Semiotiska perspektiv i matematikdidaktik

En introduktion

Arne Engström

Department of Mathematics
and Computer Science

Working Papers in
Mathematics Education

Karlstad University | 2018:2

Semiotiska perspektiv i matematikdidaktik

En introduktion

Arne Engström

Department of Mathematics and Computer Science

Working Papers in Mathematics Education | NR 2018:2

Semiotiska perspektiv i matematikdidaktik - En introduktion

Arne Engström

Working Papers in Mathematics Education | NR 2018:2

urn:nbn:se:kau:diva-69435

ISBN 978-91-7063-880-0 (pdf)

Distribution:
Karlstad University
Department of Mathematics and Computer Science
651 88 Karlstad
054 700 10 00

Print: Universitetstryckeriet, Karlstad 2018

WWW.KAU.SE

Innehåll

Förord

Föreliggande rapport är en omarbetning av min arbetsrapport *Semiotik och matematikdidaktik. En introduktion*, utgiven 2002 som Arbetsrapporter vid Pedagogiska institutionen, Örebro universitet.

Sedan texten ursprungligen publicerades har ett stort antal artiklar och antologier publicerats som behandlar semiotiska perspektiv inom matematikdidaktik. Jag har valt att fokusera på några grundläggande aspekter i ett semiotiskt perspektiv inom det matematikdidaktiska fältet. Jag har medvetet valt att begränsa antalet referenser, allt för att behålla karaktären av en lättillgänglig introduktion som kan inspirera till vidare läsning.

För kommentarer och synpunkter och som jag fått på revideringen av den ursprungliga texten vill jag framföra mitt varma tack.

Karlstad i oktober 2018

Arne Engström

1 Introduktion

Bilder, symboler, tecken och notationer (inom till exempel matematik, musik och dans) är uttryck som används av människor för kommunikation i olika sammanhang.

När vi kör bil uppmärksammar vi trafikskyltar och informationstavlor, tolkar dem och anpassar vårt beteende till övriga trafikanter.

En läkare undersöker en patient, vissa värden som uppmätts med de medicinska instrumenten tolkas av läkaren som tecken på en viss sjukdom.

En dirigent tolkar notskriften som kompositören har skrivit ned i partituret. Vid repetitionerna bestämmer dirigenten hur verket ska tolkas (frasering, tempo, dynamik etcetera). Dirigenten använder därvid ett speciellt rörelseschema för att kommunicera med orkestern. Genom notskriften kan en musiker spela ett musikstycke utan att tidigare har hört det.

En koreograf använder en särskild dansnotation för att beskriva dansens olika komponenter såsom rörelser, steg och positioner. Genom denna notation kan verket bevaras för framtiden.

Ett konstverk tolkas och analyseras av betraktaren genom de känslor, upplevelser och tankar som verket ger upphov till.

Genom punktskriften representeras de vanliga bokstäverna (eller koder av dem) genom ett reliefartat mönster på ett tjockt papper, vilket möjliggör för en blind person att tolka dem genom att beröra dem med fingertopparna.

Det finns naturligtvis många andra notationer, till exempel stenografi, schacknotation, kemiska formler med mera. Notationen relaterar till en bestämd kontext. Teckensystem är idag vanligtvis standardiserade med en specifik syntax och semantik.

Det finns även andra teckensystem såsom teckenspråk, militära tecken, artighetsformler och symboliska riter. Jag kommer i min framställning att avgränsa mig till vissa skriftliga tecken såsom bokstäver, siffror och olika specialtecken inom matematiken.

Alla dessa uttryck ska här benämnas som *tecken*. Semiotik betyder teckenlära, det vill säga berör frågor om hur man tolkar eller tilldelar tecken en mening eller innebörd. Det är lätt att förledas tro att tecken och symboler *har* en mening i sig, men så är det naturligtvis inte. Människor *tilldelar* tecken en innebörd i kommunikation med andra.

När ett barn lär sig förknippa ett speciellt tecken (en siffra) med ett visst tal och sedan lär sig att räkna med dessa tecken kan det ses som en *semiotisk aktivitet*. Tecknet tilldelas en viss mening i räkneaktiviteterna. Ett annat exempel är när barn räknar på fingrarna.

Barns förståelse av skrivna symboler ligger vanligtvis långt efter deras informella aritmetiska kunskap. De tolkar skrivna symboler i termer av vad de redan vet. En god undervisning, understryker Herbert Ginsburg (1977), försöker skapa ett samband mellan barns informella kunskap och det abstrakta och arbiträra teckensystemet.

1.1 Semiotik eller teckenlära

Semiotik betyder läran om tecken. Själva termen används på lite olika sätt. Den kan dels uppfattas som en metod, som ett sätt att närma sig ett undersökningsobjekt, dels som en särskild vetenskap. En företrädare för den senare uppfattningen är den i Lund verksamme professorn i semiotik Göran Sonesson (se Sonesson, 1987, 1989, 1992).

Sonesson utvidgar semiotiken till en betydelselära, som studerar hur mening uppstår generellt, hur tecken och betydelser fungerar i allmänhet och ser därmed semiotiken som en *nomotetisk* (lagsökande) vetenskap[1]. Den arbetar på human- och samhällsvetenskapernas traditionella områden och använder sig av olika metoder och bygger teoretiska modeller. Den är humanvetenskaplig, inte bara för att dess ämne är människor och det av människor producerade, utan för att den uppfattar de senare som kvalitet, snarare än som kvantiteter.

En annan introduktion till semiotiken är Jesper Hoffmeyers *Livstecken* (1997), där han utifrån biologens perspektiv utvecklar sin syn på tecknet som den grundläggande enheten för att förstå livet.

Semiotik har sina rötter i den medicinska symtomläran. Hos de antika filosoferna utgjorde den en del av filosofin. Numera framstår den alltmer som en egen disciplin. Det är framför allt två pionjärer, schweizaren Ferdinand de Saussure, grundare av den moderna strukturella lingvistiken, och den amerikanske filosofen och matematikern Charles S. Peirce, pragmatismens grundare, som kommit att stå för två huvudinriktningar inom semiotiken. De flesta framstående semiotiker, såsom Luis Hjelmslev, Charles Morris, Roman Jacobson, Roland Barthes, Julia Kristeva och Umberto Eco, kan hänföras till den ena eller andra riktningen, alternativt till ett försök att utforma en syntes dem emellan.

1.2 Växande forskningsfält

Ett växande och intressant forskningsfält utgörs av tvärsnittet mellan semiotik, matematik och didaktik. Teoretiskt hämtas idéerna från Ferdinand de Saussure och Charles S. Peirce.

Intresset för semiotiska perspektiv inom matematikdidaktisk teoribildning har vuxit kraftigt och i flera länder finns en livaktig forskning. Hittills har semiotiska perspektiv inom matematikdidaktiken huvudsakligen varit teoretiserande och förklarande. Matematikdidaktiska till-

---

[1] Traditionellt skiljer man mellan *nomotetiska* vetenskaper, till exempel naturvetenskaperna, som syftar till att etablera allmänna lagar och principer, och *ideografiska* vetenskaper, till exempel humanvetenskaperna, som syftar till att beskriva vissa unika företeelser.

lämpningar inom lärarutbildning eller undervisning är ännu så länge i sin linda.

Inom den stora fortbildningskampanjen *Matematiklyftet,* se Skolverkets lärportal, fick språkanvändningen i matematikundervisningen ett stort utrymme, men semiotiska perspektiv lyste märkligt nog med sin frånvaro. Den pågående utvecklingen av användningen av digitala verktyg i matematikundervisning kan ge semiotiska perspektiv ett stort tillämpningsområde. Forskningen om användning av digitala verktyg i matematikundervisningen handlar idag huvudsakligen om den digitala teknikens potential för att utveckla undervisningen.

Inom svensk matematikdidaktisk forskning är semiotiska perspektiv ännu tämligen outvecklade. Vid Stockholms universitet finns en forskningsgrupp inom utbildningsvetenskap som har ett multimodalt socialsemiotiskt perspektiv (se Selander & Kress, 2010; Leijon & Lindstrand, 2012). De tar sin teoretiska utgångspunkt i den brittiske lingvisten Michael Hallidays arbeten (se Halliday, 1978). Inom det matematikdidaktiska fältet finns denna riktning representerad av Lisa Björklund Boistrup (2010), som har studerat den diskursiva praktiken inom bedömning i matematik.

Vid Uppsala universitet finns en forskningsgrupp med likande utgångspunkt inom fysikens didaktik (se Eriksson, 2014; Fredlund, 2015).

1.3 Syfte

Syftet med den här rapporten är att introducera semiotiska perspektiv inom matematikdidaktiken. Jag anlägger ett utbildningsvetenskapligt perspektiv på semiotiken och framför allt dess konsekvenser för matematikdidaktik.

Som alla introduktioner görs här förenklingar av något som är betydligt mer komplext. Introduktionen ska stimulera till vidare läsning av texter producerade av forskare inom fältet.

1.4 Teckenmodeller

En av de tidigaste teckenmodellerna utgörs av Ferdinand de Saussures distinktion mellan uttryck och innehåll, mellan den abstrakta ljudbilden, betecknande (*signifiant*) och betecknat (*signifié*). I språket är uttrycket (en föreställning om) ett ljud, medan innehållet är ett begrepp, en idé eller (föreställningar om) personer, föremål och andra. Tecknet förhåller sig relativt godtyckligt, arbiträrt, till verkligheten. Tecknet uppstår först i och med att något betecknas och betecknandet är en viljeakt.

Peirce teckenbegrepp är triadiskt, och innefattar inte bara språkliga uttryck utan alla former av tecken. I kapitel 3 och 4 kommer Saussures respektive Peirce teckenmodeller att behandlas.

1.5 Tecken att tänka med

För varje utbildningsteori med anspråk på att försöka förklara lärande är det av intresse att studera vilken mening vi tilldelar olika tecken när vi använder dem. För att göra oss förstådda bland andra måste det finnas en viss kongruens i denna meningstilldelning av tecknen. Ibland förefaller oss användandet av tecken så självklart, framför allt i matematik, att vi kanske inte funderar så mycket över tolkningen av tecknen. Hur tillägnar vi oss en viss innebörd i ett tecken?

En svårighet för den som börjar närma sig det här området är att många av de termer och begrepp som emanerar ur klassikernas verk ges olika betydelser av olika forskare. Inte sällan används andra teorier och perspektiv jämsides med de semiotiska, utan någon egentlig problematisering. Olika teoretiska perspektiv kan vara komplementära, men också delvis konträra.

Människor uttrycker matematiska tankar med hjälp av tecken av olika slag. Vi använder tecken till att tänka med, uttrycka och kommunicera våra tankar med andra människor.

Tecken står för någonting. Detta någonting, begreppet, kan man i många sammanhang peka på, till exempel en bil, en hund, ett hus och så vidare. I matematik däremot har begreppet, till exempel tal, ingen motsvarighet i den verkliga världen. Detta får flera konsekvenser som kommer att behandlas i nästa avsnitt.

Tecken och olika representationer spelar en avgörande roll inte bara i matematiken utan också inom matematikdidaktiken. Genom att studera kommunikationsprocessen ur ett semiotiskt perspektiv överskrids de begränsningar som finns i traditionella interaktions- och kommunikationsstudier där man fokuserar på språkanvändningen.

2 Matematikens semiotik

I detta avsnitt ska jag behandla det man kan benämna matematikens semiotik. Ett tecken står för någonting. Detta *någonting* är i matematik ett matematiskt objekt. Inledningsvis ska jag ta upp några exempel på notation från matematikens historia. Matematik kan uppfattas som en generalisering av teckensystem. Därefter behandlas nollans semiotik. Införande av ett särskilt tecken för noll innebar en viktig förändring i vår föreställning av förhållandet mellan språk och verklighet. Sedan behandlas olika matematiska formler. Avslutningsvis diskuteras två funktioner hos matematiska tecken.

2.1 Matematisk notation

Matematik är intimt förknippad med symboler och formler av olika slag. Under historiens gång har den matematiska notationen tagit sig olika uttryck, allt från sumerernas kilskrift inpräglade i lertavlor, egypternas hieroglyfer på papyrusrullar, kinesers, japaners, indiers, arabers och andra kulturers olika teckensystem till våra dagars standardiserade matematiska notation. Men matematisk notation är inte bara symboler och formler, utan också text.

Till skillnad från matematiken själv, med dess karaktär av nödvändighet, är dess beteckningar sociala konventioner och därmed godtyckliga, eller arbiträra. Det finns ingen nödvändighet i att vi låter representera ett visst tal med symbolen ”3”. Men har vi väl kommit överens om att beteckna ett visst tal på ett visst sätt så följer därav ett antal konsekvenser.

Vissa tecken som vi använder oss av inom matematiken har en intressant historia. Kring flera av våra vanligaste matematiska tecken har det stått en lång strid om hur de ska se ut (se till exempel avsnitt 2.3 om nollans semiotik nedan).

Den klassiska matematiken var retorisk, det vill säga den framställdes med ord eller förkortningar. Under medeltiden skedde en betydelsefull förändring, mot en högre grad av abstraktion av matematiken, den så kallade symboliska abstraktionen, genom mötet mellan den orientalisk-medeltida och den grekiska matematiken vilket resulterade i algebrans uppkomst i början av 1600-talet (Thomson, 1991). Med den symboliska abstraktionen, den analytiska geometrin samt infinitesimalkalkylen inleds den moderna matematiken.

De viktiga abstraktionssteg som togs under historiens gång kan följas i utvecklingen av den matematiska notationen, till exempel genom införandet av särskilda tecken för ”intet” (nollan), det ”okända” (x, y, z), det ”ospecificerade” (a, b, c) samt det ”förmodade lilla” inom infinitesimalkalkylen (Sällström, 1991).

Utvecklingen av den matematiska notationen motsvarar en allt högre grad av abstraktion, vilket var en förutsättning för den snabba utvecklingen av matematikens tillämpning inom naturvetenskapen.

2.2 Matematik som generalisering av tecken

Matematik kan uppfattas som en generalisering av tecken eller representationssystem, framhåller Hoffmann och Plöger (2000). En väsentlig del av den moderna matematiken handlar om *symbolisering*. Det handlar inte främst om en abstraktion av den direkta verkligheten, utan om en kedja av abstraktioner, *abstraktioner av abstraktioner*. I varje abstraktions- eller generaliseringssteg har vi att göra med tecken, vilka representerar (generella abstrakta) objekt, som härstammar från en abstraktion och en generalisering.

Vi kan ta ett känt exempel från matematikens historia, nämligen upptäckten av inkommensurabiliteten i den tidiga grekiska matematiken (Hoffmann & Plöger, 2000). Innebörden är att två sträckor inte generellt kan anses vara kommensurabla, det vill säga möjliga att mäta med samma mått. Så är exempelvis sidan och diagonalen i en kvadrat inkommensurabla.

Inkommensurabilitetens problem kan göras till ett problem först om man lämnar, det vill säga abstraherar från, verkligheten. Ser man det praktiskt är naturligtvis alla sträckor ”mätbara”, också diagonalen i en kvadrat med sidan 1. I modern terminologi är diagonalen, här $\sqrt{2}$, ett exempel på ett irrationellt tal.

Bildandet av begreppet inkommensurabilitet och därmed dess hypostasering till ett självständigt matematiskt objekt förutsätter att man betraktar *relationen mellan tal* som generella abstrakta objekt. Tal uppfattades av babylonierna och egypterna främst som instrument att mäta och räkna med. För det andra förutsätts att dessa relationer betraktas som bestämda av lagbundenheter, vilka inte kan uppfattas genom observation, utan endast genom ett logiskt-deduktivt resonemang, som verifieras genom ett bevis. Det är därför man allmänt uppfattar inkommensurabiliteten som det som avgränsar vetenskapligheten i den grekiska matematiken gentemot den äldre, förvetenskapliga, orientaliska matematiken.

En viktig konsekvens av det jag diskuterat ovan är att lärandet i matematik bygger på både abstraherande och generaliserande processer.

2.3 Nollans semiotik

Användningen av ett särskilt tecken för ”intet” har varit högst problematiskt under historiens gång. Det var inget självklart och tog relativt lång tid att införa.

I ett *teckenvärdessystem*, det vill säga där ental, tiotal etcetera skrivs med olika tecken – såsom i det sumeriska, egyptiska och romerska eller det grekiska decimala bokstavssystemet – behövdes inte noll. I ett *platsvärdesystem* däremot, där samma siffror används för ental, tiotal, hundratal och så vidare enligt positionsprincipen, behövs en nolla som platshållare för att exempelvis kunna skilja 21 från 201.

I det babyloniska sexagesimala systemet (för övrigt ett arv från sumerarna) användes i stället en tom plats eller ett kolon. Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi[2] beskriver runt 825 vår tideräkning det indiska systemet med att använda en ring som tecken för noll, ett system, som redan hade använts i denna del av världen i hundratals år. Det indiska namnet för noll var *sunya* (tomrum). Den arabiska översättningen *sifr*

[2] Persisk matematiker och astronom, c:a 780–850. Känd för att fått ge namn åt ”algoritm”. Man vet inte särskilt mycket om hans liv. Hans mest kända skrifter handlar om algebra och om trigonometri. Han verkade i Bagdad där han skrev sina böcker och gjorde astronomiska upptäckter.

latiniserades senare till *zephirum*, ursprunget till svenskans *siffra* och engelskans *zero*.

Att därifrån ta steget till att uppfatta noll som ett *tal* var långt. Införandet av ett tecken för ”intet”, nollan, möttes av stort motstånd under medeltiden. Att beteckna ingenting med någonting, uppfattades av många matematiker närmast som absurt.

Införandet av nollan i matematiken som en symbol för intet innebar en genomgripande förändring i människans föreställning av förhållandet mellan språk och verklighet, eller nollans semiotik, enligt Brian Rotman (1987). Han jämför där nollans betydelse i matematiken med centralperspektivets betydelse inom bildkonsten eller de imaginära pengarnas betydelse inom ekonomin under renässansen.

Finns det flera olika nollor? I modern matematik definieras noll av sina egenskaper, speciellt att $a + 0 = a$ för alla a. Det finns flera olika nollelement, till exempel nollvektorer och nollfunktioner samt den tomma mängden, Ø.

Nollfel

Nollfel, det vill säga enkla fel i aritmetiska uppgifter där noll(or) finns med är vanliga (Kornmann, Frank, Holland-Rummer & Wagner, 1999). Ta uppgiften 3 + 5 =. Om vi byter ut ett av talen mot 0, så kommer lösningsfrekvensen sannolikt att sjunka på ett helt annat sätt än om vi hade bytt ut 5 mot 6. Syntaxen är inte förändrad, utan svårigheten måste bero på den speciella betydelse som 0 spelar i matematiken.

Yngre elever kan uppleva att nollan fungerar olika i olika situationer, till exempel:

5 + 0	0 + 5	5 – 0	0 – 5	5 • 0	0 • 5
3 • 15 • 0	5 : 0	0 : 5	0 : 0		

Vanliga elevföreställningar är att ”nollan inte räknas” eller att ”det går inte” i sådana uppgifter. Här följer några elevers argumentering kring uppgifter med noll (Selter & Spiegel, 1997, s. 76–77, min lätt bearbetade översättning).

Uppgift x • 0 eller 0 • x

Michael: När det står en nolla framför eller efter en uppgift, så kan man inte räkna ut den, då är det alltid noll.

Susanne: 45 gånger 0, det går inte.

Alexander: Är det gånger, så tar nollan överhanden över de andra.

…

Uppgiften 15 • 3 • 0

Denna uppgift visade sig i en undersökning ha en felfrekvens på nästan 85 procent. Vad är det som är så svårt?

Lisette: Då behöver man egentligen inte räkna med noll … Då behöver man inte räkna 45 gånger 0, då har man fått ut resultatet. Det riktiga, egentligen … Egentligen kan man glömma den, men när den står i en mattebok, då måste man ha med den.

…

Uppgift 0 : 5

Andreas: Hm, 0 delat med 5, det går inte.

Lärare: Varför inte?

Andreas: Ja eftersom 0. 5:an kan man inte ta genom 0, då den är för liten för att dela 5 med. Om man tog 4 eller 3 eller 2 eller 1, så skulle inte det heller gå.

Lärare: Vad skriver du då, om du skulle få uppgiften?

Andreas: 0!

Lärare: Först sa du ”går inte och nu säger du ”0”. Är det samma sak?

Andreas: Ja.

André: När man delar noll saker med 5 barn, det går ju inte, då har du inget, som du ska dela med, alltså noll.

…

Uppgift 5 : 0

Christoph: Är 5 eller 0! Hur många gånger går 0 i 5? Åh, jag blir alldeles förvirrad.

Agniezka: Ja, eftersom 5 delat med 0, då delas inget. Alltså är det 5.

Exemplen med nollfel illustrerar vikten av att uppmärksamma den historiska utvecklingen av den matematiska notationen. Symboler som varit problematiska att acceptera för matematiker under historiens gång, kommer sannolikt att kunna bli problematiska för eleverna i deras lärande.

2.4 Matematiska formler

En matematisk formel är ett mellanting mellan bild och språk. Den konkretiserar och åskådliggör, dock utan att avbilda, skriver Pehr Sällström (1991). En stor fördel med formler är att de lätt kan manipuleras och jämföras. Det kan vara svårt att särskilja form från innehåll, betonar Sällström, genom symbiosen mellan formelskriften och den abstrakta algebraiska struktur som den representerar.

De tecken vi finner i formler är av tre slag (Sällström, 1991):

- *Deskriptiva tecken*, noterade med bokstäver eller bokstavskombinationer,
- *Konstruktiva tecken*, med hjälp av vilka formler byggs upp, det vill säga symbolerna för räkneoperationerna, likhetstecken och parenteser av olika slag,
- *Specialtecken*, såsom π, e, log, sin, etcetera och olika sammansatta tecken.

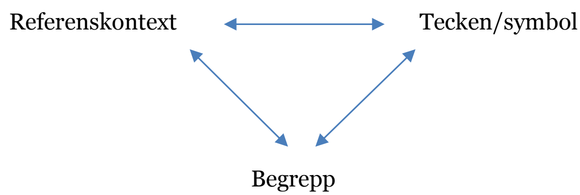
2.5 Matematiska tecken

Matematiska tecken har två funktioner dels en semiotisk funktion, något som står för något annat, dels en epistemologisk funktion, där matematiska tecken är en del i konstitueringen av matematisk kunskap (Steinbring, 2006). Den semiotiska funktionen kan illustreras på följande sätt:

Referenskontext $\longleftrightarrow$ Tecken/symbol

Figur 1. Relation mellan referenskontext och tecken (Steinbring, 2006).

Referenskontexten kan vara föremål eller bilder på föremål som ska räknas och tecknet en siffra, som motsvarar antalet föremål. Den epistemologiska funktionen kommer till uttryck i den epistemologiska triangeln illustrerad nedan i figur 2.



Figur 2: Den epistemologiska triangeln (Steinbring, 2006).

Det matematiska begreppet (objektet) ska inte förväxlas med tecknet. Mellan hörnen i triangeln är det en ömsesidig relation, ett system av relationer. Den lärande ska inte ses isolerad från triangeln, utan den produceras av den lärande.

Ett matematiskt objekt, till exempel en funktion, ”existerar” inte oavhängigt från de olika möjliga representationerna och ska inte förväxlas med en särskild representation.

Mening och betydelse

Gotlobb Frege (1891/1995, 1892/1995) skiljer mellan mening (*Sinn*) och betydelse (*Bedeutung*). ”2 • 3” och ”2 + 4” har samma betydelse, men inte samma mening. Det senare innebär att de inte innehåller samma tanke (*Gedanke*). Tanken, till exempel Pythagoras’ sats, måste skiljas från en elevs föreställning (*Vorstellung*) om Pythagoras’ sats. En tanke kan vara *sann* eller *falsk*. Detta gäller oberoende av en elevs föreställning om det sanna eller falska i tanken. Eleverna kan uppfatta samma tanke, men föreställningarna hos eleverna om denna tanke bärs hos var och en. Två människor kan inte ha samma tanke.

> Om den tanke jag utsäger i Pythagoras’ sats kan anses som sann av andra såväl som av mig, då tillhör den inte mitt medvetandes innehåll, och då är jag inte dess bärare, men kan trots det inse att den är sann. Om det inte är samma tanke som jag och någon annan fattar som innehållet i Pythagoras’ sats, borde man egentligen inte få säga ”Pythagoras’ sats” utan ”min Pythagoras’ sats”, ”hans Pythagoras’ sats”, och dessa vore olika: ty meningen hör med nödvändighet till satsen. I sådana skulle min tanke vara ett innehåll i mitt medvetande. Kunde då meningen i min Pythagoras’ sats vara sann, och meningen i hans falsk? Jag har hävdat att ordet ”röd” bara är användbart inom mitt medvetandes domän, om det inte anger en egenskap hos ringen, utan kännetecknar ett antal av mina sinnesintryck. På så sätt skulle orden ”sann” och ”falsk” såsom jag förstår dem, bara kunna vara användbara inom mitt medvetandes domän, om det inte gäller något vars

bärare jag inte är, utan bestäms till att på något sätt känneteckna mitt medvetandes innehåll. Då skulle sanningen vara inskränkt till mitt medvetandes innehåll, och det skulle bli tvivelaktigt huruvida något liknande överhuvudtaget förekommer i andras medvetande (Frege 1918/1995, s. 122–123).

3 Ferdinand de Saussures semiotik[3]

Ferdinand de Saussure (1857–1913) är en av de stora nydanarna inom språkvetenskapen. Han stora verk *Cours de linguistique générale* (1916), svensk översättning 1970 *Kurs i allmän lingvistik*, är egentligen en samling föredragsanteckningar som hans studenter noterat och sedan utgett i bokform[4].

Saussures räknas som grundare av det vetenskapsfilosofiska program som kallas strukturalismen och har haft ett betydande inflytande på andra forskare som Roland Barthes (litteraturvetenskap), Jean-Claude Lévi-Strauss (antropologi) och Jacques Lacan (psykoanalys).

3.1 Tecken och teckensystem

Saussure delar in språket i *langue* (språk) för att beteckna teckensystemet, grammatik, regler och koder, som behövs för att man ska kunna kommunicera, och *parole* (tal) för att beteckna de faktiska yttrandena i språket, språkets yta.

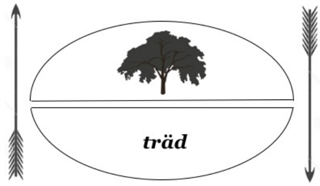
För Saussure handlar semiotiken om olika teckensystem. Det är ”en vetenskap som studerar tecknens liv inom den sociala samvaron” (Saussure, 1970 s. 40). Språket är det viktigaste teckensystemet. Ett tecken kan inte begripas ett och ett, utan måste förstås i förhållande till ett system av tecken. Den som producerar och den som tolkar tecknet måste ha kunskap om detta teckensystem. Matematiska tecken kan sålunda bara förstås inom matematikens kunskapsdomän. Elever socialiseras in i matematikens domän och tillägnar sig innebörden i de matematiska tecknen genom semiotiska aktiviteter i matematikundervisningen.

---

[3] Saussure använde beteckningen semiologi. Idag används efter en överenskommelse termen semiotik. Jag kommer därför att använda termen semiotik även när jag diskuterar Saussures arbeten.

[4] Charles Bally och Albert Sechehaye följde som studenter Saussures föreläsningar vid universitetet i Genève under åren 1906–1911 och samlade andras anteckningar och redigerade dessa till en bok som utgavs 1916, tre år efter Saussures död. De beskriver arbetet i utgivarnas förord (Saussure, 1970).

Tecknet, *le signe,* är en psykologisk enhet och består av yttrandet, *le signifiant*, till exempel ”träd”, och en föreställning, *le signifié*, det betydda, det som vi tänker på när vi säger träd.



Figur 3: Saussures teckenbegrepp

Varje tecken är i sig självt utan mening, det är godtyckligt eller arbiträrt. Är det bara en tillfällighet att vi benämner verkligheten på ett visst sätt, till exempel ett visst djur för häst[5]? Det innebär dock inte att uttrycket beror på den talandes eget val. Sedan ett uttryck väl har etablerats inom språkgruppen har individen ingen möjlighet att ändra det. Godtyckligheten i tecknet gäller i förhållande till innehållet.

På samma sätt är de matematiska tecknen godtyckliga. Ett matematiskt tecken står för ett visst objekt. Det skulle kunna ha sett annorlunda ut, men när det väl är accepterat inom det matematiska samhället går det inte att ändra på.

[5] Frågan om språkets arbiträra sida har diskuterats flitigt och idag är de flesta språkforskare eniga om att det också finns en icke-arbiträr sida i språket. Saussure diskuterar två undantag, onomatopoetiska, det vill säga ljudhärmande, ord och utrop.

4 Charles S. Peirce’ semiotik

Charles Sanders Peirce (1839–1914) var grundare av pragmatismen och anses av många vara en av den nordamerikanska kontinentens största filosofer. Jag ska här diskutera Peirce’ teckenbegrepp samt det viktiga abduktionsbegreppet. Abduktion kan ses som ett svar på frågan om hur ny kunskap utvecklas.

> Abduction is the process of forming an explanatory hypothesis. It is the only logical operation which introduces any new idea (Peirce, 1903, CP 5.171 citerad i Hoffmann, 1997).

4.1 Teckenbegreppet

Peirce teckenteori[6] är mycket komplex och differentierad. Den innehåller en klassificering av olika teckenrelationer. Avsikten är att karakterisera alla de möjliga sätt som vi lär känna och representerar världen på, vare sig detta gäller emotioner, som kan uppstå när man betraktar en blomma, eller vetenskapliga teorier.

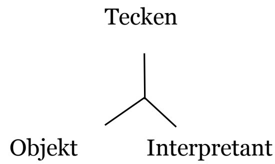
Peirce har sina filosofiska rötter hos Kant. Ett gemensamt drag hos dem är att verkligheten framträder i några grundläggande kategorier inom ramen för vilka den först blir uppfattbar. Vi kan enligt Kant inte veta något om tinget i sig (*das Ding an sich*). För Peirce är världen endast tillgänglig för oss genom en förmedling via tecken. Föremål har ingen betydelse i sig. För tolkare av världen finns inga föremål, bara tecken. Tecken förmedlar mellan subjekt och objekt.

För Peirce råder det ett *triadiskt* förhållande mellan tecken, objekt och interpretant.

> Ett tecken är något som står för något i viss bemärkelse eller kapacitet. Det är riktat till någon, det vill säga skapar ett motsvarande tecken i personens medvetande, eller möjligen ett mer utvecklat tecken. Tecknet som det skapar kallar jag interpretanten av det första tecknet. Tecknet står för något, dess *objekt* (Peirce, citerat i Fiske, 1990, s. 63).

[6] Framställningen bygger i huvudsak på Hoffman (2001) om inte annat anges.

Följande figur kan illustrera detta förhållande:



Figur 4. Förhållandet mellan tecken, objekt och interpretant, enligt Peirce.

Tecken har en föremålslig sida, en materiell komponent, till exempel symboler på ett papper. En annan sida hänför sig till att tecken har en kulturhistoriskt framvuxen och i en social interaktion manifesterad betydelse.

Ett objekt kan representeras genom olika tecken, och varje tecken kan tolkas olika. Möjligheterna till tolkning skiljer sig från person till person. Det innebär att en klassifikation av tecken inte handlar om att sortera bestämda tecken i olika lådor. Det är alltid en fråga om vad det enskilda tecknet betyder för en viss person. Därav följer teckentolkningens perspektivitet. Teckenbegreppet definieras genom att den triadiska teckenrelationen aldrig föreligger avslutad utan alltid är inbunden i en teckenprocess.

Peirce arbetar med tre fundamentala kategorier, etthet (*firstness*), tvåhet (*secondness*) och trehet (*thirdness*). Dessa kategorier ersätter Kants kategorier och är grundläggande för Peirce kunskapsteori.

Alla fenomen i verkligheten uppfattas antingen som enskilda eller som delade på två eller tre element. Ettheten bildar utgångspunkt. Den är något i sig själv. Tvåheten är något som står i relation till det förra och treheten är en förmedling av de båda andra.

Tecknet är ett exempel på trehet och består av tre led: *representamen*, *objekt* och *interpretant*; eller uttryck, innehåll och tillämpningssärart.

Varje tecken kan kategoriseras i enlighet med de tre sätt på vilket var och en av de tre leden kan skifta: efter uttryckets egen natur, det slags relation som sammanbinder uttryck och innehåll och tillämpningens särart (Sonesson, 1992). Vi kan beskriva detta med figuren nedan:

Trichotomy / Category	I. of the representation	II. of relation of object	III. of relation to interpretant
Firstness	qualisign	icon	rheme
Seconness	sinsign	index	dicent
Thirdness	legisign	symbol	argument

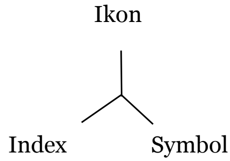
Figur 5. Peirce' teckenklasser (Nöth, 1990).

Interpretanten är inte tecknets användare utan syftar på den "egentliga betecknande effekten" (Peirce, citerat i Fiske, 1990, s. 63). Interpretanten av tecknet är resultatet av användarens erfarenhet av tecknet och de sammanhang där detta ingår. Gränserna sätts av sociala konventioner. Variationerna inom dessa är en fråga om sociala och psykologiska skillnader mellan användarna (Fiske, 1990).

Den triadiska strukturen i Peirce' teckenbegrepp motsvaras för vår del av spänningsfältet mellan det matematiska sakförhållandet, representationen och tolkningen. Varje teckendimension (objekt, tecknet för sig och interpretanten) kan differentieras på tre olika sätt.

Objektrelationen

Peirce skiljer mellan tre olika objektrelationer ikon, index och symbol. En ikon liknar objektet på något sätt; i ett index finns ett direkt samband i verkligheten mellan tecknet och objektet; i en symbol saknas både likhet och samband. Ett fotografi är en ikon, rök ett index som är kopplat till (indikerar) eld och ett ord är en symbol (Fiske, 1990). Även teckentyperna kan visas i en triadisk modell.



Figur 6. Förhållandet mellan ikon, index och symbol enligt Peirce.

Tecknet

När man betraktar tecknet för sig, skiljer Peirce mellan qualitecken, sintecken (av singulär) och legitecken (av latinets lex). Senare använder sig Peirce även av beteckningarna tone, toke och type. Ett qualitecken är en kvalitet som ett tecken kan anta. Det kan inte fungera som ett tecken förrän det är förkroppsligat. Ett sintecken är en existerande sak eller händelse som är ett tecken. Ett legitecken är en lag som är ett tecken. En sådan är normalt uppställd av människor. Varje konventionellt tecken är ett legitecken, men det omvända gäller inte.

Interpretantrelationen

Den tredje teckendimensionen avser de sätt på vilket en interpretant representerar ett tecken. Här skiljer Peirce mellan rhema (av grekiskans ord) och dici (anspelar på satsen) och argument (anspelar på ett argumentativt sammanhang av satser).

Förmågan till varseblivning och tolkning av tecknen är inget givet, utan kan vara ganska olika. Varje varseblivning och tolkning uppfattas som bildandet av en hypotes, eller som resultatet av en abduktion.

4.2 Abduktion

Abduktion är en tredje slutledningsform vid sidan av deduktion och induktion. Begreppet är mycket centralt hos Peirce och kan sägas representera ett svar på frågan hur ny kunskap utvecklas.

Peirce författarskap sträcker sig över en tämligen lång period på 60 år. Som för de flesta författare som arbetar över en så lång tid så förekommer det motstridiga skrivningar. Olika termer används för att beskriva eller benämna samma fenomen och centrala begrepp genomgår en utveckling.

Runt 1890 inträffar ett brott i hur Peirce uppfattar abduktion. Det förekom vid den här tiden motstridiga uppfattningar, å ena sidan abduktion som en intuitiv slutledning, å den andra sidan abduktion som en logisk slutledning. Drygt 10 år senare skriver Peirce att han blandade ihop abduktion och induktion (se Kirkeby, 1994, för en redogörelse).

Den vanligaste citerade definitionen av abduktionsbegreppet är:

> Ett överraskande faktum, C, observeras;
> men om A vore sant, så skulle C vara en självklarhet;
> Följaktligen finns det skäl att anta att A är sant.
>
> Man kan således inte abduktivt sluta sig till A eller – om ni föredrar den formuleringen – man kan inte abduktivt gissa sig till A förrän dess hela innehåll redan är närvarande i premissen: ”Om A vore sant, så skulle C vara en självklarhet” (Peirce, 1990, s. 237).

I en annan ofta citerad definition sätts abduktion över deduktion och induktion som slutledningsform:

Deduktion

Lag:	Alla bönor i påsen A är vita.
Faktum:	Bönorna på bordet kommer från påsen A.
C-resultat:	Bönorna på bordet är vita.

Induktion

Resultat:	Bönorna på bordet är vita.
Faktum:	Bönorna på bordet kommer från påsen A.
C-lag:	Alla bönorna i påsen A är vita.

Abduktion

Lag:	Alla bönorna i påsen A är vita
Resultat:	Bönorna på bordet är vita.
C-Faktum:	Bönorna på bordet är från påsen A (och inte från påsarna B, C …) (Peirce, citerad i Kirkeby, 1994, s. 148f).

I den första definitionen är abduktion en slutledning till en lagbundet i form av en hypotes. I den andra definitionen är abduktion en slutledning till ett faktum.

Abduktion kan uppfattas som principer både för vardagslivets och det vetenskapliga vetandets speciella principer. Om det går att skapa en systematik för abduktionen blir den till en teori om sambandet mellan vardagsspråket och vetenskapens språk (se Kirkeby, 1994, för en diskussion om detta). Därmed bortfaller problemet med att en hypotes är något man väljer eller konstruerar, menar Kirkeby. Vardagsspråket är den värld som avgränsar möjliga hypoteser. Därigenom kan man finna ett begrepp, en samling av begrepp eller en uppsättning relationer i vardagsspråket som föregriper varje vetenskaplig hypotes. Även om begreppen är språkligt vaga, kan de vara tydliga som mentala föreställningar.

4.3 Epistemologisk exkurs

Frågan om hur ny matematisk kunskap utvecklas har traditionellt hanterats mellan de två ytterligheterna rationalism och empirism. Det finns en paradox i matematikfilosofin om hur man kan avvisa empirismen som grund och samtidigt förklara matematikens stora tillämpbarhet på verkligheten.

Kant gör i sina kunskapsteoretiska arbeten en distinktion mellan två typer av kunskap *aposteriorisk*, som grundas på erfarenheten, och *apriorisk*, som är oberoende av erfarenheten. Han för också in distinktionen mellan analytiska och syntetiska omdömen. De analytiska omdömena kan avgöras genom en logisk analys av det omdömet säger. ”En kropp har en utsträckning” är ett analytiskt omdöme, eftersom det innefattas i begreppet kropp att ha en utsträckning. Det vore självmotsägande att tala om kroppar som inte har en utsträckning. Ett sådant omdöme är ett nödvändigt sant omdöme, ett analytiskt apriori omdöme.

Syntetiska omdömen säger ingenting som inte ligger i begreppet. De är i viss mening sammansatta. Finns det syntetiska aprioriska omdömen? Ett sådant omdöme skulle inte vara självmotsägande att förneka, likväl skulle vi kunna avgöra apriori om det är sant eller falskt.

Vi måste enligt Kant företa en *kopernikansk vändning*, det vill säga vända uppmärksamheten mot de erfarna tingen och mot erfarenheten själv. Våra erfarenheter formas och struktureras utifrån åskådningsformer som tid och rum och kategorier som ting och orsak-verkan. Alla medvetandeformer uppvisaren en tidslig och rumslig ordning.

Matematiken är enligt Kant exempel på syntetiska aprioriska omdömen, då de inte kan föras tillbaka till dessa åskådningsformer. Genom detta är det inte möjligt att nå erfarenheten om tinget i sig (*das Ding an sich*) utan alla de olika formerna och kategorierna kommer att finnas i varje erfarenhet eftersom det är något som det erfarande subjektet själv bibringar sinneserfarenheterna. Häri ligger Kants distinktion mellan tingen i sig, *das Ding an sich* (noumenon) och fenomenen, *das Ding als Erscheinung* (phaenomenon).

Både Peirce och Jean Piaget har sina rötter i Kants filosofi. De båda ersätter de aristoteliska begreppen om abstraktion och generalisering i sina respektive diskussioner om matematikens epistemologi.

Det finns en intressant parallell till hur de båda överskrider Kant genom att visa att åskådningsformerna och kategorierna inte är aprioriska. Peirce hävdar abduktion som vardagens slutledningsform och som leder oss till den mest sannolika förklaringen till ett fenomen som väcker vår förvåning. Peirce kallar sitt begrepp hypostaserande abduktion. Abduktionen innebär hypotesbildning och ett sanningsantagande av denna hypotes.

Enligt Piaget är Kants åskådningsformer inte aprioriska utan konstrueras genom reflekterande abstraktion och konstruktiv generalisering (Piaget, 1985). Piaget gör en stark distinktion mellan empirisk och reflekterande abstraktion och förklarar matematikens stora tillämpningar i att den matematiska kunskapen har en grund i konkreta handlingar, som att ordna, gruppera, föra samman etcetera. Dessa utvecklas till reversibla operationer genom en reflekterande abstraktion och konstruktiv generalisering. Dessa i sin tur utgör utgångspunkt för vidare abstraktioner och generaliseringar.

5 Semiotik och matematikdidaktik

I detta avsnitt ska semiotikens betydelse för matematikdidaktiken diskuteras, varvid framför allt tre dimensioner, det matematiska sakförhållandet, representationen och tolkningen av det, kommer att diskuteras.

5.1 Att undervisa i matematik

Det är en väsentlig skillnad mellan att undervisa i matematik och till exempel i biologi, påpekar Peter Damerow (1996). När en lärare visar ett begrepp på en växt, så försöker han/hon att lära ut något om växter. En matematiklärare däremot som visar ett begrepp på skrivtavlan avser inte att arbeta med verkliga objekt, utan försöker kommunicera en mental konstruktion som inte har någon motsvarighet i den verkliga världen. Ett träd på skrivtavlan i klassrummet är en ikonisk modell av ett verkligt träd, medan en triangel ritad på skrivtavlan är en modell av en *abstrakt idé*.

Genom att dissekera en groda i skolans laboratoriesal kan en elev lära sig mer om grodor. Däremot kan samme elev inte lära sig mer om trianglar genom att grundligt granska en triangelformad träbit.

Medan matematiken är inriktad på vetande och normalt inte reflekterar över sin egen uppkomst, måste matematikens didaktik tematisera människan och hennes möjligheter att utveckla matematiskt vetande. Frågan om hur matematiskt vetande uppstår och utvecklas är en grundläggande uppgift för matematikens didaktik.

Hur matematiken uppfattas har viktiga implikationer för undervisningspraktiken. Heinrich Bauersfeld (1993) menar att fundamentalt olika undervisningspraktiker uppkommer om matematiken uppfattas som en objektiv sanning, en samhällelig skatt, något existerande, eller uppfattas som en praktik av gemensam matematisering, som styrs av de regler och överenskommelser som uppkommer ur denna praktik.

> The first conviction will lead teachers to "introduce" children, to use "embodiments" and "representations", which are structurally as "near to the structure mathematically meant" and as little misleading or distracting as possible. Children's errors will find corrections toward the expected correct answer and so forth. Objectively existing structures and properties also give space for "discovery" activities, given that the expected findings are in reach of the present cognitive aptitudes (e.g. "zone of proximal development").
>
> The latter conviction will lead teachers to organize their activities as part of a practice of mathematizing, that is, as challenging and supportive "subculture" specific to this teacher and these children in this classroom, which functions toward developing the students' "constructive abilities", their related self-concept, and self-organization, rather than as a management through product control and permanent external assessments. The diversity of subjective constructions of meaning and the necessity to arrive at a viable adaptations – "taken-as shared meanings" and "taken-as-shared regulations –requires optimal chances for discussions based on intensive experiencing and aiming at the negotiation of meanings (Bauersfeld, 1993, s. 140).

Varje matematikdidaktisk teori måste därför, enligt Bauersfeld, utveckla en idé om matematikundervisningens filosofi.

5.2 Matematikdidaktik och meningsskapande

Elevers meningsskapande processer studeras traditionellt genom olika samtals- och diskursanalytiska studier. Semiotikens fördelar gentemot sådana studier är att alla uttryck, såväl språkliga som icke-språkliga, till exempel de för matematikdidaktiken så centrala matematiska symbolerna, representationer av olika slag (diagram, tabeller, grafer etcetera), åskådningsmaterial och olika hjälpmedel räknas in (se till exempel Seeger, 2000).

Semiotiken berör några viktiga dimensioner av matematikdidaktiken,

- *Objektet*, eller sakförhållandet,
- *Representationen* (intern och extern) av dessa objekt eller sakförhållanden,
- *Tolkningen* av dem.

5.3 Sakförhållandet

Ett matematiskt objekt eller sakförhållande kan bara förstås och kommuniceras när det representeras och tolkas i någon form. Spänningsfältet emellan sakförhållandet, representationen och tolkningen gör därför semiotiken mycket intressant för matematikdidaktisk forskning. Det handlar om vilken mening människor tillskriver de olika tecken som de använder sig utav inom matematiken. Lärande uppfattas här som en teckenprocess (Hoffmann, 1996, 2000).

Sakförhållandet är ett abstrakt eller idealt matematiskt objekt eller ett problem som uppkommer ur vardagserfarenheter. Det bör noteras att semiotiken inte förutsätter en reell existens av ett objekt, det vill säga platonism. Som filosofisk position är platonismen högst problematisk.

Hypostasering innehåller både generaliserande och abstraherande processer i en utveckling till ett mentalt objekt, vilket hanteras av matematiker *som om* det existerade.

5.4 Representationens problem[7]

Ett matematiskt sakförhållande inte bara *kan* representeras på olika sätt, utan *måste* representeras på något sätt för att vi ska kunna operera eller handla (räkna, derivera etcetera) och därigenom transformera det på något sätt. Genom att representera ett sakförhållande, tolkar vi det, det vill säga tilldelar det en viss mening eller innebörd. Ett matematiskt sakförhållande framställs (representeras externt) exempelvis genom ett aritmetiskt uttryck, en ekvation eller olikhet, en integral eller differentialekvation. Genom ett regelstyrt opererande, det vill säga vi utför de aritmetiska beräkningarna (addition, subtraktion etcetera), löser ekvationen eller beräknar integralen leder detta till nya framställningar av sakförhållandet, vars tolkning i den kontext vari sakförhållandet ges, ger en ny information om detta sakförhållande.

Vid de flesta matematiska aktiviteter sker vid sidan av en regelstyrd omformning av symboliska framställningar också en ”översättning” mellan olika framställningar. Att bedriva matematik innebär väsentligen också en interaktion mellan människa och framställningsform (på ett papper eller en bildskärm).

---

[7] Min framställning här bygger i huvudsak på Pescheck (2000).

Därvid uppkommer ett antal frågor: Vad är det egentligen som framställs och hur framställs det inom matematiken? Normalt är det abstrakta relationer, det vill säga något som inte är direkt tillgängligt för våra sinnen, till exempel ett tal som en kvantitativ relation, en ekvation som en relation mellan två variabla storheter, en funktion som en relation mellan elementen i två mängder. Dessa abstrakta relationer framställs genom skrivna symboler, eller kan numera också materialiseras som förnimbara objekt på en datorskärm. Abstrakta relationer kan också materialiseras genom skriftspråk.

Är de redan specifikt abstrakta, som vi materialiserar i matematiska symboler, eller blir de först specifikt matematiska genom att vi materialiserar dem på ett specifikt, matematiskt, sätt?

Det kan vara ekonomiskt att använda en och samma framställning för olika matematiska sakförhållanden, men varför använder man olika framställningsformer för att materialisera ett och samma matematiska sakförhållande?

Vad är det för mening att skilja mellan objekt och dess representationer, alltså att anta existensen av ett objektområde bortom dess materiella eller kognitiva framställningsformer (i perceisk mening bortom tecken och interpretant)?

Olika framställningsformer

Man kan språkligt beskriva hur någon kastar upp en sten i luften, hur stenen allt långsammare stiger, verkar stanna i luften och sedan börjar att falla allt snabbare och slutligen landa på marken.

Denna framställning kan också visas visuellt. Man kan här skilja mellan ikonisk, schematisk och symbolisk framställning.

En *ikonisk framställning* gör en bildlik, närmast kvasianalog, beskrivning av sakförhållandet i form av ett förenklat ”fotografi”.

En *schematisk framställning,* till exempel i form av en graf och en tabell med mätvärden, fokuserar på relationen mellan tid och höjd. Tabellen gör det på ett diskret sätt och den grafiska framställningen på ett kontinuerligt sätt. Båda framställningarna abstraherar från bestämda aspekter av sakförhållandet, något som fortfarande kan ses i den ikoniska framställningen, att ett föremål kastas upp och vilket föremål det handlar om och av vem det kastas.

En *symbolisk framställning*, i form av en funktion, går ett stycke längre. Den kan visa att förhållandet mellan tid och höjd är kvadratiskt, samt på vilket sätt höjden är beroende av utgångshastigheten och gravi tationskraften. Den ger också möjlighet som de andra framställningsformerna saknar att genom en regelstyrd omformning få fram utgångshastigheten ur tid och höjd.

Det som skiljer de olika framställningsformerna åt är:

- *Ikonisk framställningsform* hänför sig till reellt synbara omständigheter och kan ge en första inblick i ett sakförhållande, stimulera associationer och vara utgångspunkt för utvecklingen av schematiska framställningar, men tillhör egentligen inte matematikens område. Ikoniska framställningar används sällan i matematiska texter.
- *Schematiska och symboliska* framställningsformer finner man däremot i varje lärobok i matematik, varför man måste förutsätta att de vid sidan av språkliga framställningar är särskilt viktiga för matematik och lärandet i matematik. Genom dessa framställningsformer görs vissa aspekter av ett sakförhållande mer intressanta än andra. Man måste kunna ”läsa” sådana framställningsformer, särskilt måste man veta vad man abstraherar från.

Medan schematiska framställningar ofta refererar till förnimbara mönster i referenskontexten och abstrakta relationer framställs med hjälp av förbindningslinjer, pilar och så vidare, så framställs sådana relationer i symboliska framställningar i formaliserad form, det vill säga med symboler. Betydelsen av symboler måste överenskommas eller förhandlas. Symbolerna görs ofta generella genom att *en* bestämd symbol får stå för *alla* reella tal, *alla* punkter, eller *alla* integrerbara funktioner. Övergången till detta symboliska plan kan beskrivas som ett uttryck för en *generalisering*.

En annan skillnad är att symboliseringen följer en ökad rörlighetsgrad. Ytterligare en skillnad är att medan ikoniska och schematiska framställningar lämnas större utrymme för skilda tolkningar, så är innebörden i symboliska framställningar mer fastlagda, men också mer villkorade (exempelvis jag kallar denna funktion g).

För matematikens del är de båda framställningarna viktiga, framför allt karakteriseras matematiskt arbete av en växling mellan schematiska och symboliska framställningar.

Den ovanstående diskussionen leder till en rad frågor om förhållandet mellan sakförhållande och framställning:

- Hur kan man bortom representationen föreställa sig ett sakförhållande?
- Finns det över huvud taget ett matematiskt sakförhållande, en abstrakt relation, utan representation och hur är det så i fall ”närvarande”?
- ”Existerar” inte ett matematiskt sakförhållande först genom dess representation, vilket innebär att det är meningslöst att tala om representation *av* något abstrakt? Är inte framställningar mer representation *för* något abstrakt?
- Om man, på goda grunder, vill undvika att likställa abstrakta relationer och dess kognitiva eller materiella representationer, måste man då formulera det annorlunda?
- Konstituerar sig inte en abstrakt relation, det vill säga ett matematiskt objekt, först genom handhavandet med representationen och skapar sig en existens också genom denna?

Av stort intresse för ovanstående diskussion är användningen av datorer. Bildskärmen är för det första en specifik form av framställning och materialisering av matematik, och för det andra kräver den och producerar vissa framställningar av matematiska sakförhållanden. Förstärker datorer problemet med förhållandet mellan sakförhållandet och framställningen?

Man betonar ofta möjligheten att kunna experimentera med olika framställningar och simulera olika utfall, det vill säga framställningar. Den snabba tillgängligheten till och växlingar mellan olika framställningar anses av många stimulera och befrämja begreppsförståelsen och matematisk kreativitet. Ännu måste detta uppfattas som en hypotes att pröva.

Representation som föreställning och framställning

Att förstå något innebär att kunna representera detta någonting, internt och externt. Den svenska och engelska termen *representation* har en tvetydig innebörd som i tyskan motsvaras av *Darstellung* och V*orstellung*. Den förra motsvarar en extern representation, eller framställning) och den senare en intern representation, eller föreställning. I en traditionell kognitiv teori är den interna representationen en *återspegling*, en bild, av verkligheten. Utvecklingen av neurovetenskapen gör det dock svårt att framhärda i en sådan position, då hjärnans processer styrs av interna regler. Kunskapen eller våra föreställningar om världen är *embodied*, det vill säga knuten till vår hjärnas (och kropps) speciella sätt att fungera.

Varje kunskap yttrar sig eller förmedlas genom en intern representation, som föreställningar och betydelser. Tecken kan förstås både som intern och extern representation. Man kan från semiotisk synvinkel förstå lärandet som en process av tillägnelse av och utveckling av representationssystem, eller semiotiska register (Hoffmann & Seeger, 2000).

Semiotiskt register

De olika framställningsformerna kan också betecknas som olika semiotiska (representations)register. En ekvation, till exempel 2y= x–1, representerar en linje *l* i planet. Denna ekvation kan transformeras till y=1/2x –1/2 eller kan i mer allmän form skrivas som y=mx–b, det vill säga räta linjens ekvation. Vi rör oss nu inom samma semiotiska register.

När vi transformerar det algebraiska uttrycket till en graf byter vi semiotiskt register. Ett algebraiskt uttryck och en graf är olika semiotiska register.

5.5 Tolkning

För att förstå och kommunicera ett matematiskt sakförhållande måste det representeras på något sätt. Att representera innebär att tolka. Vi tilldelar de tecken vi använder för att representera sakförhållanden en viss mening. För att vi ska kunna förstå varandra, det vill säga för att kommunikationen ska bli framgångsrik och rationell, måste det finnas en viss *ömsesidighet* och *kongruens* i denna meningstilldelning.

Att studera tolkningsprocessen är att fråga sig hur matematisk kunskap, som både är nödvändig och universell, kan utvecklas; hur utvecklas en kunskap som är både intersubjektiv, det vill säga att alla kan utveckla och därmed äga den, och självidentisk, det vill säga är samma kunskap som förvärvas av alla dem som förvärvar den? Ur matematikdidaktisk synvinkel blir det intressant att modellera denna meningstilldelning semiotiskt.

6 Avslutning

Den här rapporten har betonat nödvändigheten av en semiotisk vändning inom matematikens didaktik. Rationella överväganden, argumentation och tänkande utvecklas genom en social interaktion. De framträder som regler, värden och tecken i vid mening. Genom att sätta meningsskapandet av dessa tecken i fokus kan vi företa en semiotisk vändning. Lärprocesser i matematik uppfattas här som huvudsakligen en teckenprocess.

Lärande i matematik innebär att involveras i semiotiska aktiviteter. Matematiska sakförhållanden måste representeras på olika sätt för att vi ska kunna operera eller handla med dem. Vi beräknar ett aritmetiskt uttryck, löser en ekvation, beräknar en integral eller en differentialekvation. Vid sidan av dessa regelstyrda omformningar av symboliska framställningar sker en översättning mellan olika framställningar eller register. Ett funktionsuttryck och dess graf utgör olika semiotiska register av samma matematiska objekt.

Att lära sig matematik kräver ansträngning. Ett matematiskt tecken måste alltid förstås i förhållande till ett givet teckensystem, den matematiska notationen. Redan när eleverna lämnar de naturliga talen de arbetat med under de första åren och tar sig an de rationella talen ökas kraven på abstraktion högst väsentligt. Samma tal kommer att kunna representeras inom olika semiotiska register.

En ökad uppmärksamhet av semiotiska perspektiv inom matematikdidaktiken öppnar möjligheten för nya och spännande utmaningar och skulle kunna vitalisera utbildningen av matematiklärare både teoretiskt och i praktiskt hänseende.

Referenser

Bauersfeld, H. (1993). Theoretical perspectives on interaction in the mathematics classroom. I R. Biehler, R. W. Scholz & R. Sträßer (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (ss. 135–146). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Björklund Boistrup, L. (2010). *Assessment discourses in mathematics classrooms: a multimodal social semiotic study*. Stockholm: Stockholms universitet.

Damerow, P. (1996). *Abstraction and representation. Essays on the cultural evolution of thinking*. Dordrecht: Kluwer.

Eriksson, U. (2014). *Reading the Sky: From Starspots to Spotting Stars*. Uppsala: Acta Universitatis Upsaliensis.

Fiske, J. (1990). *Kommunikationsteorier. En introduktion*. Stockholm: Wahlström & Widstrand.

Fredlund, T. (2015). *Using a social semiotic perpsective to inform the teaching and learning of physics*. Uppsala: Acta Universitatis Upsaliensis.

Frege, G. (1995). *Skrifter i urval: Funktion och begrepp* [Funktion und Begriff, 1891]. Stockholm: Thales.

Frege, G, (1995). *Skrifter i urval: Om mening och betydelse* [Über Sinn und Bedeutung, 1982]. Stockholm: Thales.

Frege, G. (1995). *Skrifter i urval: Tanken* [Der Gedanke: eine logische Untersuchung, 1918]. Stockholm: Thales.

Fried, M. N. (2007). Didactics and history of mathematics: knowledge and self-knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, *66*, 203–223.

Ginsburg, H. (1977). *Children's arithmetic*. New York, NY: Van Nostrand.

Halliday, M. A. K. (1978). *Language as a social semiotic: The social interpretation of language and meaning*. London: Edward Arnold.

Hoffmann, M. (1996). *Eine semiotische Modellierung von Lernprozessen. Peirce und das Wechselverhältnis von Abduktion und Vergegenständlichung*. Occasional paper, 160, IDM. Bielefeld: Universität Bielfeld.

Hoffmann, M. (1997). *Is there a ”logic” of abduction.* Bidrag presenterat vid The 6th Congress of the IASS-AIS, International Association for Semiotic Studies in Guadalajan, Mexico, 13–18 juli, 1997.

Hoffmann, M. (2000). Die Paradoxie des Lernens und ein semiotischer Ansatz zu ihrer Auflösung. *Zeitschrift für Semiotik*, *22*(1), 31–50.

Hoffmann, M. (2001). *Triadische Zeichenrelation nach Charles S Peirce.* Bidrag presenterat vid GDM-AK Semiotik in der Mathematikdidaktik, Neresheim, 25-27 september 2001.

Hoffmann, M. & Plöger, M. (2000). Mathematik als Prozess der Verallgemeinerung von Zeichen: Eine exemplarische Unterrichtseinheit zur Entdeckung der Inkommensurabilität. *Zeitschrift für Semiotik*, *22*(1), 81–114.

Hoffmann, M & Seeger, F. (2000). *Semiotik in der Mathematikdidaktik. Ein Instrument für eine Didaktik des 21. Jahrhunderts* [Positionspapier].

Hoffmeyer, J. (1997). *Livstecken. Betydelsens naturhistoria.* Stockholm: Bonnier Alba.

Kirkeby, O. F. (1994). Abduktion. I H. Andersen (red.). *Vetenskapsteori och metodlära. En introduktion* (ss. 143–180). Lund: Studentlitteratur.

Kornmann, R., Frank, A., Holland-Rummer, C. & Wagner, H-J. (1999). *Probleme beim rechnen mit der Null. Erklärungsansätze und pädagogische Hilfen.* Weinheim: Beltz.

Leijon, M. & Lindstrand, F. (2012) Socialsemiotik och design för lärande. Två multimodala teorier om lärande, representation och teckenskapande. *Pedagogisk forskning i Sverige*, *17*(3–4), 171–192.

Nöth, W. (2000). *Handbuch der Semiotik* [2. Vollständig neu bearbeitete und erweiterte Auflage]. Stuttgart: Verlag J B Metzler.

Otte, M. (1998). Limits of constructivism: Kant, Piaget and Peirce. *Science & Education*, *7*(5), 425–450.

Otte, M., Mies, T. & Hoffmann, M. (1997). *Die Symmetrie von Objektbezug und Objektivität wissenschaftlicher Verallgenmeinerung. Untersuchung zur Begründung wissenschaftlicher Rationalität im Anschluß an die mathematische Philosophie von Charles S Peirce.* Occasional paper, 162. IDM. Bielefeld: Universität Bielefeld.

Peirce, C. S. (1990). *Pragmatism och kosmologi*. Göteborg: Daidalos.
Peschek, W. (2000). *Anmerkungen zur Vielfalt der Darstellung und zur Rolle der Computer*. Vortragsmanuskript der GDM-AK Semiotik Soest, 22.9. 2000. [Opublicerat.]
Piaget, J. (1985). *The equilibration of cognitive structures. The central problem of intellectual development*. Chicago: The University of Chicago Press.
Rotman, B. (1987). *Signifying nothing. The semiotics of zero*. Landon: Macmillan Press.
Saussure, F. de (1916). *Cours de linguistique générale*. Lausanne: Payot.
Saussure, F. de (1970). *Kurs i allmän lingvistik*. Lund: Cavefors.
Seeger, F. (2000). Lernen mit graphischen Repräsentationen: Psychologie und semiotische Überlegungen. *Zeitschrift für Semiotik*, *22*(1), 51–80.
Selander, S. & Kress, G. (2010). *Design för lärande: Ett multimodalt perspektiv*. Stockholm: Nordstedts.
Selter, C. & Spiegel, H. (1997). *Wie Kinder rechnen*. Leipzig: Ernst Klett Grundschulverlag.
Sonesson, G. (1987). *Bildbetydelser i informationssamhället – några preciseringar till grundbegreppen*. Rapport 2 från Semiotikprojektet. Lunds universitet, institutionen för konstvetenskap.
Sonesson, G. (1989). *Pictorial concepts. Inquiries of the visual semiotic heritage and its relevance for the analysis of the visual world*. Lund: Lund University Press.
Sonesson, G. (1992). *Bildbetydelser. Inledning till bildsemiotiken som vetenskap*. Lund: Studentlitteratur.
Steinbring, H. (2006). What makes a sign a *mathematical sign*? An epistemological perspective on mathematical interaction. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 133–162.
Sällström, P. (1991). *Tecken att tänka med*. Stockholm: Carlsson.
Thompson, J. (1991). *Historiens matematik*. Lund: Studentlitteratur.

Working Papers in Mathematics Education

Institutionen för matematik och datavetenskap, Karlstads universitet.
Redaktör: Arne Engström. E-post: arne.engstrom@kau.se

2018

2018:1	Bommel, J. van, Liljekvist, Y., & Olin-Scheller, C.	Capturing Managing and Analyzing Teachers' Informal Professional Development on Social Media.
2018:2	Engström, A.	Semiotiska perspektiv i matematikdidaktik. En introduktion.

Semiotiska perspektiv i matematikdidaktik

Semiotiska perspektiv i matematikdidaktik har fått en ökad uppmärksamhet under senare år. I flera länder finns en livaktig forskning på området. I Sverige är semiotiska perspektiv inom matematikdidaktiken ännu svagt utvecklad. Föreliggande rapport syftar till att introducera semiotiska perspektiv inom den matematikdidaktiska forskningen. Teoretiskt inspireras dessa perspektiv av Ferdinand de Saussures och Charles S. Peirce arbeten.

Människor uttrycker matematiska tankar med hjälp av tecken av olika slag. Ett tecken står för någonting. Detta någonting är i matematik ett matematiskt objekt. Matematik kan uppfattas som en generalisering av tecken eller representationssystem. En väsentlig del av den moderna matematiken handlar om symbolisering. Det är inte främst en abstraktion av den direkta verkligheten, utan om en kedja av abstraktioner. Ett matematiskt objekt eller sakförhållande kan bara förstås och kommuniceras när det representeras och tolkas i någon form. Spänningsfältet mellan sakförhållandet, representationen och tolkningen gör därför semiotiska perspektiv mycket intressanta för matematikdidaktisk forskning.

ISBN 978-91-7063-880-0 (pdf)

Working Papers in Mathematics Education

Karlstad University | 2018:2