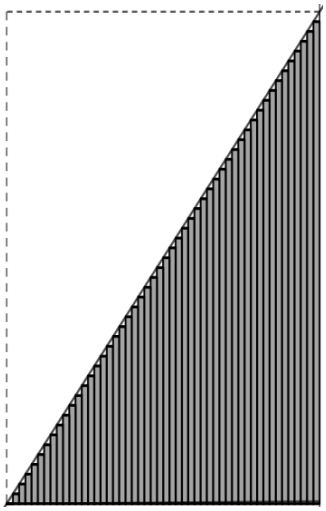
Behovet av att bestämma arean av ytor inneslutna av kurvor börjar komma allt mer. Det var många, under 1600-talet, som inspirerades av Arkimedes idéer. Dock var hans metod med exhaustionsprincipen inte längre tillräcklig. Man försöker nu att hitta andra metoder och kommer fram till så kallade indivisibler och infinitesimaler. Bland annat kan nämnas Galileo Galilei (1564-1642) och hans elev Bonaventura Cavalieri (1598- 1647). Metoden de använde brukar kallas ”method of indivisibles”. Denna metod bygger på idén att varje geometriskt objekt byggs upp av en mängd objekt av en lägre dimension. Enligt Cavalieri bestod linjer av ett obestämt antal punkter, ytor av ett obestämt antal parallella linjer och kroppar av ett obestämt antal av parallella plan. En plan figurs area motsvaras, enligt Cavalieri, av en samling parallella linjer, kallade ”all that lines” (Katz, 2004, s.288). Hans metod att bestämma arean av en figur gick ut på att jämföra den med en annan figur, med samma höjd, och en känd area. Om det finns en ett- till-ett-korrespondens mellan linjerna inneslutna av de två figurerna, så är deras areor lika stora. Detta är innebörden av vad som idag kallas Cavalieris princip.

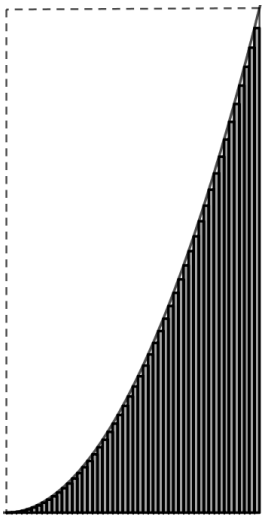
Detta kan användas i dagens undervisning om man till exempel vill illustrera formeln för arean av en parallellogram, givet att man känner till arean av en rektangel, se Figur 5. Praktiskt kan man visa detta med hjälp av stickor som förskjuts sidledes för att erhålla en rektangel respektive en parallellogram.

Figur 5. Med hjälp av Cavalieris princip är det lätt att troliggöra för elever att formeln för arean av en rektangel och en parallellogram är densamma, dvs. basen multiplicerat med höjden.

John Wallis (1616-1703) använde indivisibler på ett något annorlunda sätt än Cavalieri. För att se hur metoden fungerar börjar vi med att se hur triangelns area (se Figur 6a) kan fås med hjälp av rektangelns area.

Antag att det första linjesegmentet har längden 0, det andra har längden 1, o.s.v. till det sista linjesegmentet som har längden n. Wallis studerade nu förhållandet mellan summan av dessa linjesegment och rektangelns area, d.v.s. den summa man skulle få om alla linjesegment fick längden n: $\frac{0+1+2+\ldots+n}{n+n+n+\ldots+n} = \frac{1}{2}$. Triangelns area är alltså hälften av rektangelns area.





Figur 6a. Triangel indelad i linjesegment. *Figur 6b. Linjesegment under parabeln.*

Wallis kunde med sin metod exempelvis bestämma arean under kurvan $y = x^2$ mellan $x = 0$ och $x = a$ (se Figur 6b) genom att undersöka följande kvot $\frac{0^2+1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^2+n^2+n^2+\ldots+n^2}$.

Wallis insåg, genom att testa med olika värden på n, att kvoten närmar sig $\frac{1}{3}$ då n går mot oändligheten. Med modern notation kan detta samband härledas på följande vis:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{0^2+1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^2+n^2+n^2+\ldots+n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)/6}{(n+1)n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n}{6n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} + \frac{1}{6n} = \frac{1}{3}$$

Eftersom rektangelns area är $a \cdot a^2 = a^3$, är arean under kurvan $\frac{a^3}{3}$. Detta kan jämföras med $\int_0^a x^2 dx = \frac{a^3}{3}$. Wallis generaliserar sedan till andra heltal (än 2) och även bråk som exponent.

Samtidigt under denna tid använder Johannes Kepler (1571-1630) en metod som kom att kallas ”method of infinitesimals”. Kepler bestämmer arean av cirkeln på ett något annorlunda vis än vad Arkimedes gjorde även om idén med att dela en yta i allt mindre delar är densamma. Kepler bestämmer cirkelns area genom att tänka sig cirkeln indelad i oändligt många likbenta trianglar. Dessa trianglar har ett hörn gemensamt, cirkelns mittpunkt, och deras bas är en oändligt liten del av cirkelns omkrets. Kepler sträcker därefter ut omkretsen till en rät linje och placerar trianglarna intill varandra. Trianglarna har på detta visa lika höjd, vilket är cirkelns radie och summan av deras (lika stora) baser motsvarar cirkelns omkrets (se Figur 7). Alltså har cirkeln och triangeln samma area.

Figur 7. Illustration av Keplers ”method of infinitesimals”.

Med inspiration från de metoder som beskrivits ovan, kunde Gottfrid Wilhelm Lebniz (1646-1716) och Isaac Newton (1642-1727), oberoende av varandra, upptäcka sambandet mellan derivata och integral, dvs. infinitesimalkalkylens fundamentalsats.

1.5 Formalisering av areabegreppet under 1800-talet

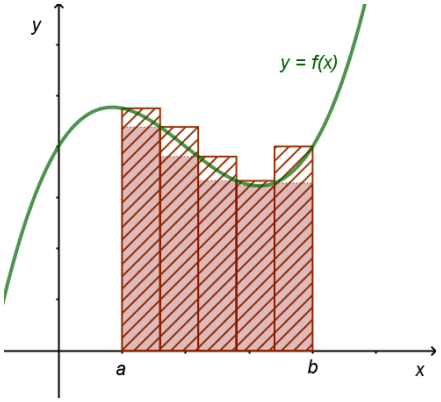
Det är först under 1800-talet som man inom matematiken definierar vad area är eftersom man då började bekymra sig över att de grundläggande begreppen inte var klart definierade. Inom matematiken måste man kunna ange egenskaperna hos ett begrepp som till exempel area. Vilka är då egenskaperna hos begreppet area? Det är egenskaper som man intuitivt kan förstå och de är följande:

1) Arean av ett plangeometriskt område är ett positivt reellt antal kvadratenheter.
2) Arean av en rektangel med basen b och höjden h är $A = b \cdot h$

3) Kongruenta plangeometriska områden har samma area.
4) Om ett område S innesluts av ett område R, så är arean av S mindre än arean av R.
5) Om ett område R består av (ändligt många) icke-överlappande områden, så är arean av R summan av areorna av dessa områden.

Dessa egenskaper är hämtade ur ett läromedel på grundläggande universitetsnivå (Adams, 1999) och är inte något som brukar presenteras i läroböcker på gymnasienivå. Däremot introduceras integralberäkningar (Riemannintegraler) i gymnasiets senare kurser.

Det är intressant att studera den så kallade bestämda integralen (Riemannintegralen efter tyske matematikern Bernhard Riemann, 1826-1866) lite närmare eftersom idén för denna är densamma som den Arkimedes använde redan under antiken. Som ett exempel på integralen kan vi studera hur man kan bestämma arean, A, av ett område som begränsas av grafen till funktionen $y = f(x)$, x-axeln samt linjerna $x = a$ och $x = b$, se Figur 8.



Figur 8. De streckade och skuggade rektangulära områdena bildar över- respektive undersummor.

Vi ser här att arean under funktionskurvan är mindre än det streckade områdets area, vilket vi kan räkna ut genom att summera alla de rektanglar som ligger *över* funktionskurvan. Vi ser också tydligt att arean under kurvan är större än det skuggade områdets area, vilket vi kan räkna ut genom att summera alla de rektanglar som ligger *under* funktionskurvan.

För att få en uppfattning av storleken på den sökta arean, A, kan vi bestämma de två summorna. Vi kan kalla summan av arean av de rektanglar som ligger över funktionskurvan för *översumma*, *T,* och summan av arean av rektanglarna under kurvan för *undersumma, U*. Vi vet då att den sökta arean måste vara större än *undersumman* och mindre än *översumman*. Detta skulle vi kunna skriva som $U \leq A \leq T$. För att kunna beräkna U och T måste vi ha ett uttryck för arean av varje rektangel. Låt $f(M_i)$ beteckna funktionens största värde i intervall i och Δx_i intervallets bredd. Rektangeln med basen Δx_i och höjden $f(M_i)$, har då en area $f(M_i)\Delta x_i$ som är större än eller lika med arean mellan funktionskurvan och x-axeln i samma intervall. Om vi nu summerar samtliga sådana rektangelareor får vi följande uttryck: $T = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\,\Delta x_i$. På motsvarande sätt bildar vi $U = \sum_{i=1}^{n} f(m_i)\Delta x_i$. Det sökta områdets area är nu inneslutet av över- respektive undersumman.

Detta är samma problem som Arkimedes hanterade då han bestämde arean av en cirkel (se tidigare beskrivning). Intuitivt är det lätt att förstå att ju fler delintervall vi har, desto mindre blir arean av området *mellan* över- och underrektanglarna. Vi kan även uttrycka det så att värdet på *översumman* minskar ju fler delintervall vi har samtidigt som värdet på *undersumman* ökar. Detta innebär att vi närmar oss värdet på den sökta arean då vi låter delintervallens längd bli allt kortare och kortare. Detta resonemang leder oss till följande definition av *integrerbarhet* och *integral*: En funktion f som är definierad och begränsad på ett intervall $[a, b]$ är *integrerbar* på $[a, b]$ om det för varje $\varepsilon > 0$ är möjligt att finna en översumma T och en undersumma U så att $T - U < \varepsilon$. Om en funktion f är integrerbar på intervallet $[a, b]$, så finns ett och endast ett tal I sådant att $U \leq I \leq T$ för varje indelning av $[a, b]$ i delintervall. Detta tal kallas *integralen* av f över $[a, b]$ och betecknas $\int_a^b f(x)dx$, vilket motsvarar det sökta områdets area, A.

Vi skall nu se hur den tyske matematikern Bernhard Riemann (1826-1866) teoretiskt hanterade det vi idag kallar *Riemannsummor*. Han

delade in ett intervall $[a, b]$ i n stycken delintervall $[\ x_{i-1}, x_i\ ]$, där $i = 1, 2, \ldots, n$. I varje delintervall tar vi en punkt, c_i, och bildar därefter summan $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1})$, vilken är en så kallad Riemannsumma. Om vi studerar gränsvärdet för denna summa då längden av det största delintervallet går mot noll erhålls $\int_a^b f(x)dx$, förutsatt att funktionen f är definierad och kontinuerlig på intervallet $[a, b]$.

Referenser

Adams, R. A. (1999). *A Complete Course Calculus 4 ed*. Canada: Addison Wesley Ltd.

Emanuelsson, G., Rosén, B., Ryding, R. & Wallby, K. (Red) (1997). *Algebra för alla*. Nämnaren TEMA. Göteborg: NCM.

Johansson, B. G. (2004). *Matematikens historia*. Lund: Studentlitteratur.

Katz, V. J. (2004). *A History of Mathematics*. Brief Edition. Boston: Pearson/Addison Wesley.

Thompson, J. (1996). *Matematiken i historien*. Lund: Studentlitteratur.

2. Konstruktioner med passare och linjal

I dagens svenska kursplaner i matematik, för både grundskolan och gymnasiet, lyfts både kreativitet och förmågan att föra matematiska resonemang fram på ett tydligt sätt. Under rubriken ”Ämnets syfte”, gällande gymnasiet, står det bland annat att: ”I undervisningen ska eleverna ges möjlighet att utmana, fördjupa och bredda sin kreativitet och sitt matematikkunnande.” Däremot står konstruktioner med passare och ograderad linjal inte explicit uttryckt någonstans, varken i grundskolans eller gymnasiets styrdokument (även om det i grundskolans kursplaner står att eleverna skall kunna konstruera geometriska objekt, såväl med som utan digitala verktyg). Därmed inte sagt att det inte är tillåtet att arbeta med dessa problem i skolan, det kanske till och med är lämpligt att göra det. En av förespråkarna är *Bengt Ulin*, som arbetat som matematiklärare vid Kristofferskolan och högskolelektor i Stockholm. Han skriver följande i inledningen till sin bok *Klassisk geometri – motiv och mening*:

> Vad som främst bör få en renässans är geometrisk konstruktion, gärna med de ”spelregler” som gäller för arbete med passare och linjal. Ett antal övningsuppgifter i denna bok ger tillfälle att uppleva hur arbetet med konstruktioner sporrar både fantasi och logiskt tänkande. (s. 7).

2.1 Två grundläggande konstruktioner från Euklides´ Elementa

Historiskt sett har konstruktionsproblem av olika slag varit populära inom geometrin. En vanlig restriktion, med antika rötter, är att endast passare och ograderad linjal (d.v.s. en linjal som endast används för att rita räta linjer) får användas. Grekerna själva tillät sig dock ibland att använda andra hjälpmedel för att göra olika konstruktioner (se t.ex. Figur 15 på sidan 30). Skälet till att man ofta önskade göra konstruktionerna med endast passare och ograderad linjal var att man då kunde återföra de olika konstruktionerna till postulat 1-3 i *Elementa*. Även innan *Elementa* skrevs såg de grekiska filosoferna räta linjen och cirkeln som de fullkomliga geometriska figurerna. Postulat 1-3 i *Elementa* lyder på följande sätt:

Postulat 1: Det är möjligt att dra en sträcka från en punkt till en annan.

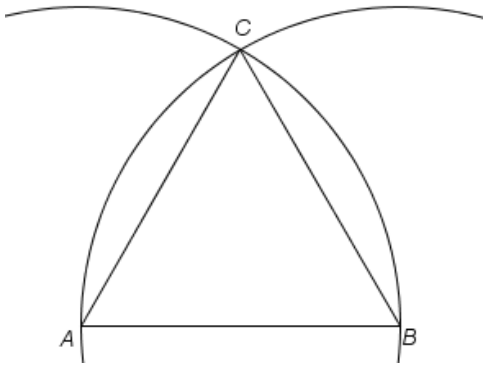
Postulat 2: En sträcka kan förlängas till en längre sträcka av godtycklig längd.

Postulat 3: Kring varje punkt kan beskrivas en cirkel med given radie.

Som exempel på konstruktioner med passare och ograderad linjal visas nedan två olika satser, i form av konstruktioner, ur *Elementa*.

Sats I-1: *Att på en given sträcka konstruera en liksidig triangel.*

Konstruktion (se Figur 9 nedan):
Låt *AB* vara den givna sträckan.
1. Konstruera en cirkel med medelpunkt i *A* och med radien *AB* (detta är möjligt enligt postulat 3)
2. Konstruera en cirkel med medelpunkt i *B* och med radien *AB* (postulat 3)
3. Cirklarna skär varandra i *C*. Förbind *C* med *A* respektive *B* (postulat 1)
Den nu erhållna triangeln *ABC* är liksidig.



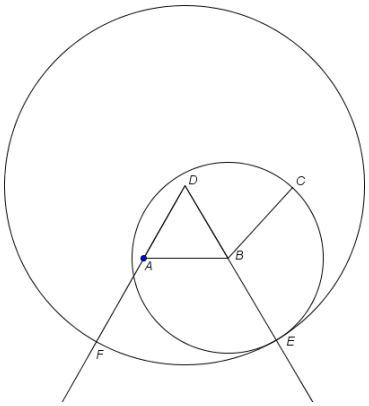
Figur 9. Konstruktion av liksidig triangel

Bevis:
AC är lika med *AB* (enligt definitionen av cirkel)
BC är lika med *AB* (enligt definitionen av cirkel)
Alltså är *AC* lika med *BC* (enligt grundsats 1 som säger att ”Ting, som är lika med ett och samma, också är lika med varandra”).
Alltså är triangeln *ABC* liksidig och beviset är genomfört.

Sats 2 handlar om att kunna flytta en given sträcka. Med dagens passare är detta inget problem eftersom det är lätt att behålla passarens inställning och flytta den och sätta spetsen på det ställe som sträckan ska utgå ifrån. *Euklides* ansåg inte att detta var tillåtet utan visade istället att det alltid går att göra konstruktionen även om passarens inställning inte finns kvar när man flyttar den.

Sats I-2: *Att från en given punkt konstruera en sträcka lika med en given sträcka.*

Konstruktion (se Figur 10 nedan):
Låt *A* vara den givna punkten och *BC* den givna sträckan.
1. Konstruera sträckan *AB* (postulat 1)
2. Konstruera den liksidiga triangeln *ABD* (detta är möjligt enligt sats 1)
3. Förläng *DA* förbi *A* och *DB* förbi *B* (postulat 2)
4. Konstruera en cirkel med medelpunkt i *B* och med radien *BC* (postulat 3). Låt *E* vara cirkelns skärningspunkt med förlängningen av *DB*.
5. Konstruera en cirkel med medelpunkt i *D* och med radien *DE* (postulat 3). Låt *F* vara cirkelns skärningspunkt med förlängningen av *DA*
6. Konstruera sträckan *AF*.
Vi har därmed konstruerat en sträcka *AF* som utgår från en given punkt *A* och är lika med en given sträcka *BC*.



Figur 10. Konstruktion av en sträcka från en given punkt lika med en given sträcka.

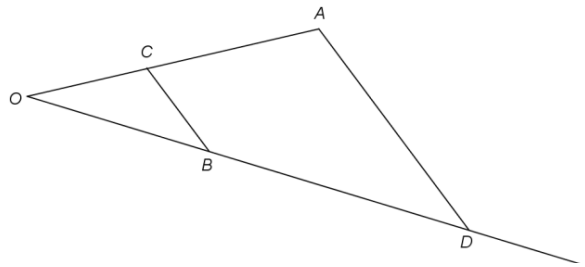
Bevis:
DF är lika med *DE* (enligt definitionen av cirkel)
Därmed är *AF* lika med *BE* (enligt grundsats 3 som säger att ”Om lika subtraheras från lika, är differenserna lika”)
BC är lika med *BE* (enligt definitionen av cirkel)
Alltså är *AF* lika med *BC* (enligt grundsats 1 som säger att ”Ting, som är lika med ett och samma, också är lika med varandra”) och beviset är genomfört.

2.2 Vilka tal går att konstruera?

En systematisk undersökning av vilka konstruktioner som är möjliga att göra underlättas väsentligt om man övergår till att studera konstruerbara tal. Ett tal x sägs vara konstruerbart om och endast om det är möjligt att konstruera en sträcka med längden $|x|$ utifrån en sträcka med längden 1. Vi börjar med att konstatera att det är förhållandevis enkelt att konstruera motsvarigheten till de fyra räknesätten, d.v.s om a och b är konstruerbara tal så är även $a+b$, $a-b$, $a \cdot b$ och a/b konstruerbara (om de är definierade). Nedan visas konstruktionerna av $a \cdot b$ och a/b.

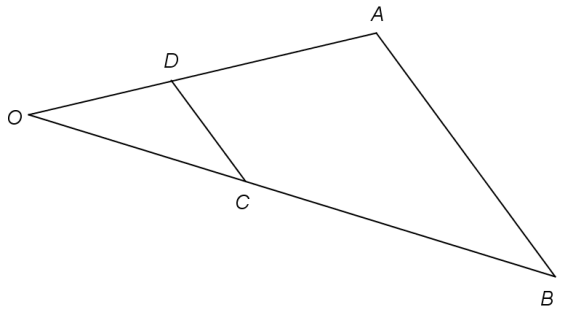
Konstruktion av $a \cdot b$ (se Figur 11 nedan)
1. Börja med att konstruera en sträcka *OA* med längden a
2. Avsätt sträckan *OC* med längden 1 på linjen *OA*
3. Rita en rät linje som utgår från *O* (som inte sammanfaller med *OA*)
4. Konstruera, på den nya linjen, sträckan *OB* med längden b
5. Sammanbind punkterna *C* och *B* med en rät linje
6. Drag en rät linje genom *A* parallell med *CB*[1] och kalla skärningspunkten mellan denna linje och linjen som går genom *O* och *B* för *D*
7. Sträckan *OD* har längden $a \cdot b$ eftersom $\frac{OD}{b} = \frac{a}{1}$ (trianglarna *OAD* och *OCB* är likformiga). Därmed har vi konstruerat $a \cdot b$.

[1] Möjligt enligt Elementa I-31.



Figur 11. Konstruktion av a·b.

Konstruktion av *a/b* (se Figur 12 nedan)
1. Börja med att konstruera en sträcka *OA* med längden *a*
2. Konstruera en sträcka *OB* med längden *B* (utgående från samma punkt *O* som *OA*, men med annan riktning)
3. Avsätt sträckan *OC* med längden 1 på linjen *OB*
4. Sammanbind punkterna *B* och *A* med en rät linje
6. Drag en rät linje genom *C* parallell med *BA* och kalla skärningspunkten mellan denna linje och *OA* för *D*
7. Sträckan *OD* har längden *a/b* eftersom $\frac{OD}{a} = \frac{1}{b}$ (trianglarna *OAB* och *ODC* är likformiga). Därmed har vi konstruerat *a/b*.



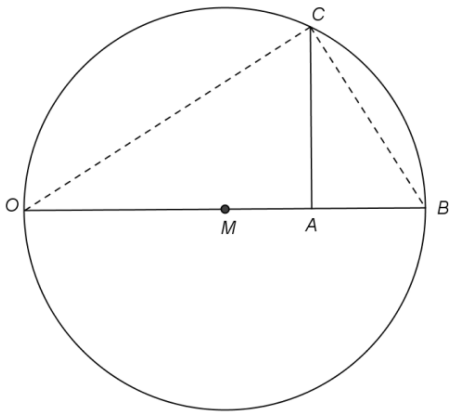
Figur 12. Konstruktion av a/b.

Med hjälp av konstruktionerna *a+b, a−b, a·b* och *a/b* kan samtliga rationella tal konstrueras. Frågan är nu om det är möjligt att konstruera ytterligare några tal. Konstruktionen nedan visar att det alltid är möjligt att konstruera kvadratroten ur ett konstruerbart tal *a*.

Konstruktion av $\sqrt{a}$ (se Figur 13 nedan)
1. Konstruera en sträcka *OA* med längden *a*
2. Konstruera en sträcka *AB* med längden 1 på *OA*:s förlängning

3. Konstruera mittpunkten *M* på sträckan *OB*
4. Konstruera en cirkel med medelpunkt *M* och radie *OM*
5. Konstruera en normal till *OB* i punkten *A*[2] och kalla normalens skärningspunkt med cirkeln för *C*
6. Sträckan *AC* har längden $\sqrt{a}$ eftersom $\frac{AC}{a} = \frac{1}{AC}$ (trianglarna *OAC* och *CAB* är likformiga eftersom triangeln *OCB* är rätvinklig)

Därmed har vi konstruerat $\sqrt{a}$.



Figur 13 Konstruktion av $\sqrt{a}$.

Eftersom vi kan konstruera $\sqrt{a}$ kan vi även konstruera alla tal $x + y\sqrt{a}$ där x, y och a är rationella tal. Vilken typ av tal får vi om vi nu adderar, subtraherar, multiplicerar eller dividerar två sådana tal $x_1 + y_1\sqrt{a_1}$ och $x_2 + y_2\sqrt{a_2}$? Det är enkelt att visa att dessa operationer egentligen inte ger någon ny typ av tal. Exempelvis blir kvoten mellan talen av typen $x_3 + y_3\sqrt{a_1} + y_4\sqrt{a_2} + y_5\sqrt{a_1 a_2}$, där x_3, y_3, y_4 och y_5 är rationella tal.

Eftersom vi alltid kan konstruera kvadratroten ur ett konstruerbart tal kan vi dock konstruera tal som innehåller upprepade roturdragningar. Ett exempel på ett relativt komplicerat tal som är konstruerbart är $\sqrt{6} + \sqrt{\sqrt{1+\sqrt{2}} + \sqrt{3}}$:

[2] Möjligt enligt Elementa I-11.

- Eftersom 2 är konstruerbart så är $\sqrt{2}$ konstruerbart
- Eftersom 1 och $\sqrt{2}$ är konstruerbara så är $1+\sqrt{2}$ konstruerbart
- Eftersom $1+\sqrt{2}$ är konstruerbart så är $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ konstruerbart
- Eftersom 3 är konstruerbart så är $\sqrt{3}$ konstruerbart
- Eftersom $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ och $\sqrt{3}$ är konstruerbara så är $\sqrt{1+\sqrt{2}}+\sqrt{3}$ konstruerbart
- Eftersom $\sqrt{1+\sqrt{2}}+\sqrt{3}$ är konstruerbart så är $\sqrt{\sqrt{1+\sqrt{2}}+\sqrt{3}}$ konstruerbart
- Eftersom $\sqrt{2}$ och $\sqrt{3}$ är konstruerbara så är $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}$ konstruerbart
- Eftersom $\sqrt{\sqrt{1+\sqrt{2}}+\sqrt{3}}$ och $\sqrt{6}$ är konstruerbara så är $\sqrt{6}+\sqrt{\sqrt{1+\sqrt{2}}+\sqrt{3}}$ konstruerbart

Efter att ha konstruerat detta tal kan man börja fundera på om det överhuvudtaget finns tal som inte är konstruerbara. För att reda ut detta behöver vi se lite mer systematiskt på vilka konstruktioner som kan göras. Egentligen utgår alla konstruktioner från 5 grundkonstruktioner:

1. Sammanbind 2 punkter med en rät linje (linjal)
2. Ta fram skärningspunkten mellan två (icke parallella) räta linjer (linjal)
3. Konstruera en cirkel med given radie och given medelpunkt (passare)
4. Ta fram skärningspunkterna mellan två cirklar (passare)
5. Ta fram skärningspunkterna mellan en cirkel och en rät linje (passare och linjal)

Vi tänker oss nu att de fem grundkonstruktionerna utförs i ett vanligt tvådimensionellt koordinatsystem. När man gör grundkonstruktion 1 och sammanbinder 2 punkter med en rät linje fås koefficienterna i linjens ekvation som rationella funktioner av de båda punkternas koordinater. Om punkternas koordinater är (a_1, b_1) och (a_2, b_2) kan linjens ekvation skrivas $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, där $\alpha = (b_1 - b_2)$, $\beta = (a_2 - a_1)$ och $\gamma = (a_1 b_2 - a_2 b_1)$.

När man konstruerar en cirkel med given radie *r* och given medelpunkt *(a , b)* (konstruktion 3) blir cirkelns ekvation

$(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$.

Om man utvecklar kvadraterna får man

$x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2 = r^2$.

Vi förenklar uttrycket genom att sätta -2*a* = *A*, -2*b* = *B*

och $a^2+b^2-r^2 = C$.

Detta ger ekvationen $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ där alltså koefficienterna *A, B* och *C* fås som rationella funktioner av radien *r* och medelpunktens koordinater *a* och *b*.

Det är i samband med grundkonstruktion 2, 4 och 5 som vi får nya punkter. Det är dock lätt att visa att koordinaterna för skärningspunkten mellan två räta linjer (grundkonstruktion 2) är rationella funktioner av de båda linjernas koefficienter. Om linjernas ekvationer är $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ och $\alpha' x+\beta' y+\gamma' = 0$ så blir skärningspunktens koordinater $x = \frac{\beta\gamma' - \beta'\gamma}{\beta'\alpha - \beta\alpha'}$ och $y = \frac{\alpha'\gamma - \alpha\gamma'}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}$. Detta innebär att vi inte kan få någon ny typ av tal på detta sätt.

Om man istället härleder koordinaterna för skärningspunkterna mellan en rät linje och en cirkel eller mellan två cirklar ser man att dessa kan uttryckas med hjälp av rationella funktioner av de i ekvationerna ingående koefficienterna och kvadratrötter av sådana rationella funktioner. Detta hänger samman med att man får fram skärningspunkterna genom att lösa andragradsekvationer. Vi nöjer oss med att se lite översiktligt på fallet med en linje $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ och en cirkel $x^2+y^2+Ax+By+C=0$.

Vi börjar med att lösa ut *y* ur linjens ekvation vilket ger $y = \frac{-\gamma-\alpha x}{\beta}$

Ersätter vi *y* i cirkelns ekvation med detta uttryck får vi en andragradsekvation med *x* som enda obekant, där koefficienterna är rationella funktioner av linjens och cirkelns koefficienter. Med hjälp av formeln

för andragradsekvationer får vi som vanligt lösningar av typen $x = m \pm \sqrt{k}$ och i detta fall är *m* och *k* rationella funktioner av de koefficienter som ingår i linjens och cirkelns ekvationer[3]. Med hjälp av sambandet $y = \frac{-\gamma - \alpha x}{\beta}$ är det sedan lätt att inse att även skärningspunkternas *y*-koordinater kan uttryckas i form av rationella funktioner av de i ekvationerna ingående koefficienterna och kvadratrötter av sådana rationella funktioner.

Vi har diskuterat oss fram till följande när det gäller vilka tal som kan konstrueras med hjälp av passare och ograderad linjal:

Alla rationella tal, d.v.s. tal i mängden *Q*, kan konstrueras
Alla tal i mängden $F_1 = \left\{ x_1 + y_1 \sqrt{a_1} \mid x_1, y_1, a_1 \in Q \right\}$ kan konstrueras
Alla tal i mängden $F_2 = \left\{ x_2 + y_2 \sqrt{a_2} \mid x_2, y_2, a_2 \in F_1 \right\}$ kan konstrueras
Alla tal i mängden $F_3 = \left\{ x_3 + y_3 \sqrt{a_3} \mid x_3, y_3, a_3 \in F_2 \right\}$ kan konstrueras
O.S.V.

Dessutom är det så att inga andra tal kan konstrueras med hjälp av passare och ograderad linjal. Ett exempel på ett tal som inte kan konstrueras är $\sqrt[3]{2}$. En viktig sats som här återges utan bevis och som vi ska återkomma till är följande:

SATS 1 *Om en tredjegradsekvation med rationella koefficienter saknar rationella rötter så kan ingen av dess rötter konstrueras.*

2.3 Konstruktion av regelbundna månghörningar

Vi har redan sett hur man med passare och ograderad linjal kan konstruera en liksidig triangel (Sats I-1 i *Elementa*). *Euklides* visar även i *Elementa* hur man kan konstruera en kvadrat samt hur man inskriver

[3] Två skärningspunkter om k>0, en punkt där linjen tangerar cirkeln om k=0 och ingen punkt där linjen skär eller tangerar cirkeln om k<0.

en kvadrat och regelbundna fem-, sex- och femtonhörningar i en cirkel. Eftersom det är enkelt att konstruera bisektrisen till en vinkel kan man t.ex. konstruera en regelbunden tolvhörning utgående från en regelbunden sexhörning. På motsvarande sätt kan väldigt många regelbundna månghörningar konstrueras och det var redan under antiken känt hur man konstruerar regelbundna *N*-hörningar för följande värden på *N*:

$N = 3 \cdot 2^k$ där k är ett naturligt tal (0, 1, 2, 3, ...)

$N = 4 \cdot 2^k$ där k är ett naturligt tal

$N = 5 \cdot 2^k$ där k är ett naturligt tal

$N = 15 \cdot 2^k$ där k är ett naturligt tal

Frågan om det finns ytterligare regelbundna månghörningar som kan konstrueras fick inte något svar förrän 1796. Det var *Carl Friedrich Gauss* som vid arton års ålder, genom att studera de komplexa rötterna till ekvationen $z^{17} = 1$, lyckades visa att det är möjligt att konstruera en regelbunden 17-hörning. *Gauss* lyckades även formulera exakt vilka regelbundna månghörningar som kan konstrueras. Han kom fram till att en regelbunden *N*-hörning kan konstrueras med hjälp av passare och ograderad linjal om och endast om $N = 2^k \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots$ där k är ett naturligt tal och $p_1, p_2, p_3, \ldots$ är olika fermatska primtal, d.v.s. primtal som kan skrivas på formen $p = 2^{2^n} + 1$, där n är ett naturligt tal. (Man kan i formeln för N välja att inte ha med något av de fermatska primtalen om $k \geq 2$). Sätter vi $n = 3$ i formeln för p får vi det fermatska primtalet 257. Detta betyder att det är möjligt (även om det är svårt) att konstruera en regelbunden 257-hörning med hjälp av passare och ograderad linjal. Däremot går det t.ex. inte att få $N = 7$, vilket betyder att det är omöjligt att konstruera en regelbunden 7-hörning med passare och ograderad linjal.

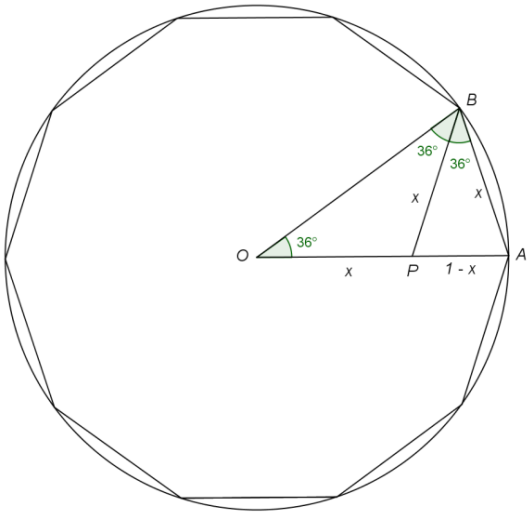
I Figur 14 nedan är en regelbunden 10-hörning inskriven i en cirkel. Genom att studera denna figur kan man se att det är möjligt att konstruera en regelbunden 10-hörning. Vi utgår från att cirkeln har radien 1 och centrum i *O*. Vi betecknar två hörn som ligger intill varandra med

A respektive *B* och studerar den likbenta triangeln *OAB*. Medelpunktsvinkeln *AOB* måste då vara 360°/10 = 36° och de båda andra vinklarna måste vara (180° – 36°)/2 = 72°. I figuren är bisektrisen till vinkeln *OBA* dragen och dess skärningspunkt med *OA* betecknas med *P*. Eftersom triangeln *OPB* har två vinklar som är lika (36°) måste även denna triangel vara likbent. Vidare är triangeln *PBA* likbent eftersom vinkeln *APB* är 180° – 72°– 36° = 72°. Om vi inför beteckningen x för *AB* blir även $PB = x$ och $OP = x$. Vidare måste $PA = 1 - x$. Trianglarna *AOB* och *PBA* är likformiga vilket ger att:

$$\frac{x}{1}=\frac{1-x}{x} \Leftrightarrow x^2=1-x \Leftrightarrow x^2+x-1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+1} \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{5}{4}}$$

Eftersom endast den positiva roten är intressant får vi $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Vi har tidigare sett att detta tal är möjligt att konstruera och därmed vet vi att det är möjligt att konstruera en regelbunden 10-hörning.



Figur 14. Regelbunden 10-hörning.

2.4 Tre klassiska problem

Det finns tre klassiska konstruktionsproblem som många matematiker har försökt lösa, men där ingen har lyckats. De tre problemen är:

- **Kubens fördubbling:** Här gäller det att konstruera en kub som har dubbelt så stor volym som en given kub.
- **Vinkelns tredelning:** Här gäller det att dela en given vinkel i tre lika stora delar.

- **Cirkelns kvadratur:** Här gäller det att konstruera en kvadrat vars area är lika stor som en given cirkels area.

Att ingen lyckades lösa problemen är inte så konstigt eftersom problemen är olösbara. Det dröjde dock ända till 1800-talet innan man med hjälp av modern algebra lyckades bevisa att problemen är olösbara.

Vi börjar med *kubens fördubbling*: Om vi antar att den givna kuben har sidan a (och därmed volymen a^3) gäller det alltså att konstruera en kub med volymen $2a^3$. Det gäller därför att konstruera sidan $\sqrt[3]{2}a$. I kapitel 2.2 nämndes att talet $\sqrt[3]{2}$ inte kan konstrueras med hjälp av passare och ograderad linjal. Detta innebär även att det är omöjligt att konstruera kubens fördubbling.

Vi ska nu se hur vi kan använda sats 1 på sidan 25 tillsammans med sats 2 (nedan) för att inse att även det andra klassiska konstruktionsproblemet, vinkelns tredelning, är omöjligt att lösa. Sats 2 brukar ingå som en viktig sats i inledande universitetskurser i algebra. Vi hoppar över beviset, trots att det är förhållandevis enkelt.

SATS 2 *Antag att polynomet* $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$ *har heltalskoefficienter.*

Om polynomet har ett rationellt nollställe $\frac{p}{q}$ *där p och q är två heltal som är relativt prima så måste p vara en delare till* a_0 *och q vara en delare till* a_n

Om vi först återgår till problemet med kubens fördubbling och sätter den givna kubens sida till 1 och den sökta kubens sida till x får vi följande ekvation: $x^3 = 2$ eller $x^3 - 2 = 0$.
Med hjälp av sats 2 får vi att de enda tänkbara rationella rötterna är 1, 2, -1 och -2. Eftersom ingen av dessa tal är rötter till ekvationen saknar den rationella rötter. Med hjälp av sats 1 kan vi nu dra slutsatsen att ingen av ekvationens rötter kan konstrueras och därmed är konstruktionen av kubens fördubbling omöjlig.

Vi övergår nu till *vinkelns tredelning*: Även här ska vi se att konstruktionen är omöjlig genom att studera motsvarande ekvation. För att kunna göra detta behöver vi den trigonometriska formeln $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$. Om den givna vinkeln är v blir den sökta vinkeln $v/3$ och formeln ovan ger $\cos v = 4\cos^3\left(\frac{v}{3}\right) - 3\cos\left(\frac{v}{3}\right)$.

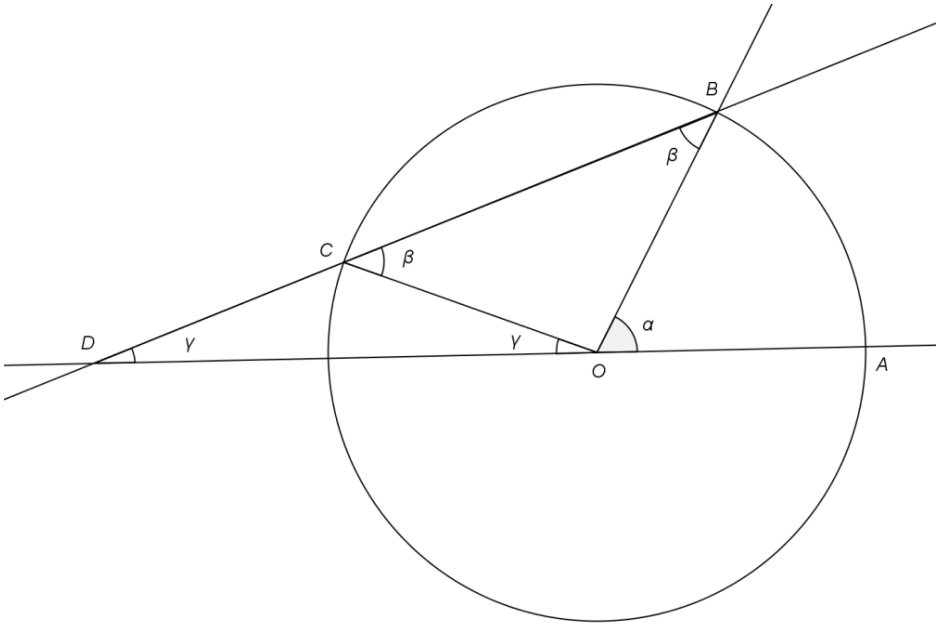
En vinkel är konstruerbar om och endast om cosinus för vinkeln är en konstruerbar sträcka. Eftersom vinkeln v är given kan vi konstruera cos v. Frågan är nu om vi kan konstruera cos $(v/3)$. Om vi sätter $\cos(v/3) = x$ i ekvationen ovan får vi $4x^3 - 3x = \cos v$. Frågan är nu om denna tredjegradsekvation har rationella rötter eller ej. Om $v = 90^o$ blir ekvationen $4x^3 - 3x = 0$. Denna ekvation har tre rationella rötter $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ och $x_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ och vi kan få fram den önskade vinkeln, 30^o, genom att konstruera $x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Om vinkeln v istället är 60^o blir ekvationen $4x^3 - 3x = \frac{1}{2}$ eller $8x^3 - 6x - 1 = 0$. De enda tänkbara rationella rötterna till denna ekvation är enligt sats 2: 1, 1/2, 1/4, 1/8, -1, -1/2, -1/4 eller -1/8. Testning av dessa ”tänkbara rötter” visar att ingen av dem uppfyller ekvationen och därmed saknar ekvationen rationella rötter. Detta betyder enligt sats 1 att ingen av ekvationens rötter kan konstrueras och därmed är det omöjligt att tredela vinkeln 60^o. Nu vet vi att det finns minst en vinkel som inte kan tredelas och därmed vet vi också att det inte går att dela en godtycklig vinkel i tre lika stora delar.

Släpper man på kravet att man endast får använda passare och ograderad linjal finns det dock flera tänkbara konstruktioner. En av de mest kända presenteras nedan och har *Arkimedes* som upphovsman. Konstruktionen görs på följande sätt (se Figur 15 nedan):

1. Antag att α är den givna vinkeln.
2. Dra en cirkel med godtycklig radie och med vinkelspetsen *O* som medelpunkt.

3. Kalla vinkelbenens skärningspunkter med cirkeln för *A* respektive *B*.
4. Konstruera en linjal med två punkter *C* och *D* sådana att avståndet *CD* mellan punkterna är lika med cirkelns radie.
5. Placera linjalen så att *D* ligger på förlängningen av *AO*, *C* ligger på cirkeln och så att linjalen även går genom punkten *B*.
6. Sammanbind punkterna *O* och *C* med en rät linje.

Konstruktionen är klar eftersom vinkeln *DOC* = γ är en tredjedel av den givna vinkeln α.



Figur 15. Arkimedes´ tredelning av en vinkel.

Konstruktionen är naturligtvis otillåten om man endast tillåter passare och ograderad linjal, men det är lätt att se att den verkligen ger en tredelning av vinkeln:
OB är lika med *OC* vilket ger att vinklarna *OBC* och *OCB* är lika (β i figuren).
OC är lika med *CD* vilket ger att vinklarna *COD* och *CDO* är lika (γ i figuren).
Vinkeln *OCD* kan fås på två sätt, antingen som $180^o - 2\gamma$ eller som $180^o - \beta$.
Detta medför att $\beta = 2\gamma$.
Vinkeln *BOD* kan fås på två sätt, antingen som

$180^\circ - (\beta + \gamma)$ eller som $180^\circ - \alpha$.
Detta medför att $\alpha = \beta + \gamma$ och eftersom $\beta = 2\gamma$ så måste $\alpha = 3\gamma$.

Vi övergår till *cirkelns kvadratur*. Uppgiften är alltså att utifrån en given cirkel konstruera en kvadrat med samma area som cirkeln. Om cirkelns radie sätts till 1 motsvarar detta att konstruera en kvadrat med sidan x så att $x^2 = \pi$. Det tal man måste kunna konstruera är alltså $\sqrt{\pi}$. Här kan vi inte använda sats 1 och sats 2 för att visa att konstruktionen är omöjlig och därför är detta betydligt svårare att visa än kubens fördubbling och vinkelns tredelning. Det var den tyske matematikern *Ferdinand Lindemann* som 1882 visade att π är ett transcendent tal, vilket innebär att det inte är nollställe till något polynom med rationella koefficienter. Detta medför att även $\sqrt{\pi}$ är ett transcendent tal och därmed att konstruktionen är omöjlig.

2.5 Dynamiska geometriprogram

Idag finns många olika datorprogram med dynamisk geometri, t.ex. *Geometer´s Sketchpad*, *Cabri* och *GeoGebra*. Dessa ger en möjlighet att jobba med geometriska konstruktioner och undersöka olika konstruktioners giltighet på ett helt annat sätt än tidigare. Om man först gör de mest grundläggande konstruktionerna för hand med passare och ograderad linjal kan man sedan gå över till att använda programmets inbyggda funktioner för dessa konstruktioner. Man kan t.ex. låta programmet konstruera mittpunkten på en sträcka eller bisektrisen till en vinkel, när detta ingår i mer komplicerade konstruktioner. På detta sätt kan man komma till relativt komplicerade konstruktioner på förhållandevis kort tid. Ett exempel är att låta elever studera hur följande punkter till en triangel förhåller sig till varandra: höjdernas skärningspunkt H, medianernas skärningspunkt M och centrum för den omskrivna cirkeln Q. Det visar sig att punkterna alltid ligger längs en rät linje (Eulers linje) och att avståndet mellan H och M alltid är dubbelt så stort som avståndet mellan M och Q. Dessa samband kan elever själva upptäcka genom att göra de konstruktioner som krävs och sedan ändra triangeln genom att flytta olika hörn och se vilka generella samband det verkar finnas, d.v.s. samband som gäller för alla trianglar.

Eleverna kan experimentera, ställa hypoteser och testa sina hypoteser. Christer Bergsten skriver i artikeln *Euklides i nya kläder – om dynamiska geometriprogram*:

> Kanske kan dynamiska geometriprogram ge Euklides den moderna klädedräkt som kan förmå fånga ett intresse för geometri hos dagens skolelever, då programmens användning bygger på sådana naturliga mänskliga aktiviteter som att undersöka, upptäcka och söka efter en förklaring. (s. 9).

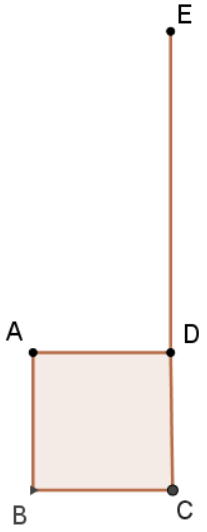
I samband med att vi båda läste en doktorandkurs i geometri, samtidigt som det fritt tillgängliga dynamiska matematikprogrammet *GeoGebra* fick allt större spridning, blev vi ännu mer övertygade om vilken tillgång denna typ av program kan vara i undervisningen. Ett flertal av de uppgifter som ingick i kursen byggde på konstruktioner som var möjliga att göra i *GeoGebra*. Dessa konstruktioner kunde sedan hjälpa till både när det gällde att förstå uppgiften och att hitta dess lösning. Dessutom kunde konstruktionerna ofta leda till nya spännande hypoteser som sedan kunde testas med programmet. Om hypoteserna verkade stämma mer generellt uppstod ett behov av att bevisa de samband som upptäckts. I artikeln som refererats ovan skriver Bergsten:

> Att arbete med DGS stöder behovet av och förståelsen för bevis inom geometrin framgår också av den forskning som gjorts, bland annat hur beviset fyller en funktion både som validering för individen av konstruktionen och som stöd för att övertyga en kamrat om att konstruktionen verkligen fungerar. (s. 7).

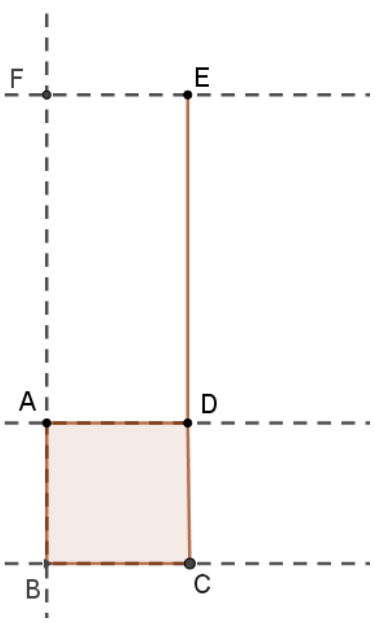
I artikeln *A Model for Task Design with Focus on Exploration, Explanation, and Generalization in a Dynamic Geometry Environment* (Fahlgren & Brunström, 2014), introducerar vi en modell för hur man kan utveckla traditionella bevisuppgifter till mer undersökande elevaktiviteter där beviset ingår som en naturlig del.

Vi avslutar med ett exempel från geometrikursen där dynamisk visualisering med *GeoGebra* utgjorde ett kraftfullt pedagogiskt verktyg. Exemplet är kopplat till Appolonius', en samtida grekisk matematiker med Arkimedes, systematiska och omfattande arbete med kägelsnitten (parabel, ellips och hyperbel). Bland annat upptäckte Appolonius sambanden mellan kägelsnitten och de klassiska grekiska areaapplikationerna (från *Elementa*). De tre areaapplikationerna har namnen parabo-

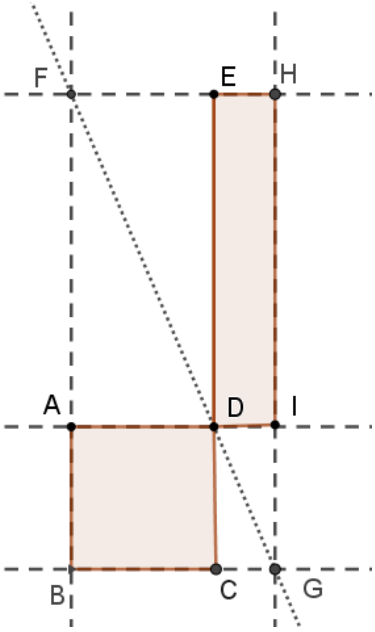
lisk, elliptisk samt hyperbolisk applikation, vilka gett upphov till kägelsnittens namn. Vi skall (med modern notation) illustrera hur den paraboliska applikationen kan kopplas till *parabeln*. Den paraboliska applikationen handlar om att utifrån en given kvadrat samt en given sträcka konstruera en rektangel med den givna sträckan som en sida och med samma area som den givna kvadraten. Figur 16a-c visar steg för steg hur konstruktionen går till.



Figur 16a. Given kvadrat ABCD och sträcka DE.



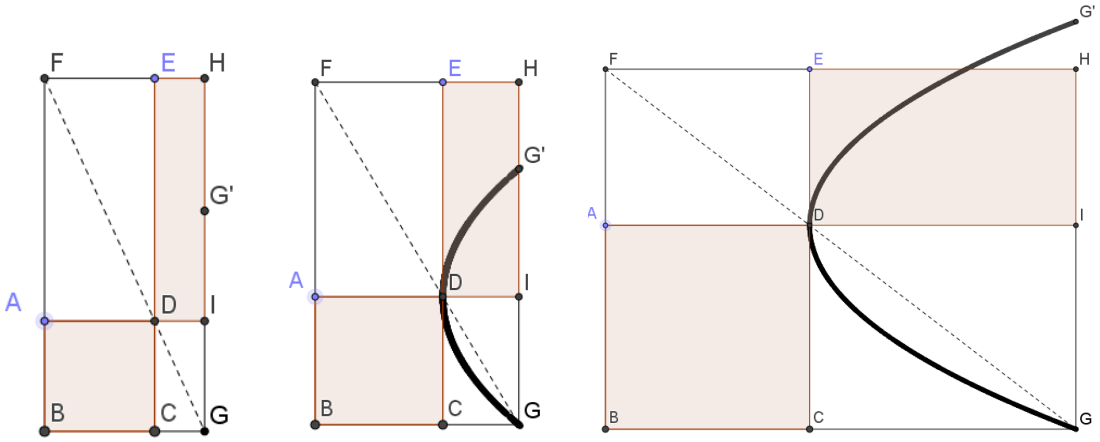
Figur 16b. Konstruktion av hjälplinjer.



Figur 16c. Slutligen konstrueras rektangeln DEHI.

Punkten *G* i konstruktionen i Figur 16c, är skärningspunkten mellan förlängningen av diagonalen *FD* och linjen genom punkterna *B* och *C*. Med hjälp av linjen genom punkten *G*, parallell med linjen genom punkterna *D* och *E*, bildas tre par av kongruenta trianglar, $FAD \cong DEF$, $DCG \cong GID$ och $FBG \cong GHF$. Av detta följer att de två skuggade områdena (kvadraten och rektangeln) måste ha samma area.

Vad har denna konstruktion med *parabeln* att göra? Med *GeoGebra* är det förhållandevis enkelt att upptäcka kopplingen till parabeln. Genom att spegla punkten *G* i punkten *I*, sätta spår på punkterna *G* och *G'* samt därefter dra i punkten *A* så att kvadratens storlek varierar erhålls en parabel (se Figur 17a-c).



Figur 17a-c. Illustration av kopplingen mellan den paraboliska applikationen och parabeln med hjälp av ett dynamiskt geometriprogram.

Referenser

Bergsten, C. (2006). *Euklides i nya kläder – om dynamiska geometriprogram*. SMS Medlemsutskick.

Courant, R. & Robbins, H. (1941). *What is Mathematics?: An Elementary Approach to Ideas and Methods*. London: Oxford University Press.

Fahlgren, M. & Brunström, M. (2014). A model for task design with focus on exploration, explanation, and generalization in a dynamic geometry environment. *Technology, Knowledge and Learning*, *19*(3), 287–315.

Johansson, B. G. (2004). *Matematikens historia*. Lund: Studentlitteratur

Roe, J. (2008). *Elementary Geometry*. Oxford: Oxford University Press.

Sjöberg, B. (2001). *Från Euklides till Hilbert. Historien om matematikens utveckling under tvåtusen år*. Åbo: Åbo Akademis tryckeri.

Tengstrand, A. (2005). *Åtta kapitel om geometri*. Lund: Studentlitteratur.

Thompson, J. (1991). *Historiens matematik*. Lund: Studentlitteratur

Ulin, B. (1998). *Klassisk geometri – motiv och mening*. Solna: Ekelunds Förlag.

Tidigare publicerade rapporter i serien

2018:1 Jorryt van Bommel, Yvonne Liljekvist & Christina Olin-Scheller. *Capturing, Managing and Analyzing Teachers' Informal Professional Development on Social Media*

2018:2 Arne Engström. *Semiotiska perspektiv i matematikdidaktik - En introduktion*

2019:1 Jorryt van Bommel, Yvonne Liljekvist. *Docentföreläsningar i Matematikens didaktik - Karlstads universitet 12 juni 2019*

Geometriska begrepp och metoder i historien

Exemplen area och klassiska konstruktioner

ISBN 978-91-7867-085-7 (pdf)

Working Papers in Mathematics Education

Karlstad University | 2019:2