

О ПРЕДСТАВИМОСТИ НЕКОТОРЫХ КОНУСОВ В L^p_ν И ЭКСТРАПОЛЯЦИИ ОПЕРАТОРОВ НА КОНУСАХ

© 2006 г. **Е. И. Бережной, Л. Малигранда**

Представлено академиком С.М. Никольским 30.03.2005 г.

Поступило 23.09.2005 г.

Хорошо известна роль точных оценок классических операторов в гармоническом анализе и смежных областях. В последнее время исходя из новых задач анализа весьма популярными стали оценки операторов не на всем пространстве, а на некоторых конусах в этих пространствах (см., например, [1–4]). Кроме того, в теории интегральных операторов с положительными ядрами хорошо известна теорема экстраполяции Шура (см., например, [5]), которая говорит, что интегральный оператор $Kx(t) = \int k(t, s)x(s)ds$ с $k(t, s) \geq 0$ ограничен в пространстве L^p тогда и только тогда, когда существует положительная, конечная п.в. функция $u(t)$, что оператор ограничен в парах $K: L^\infty_u \rightarrow L^\infty_u$ и $K: L^1_\nu \rightarrow L^1_\nu$, где $\nu = u^{1/p-1}$. Отметим, что в связи с различными задачами анализа интерес к теоремам экстраполяции значительно возрос [6–8]. Поэтому и в теоремах экстраполяции естественным явился бы переход от пространства Лебега L^p к конусам в пространствах Лебега.

В настоящей работе для важнейших конусов в пространствах Лебега предлагается редукция задачи оценки оператора на конусе к задаче об оценке оператора на новом пространстве, которое строится конструктивно по конусу и исходному пространству. Такая редукция позволяет применить всю разработанную технику получения точных оценок на весовых пространствах Лебега к получению точных оценок операторов на конусах. Используя редукцию, мы также предложили для некоторого класса операторов новую теорему экстраполяции операторов, определенных на конусах в пространствах Лебега.

Пусть $S(\mu) = S(R_+, \Sigma, \mu)$ ($R_+ = (0, +\infty)$) – пространство измеримых функций $x: R_+ \rightarrow R$. Напомним, что банахово пространство $X = (X, \|\cdot\|_X)$, состоя-

щее из измеримых функций, называется идеальным [9], если из $y \in X$, измеримости x и выполнения п.в. на R_+ неравенства $|x(t)| \leq |y(t)|$ следует, что $x \in X$ и $\|x\|_X \leq \|y\|_X$. Как обычно, символом L^p ($1 \leq p \leq \infty$) обозначается классическое пространство Лебега.

Пусть $w: R_+ \rightarrow R_+$ – положительная функция (вес). Если X – идеальное пространство, то символом X_w обозначается новое идеальное пространство, норма в котором задается равенством $\|x\|_{X_w} = \|w_x\|_X$.

Определение 1. Пусть X – идеальное пространство в $S(\mu)$, K – некоторый конус в $S(\mu)$. Символом $K \cap X$ обозначается, как обычно, пересечение конуса K с конусом X .

Обозначим через $K(\downarrow)$ конус в $S(\mu)$, состоящий из функций $x: R_+ \rightarrow R_+$, каждая из которых не возрастает, т.е. $x(t+h) \leq x(t)$ для $h \geq 0$, через $K(\uparrow)$ обозначим конус в $S(\mu)$, состоящий из функций, каждая из которых не убывает, а через $K(\downarrow, \uparrow)$ обозначим конус в $S(\mu)$, состоящий из вогнутых функций $x: R_+ \rightarrow R_+$, каждая из которых удовлетворяет дополнительным условиям: $\lim_{t \rightarrow 0} x(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow 0} t^{-1}x(t) = 0$.

Теорема 1. Пусть фиксировано число $p \in (1, \infty)$ и зафиксирована весовая функция w такая, что

$$\int_1^\infty w^p(s)ds = \infty; \quad (1)$$

$$\forall t > 0 \text{ выполнено неравенство } \int_0^t w^p(s)ds < \infty. \quad (2)$$

Пусть оператор Q определен равенством

$$Qx(t) = \int_t^\infty x(\tau)d\tau.$$

Определим новую функцию v из равенства

$$\| \kappa(0, t)w | L^p \| \cdot \left\| \kappa(t, \infty) \frac{1}{v} | L^p \right\| \equiv 1 \quad (3)$$

(через $\kappa(D)$ обозначается характеристическая функция множества D .)

Тогда справедливы соотношения: оператор Q действует и ограничен в паре

$$Q: (L_v^p)_+ \rightarrow K(\downarrow) \cap L_w^p; \quad (4)$$

существует константа $c > 0$ такая, что $\forall u \in K(\downarrow) \cup L_w^p$ с $\|y|L_p^w\| = 1$ найдется функция $x \in L_v^p$ с $\|x|L_v^p\| = 1$, для которой при всех $t \in (0, \infty)$ выполнено неравенство

$$(Qx)(t) \geq cy(t). \quad (5)$$

Отметим, что условие (4) будет выполнено в силу классических оценок оператора Q в пространствах L_u^p (именно так и выбирался вес v в (3)) (см., например, [4, 10]). Для функции $y \in K(\downarrow) \cap L_p^w$ функция x в (5) строится конструктивно.

З а м е ч а н и е 1. Теорема 1 имеет полный аналог для конусов $K(\uparrow)$, $K(\varphi, \downarrow) = \{x: R_+ \rightarrow R_+ : \varphi(t)x(t)\downarrow\}$ и $K(\varphi, \uparrow) = \{x: R_+ \rightarrow R_+ : \varphi(t)x(t)\uparrow\}$. Требуется только вместо оператора Q рассматривать операторы

$$Px(t) = \int_0^t x(s)ds, \quad Q_\varphi x(t) = \frac{1}{\varphi(t)} \int_t^\infty x(s)ds,$$

$$P_\varphi x(t) = \frac{1}{\varphi(t)} \int_0^t x(s)ds.$$

Продемонстрируем примеры применения теоремы 1.

Теорема 2. Пусть $1 \leq p_0 < p_1 < \infty$ и заданы две весовые функции u, w , удовлетворяющие условиям (1) и (2).

Тогда справедливо соотношение

$$K(\downarrow) \cap L_u^{p_0} \neq K(\uparrow) \cap L_u^{p_1},$$

т.е. эти конусы не совпадают ни при каких весовых функциях, удовлетворяющих предположению теоремы.

Будем говорить, что оператор $T: S(\mu) \rightarrow S(\mu)$ сублинейный, если выполняются условия: $|T(x+y)(t)| \leq T|x|(t) + T|y|(t)$ и $|T(\lambda x)(t)| \leq \lambda |Tx|(t)$ ($\lambda \geq 0$).

Из теоремы 1 сразу же получим справедливость следующего факта.

Теорема 3. Пусть фиксировано число $p \in (1, \infty)$ и зафиксирована весовая функция w , удов-

летворяющая условиям (1), (2). Пусть Y – некоторое идеальное банахово пространство в $S(\mu)$.

Для того чтобы сублинейный оператор T действовал и был ограничен как оператор из $K(\downarrow) \cap L_w^p$ в Y , необходимо и достаточно, чтобы оператор суперпозиции TQ действовал и был ограничен как оператор из L_v^p в Y .

Используя технику оценок операторов $L: L_w^p \rightarrow Y$ (см., например, [2, 4, 11, 12]), из теоремы 3 можно получить различные результаты, посвященные оценкам операторов на конусе монотонных функций в пространствах Лебега.

Перейдем теперь к рассмотрению конуса $K(\downarrow, \uparrow)$. Для неотрицательных функций на R_+ определим два оператора

$$Q_1 x(t) = t \int_t^\infty x(s)ds; \quad P_1 x(t) = \int_0^t sx(s)ds.$$

С помощью простого интегрирования по частям легко показать, что если функция $x \in K(\downarrow, \uparrow)$ имеет абсолютно непрерывную первую производную, то справедливо представление

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t \left(\int_s^\infty z(\tau)d\tau \right) ds = \\ &= t \int_t^\infty z(s)ds + \int_0^t sz(s)ds = Q_1 z(t) + P_1 z(t), \end{aligned}$$

где $z(s)$ – неотрицательная функция. Можно положить $z(s) \equiv -x''(s)$.

Теорема 4. Пусть фиксировано число $p \in (1, \infty)$ и зафиксирована весовая функция w такая, что $\forall t \in R_+$ выполнены условия

$$\int_0^\infty \left(\min \left\{ 1, \frac{s}{t} \right\} \right)^p w^p(s)ds < \infty. \quad (6)$$

Рассмотрим конус $K(\downarrow, \uparrow) \cap L_w^p$.

Для всех $t > 0$ определим две новые весовые функции w_0, w_1 из равенств

$$\left\| \kappa(t, \infty) \frac{1}{w_0(s)} | L^p \right\| \cdot \left\| \kappa(0, t)sw(s) | L^p \right\| \equiv 1, \quad (7)$$

$$\left\| \kappa(0, t) \frac{s}{w_1(s)} | L^p \right\| \cdot \left\| \kappa(t, \infty)w(s) | L^p \right\| \equiv 1 \quad (8)$$

и положим

$$v(t) = \max \{ w_0(t), w_1(t) \}.$$

Тогда справедливы соотношения: сумма операторов $Q_1 + P_1$ действует и ограничена в паре:

$$(Q_1 + P_1): (L_v^p)_+ \rightarrow K(\downarrow, \uparrow) \cap L_w^p; \quad (9)$$

для того чтобы существовала константа $c > 0$ такая, что $\forall y \in K(\downarrow, \uparrow) \cap L_w^p$ с $\|y\|_{L_w^p} = 1$, найдется функция $x \in L_v^p$ с $\|x\|_{L_v^p} = 1$, для которой при всех $t \in (0, \infty)$ выполнено неравенство

$$((Q_1 + P_1)x)(t) \geq cy(t), \quad (10)$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\sup_t \left\{ \left(\left\| \kappa(0, t) \frac{s}{v(s)} \right\|_{L^p} + t \left\| \kappa(t, \infty) \frac{s}{v(s)} \right\|_{L^p} \right) \times \right. \\ \left. \times \left(\left\| \kappa(t, \theta) \frac{s}{t} w(s) \right\|_{L^p} + \left\| \kappa(0, t) w(s) \right\|_{L^p} \right) \right\} < \infty. \quad (11)$$

Условие (6) гарантирует принадлежность крайних функций $\min \left\{ 1, \frac{s}{t} \right\}$ конуса $K(\downarrow, \uparrow)$ пространству

L_w^p . Условие (7) дает необходимые и достаточные условия ограниченности оператора Q_1 как оператора из $L_{w_0}^p$ в L_w^p , а условие (8) дает необходимые и достаточные условия ограниченности оператора P_1 как оператора из $L_{w_1}^p$ в L_w^p . Поэтому при таком выборе функции v условие (9) будет выполнено всегда.

Условие (11) в теореме 4 есть просто возможность выполнения условия (10) для семейства

крайних функций $\min \left\{ 1, \frac{s}{t} \right\}$ конуса $K(\downarrow, \uparrow)$.

Заметим, что для функции $y \in K(\downarrow, \uparrow) \cap L_w^p$ функция x в (10) строится конструктивно.

Следует отметить также, что теорема 4 имеет аналог для конусов $K(\varphi, \psi) = \{x: R_+ \rightarrow R_+: x(t) \cdot \varphi \uparrow \& \psi(t) \cdot x(t) \downarrow\}$.

Условие (11) выполняется не всегда. Можно привести различные достаточные условия для выполнения (11). В частности, в степенной шкале, т.е. для $w(t) = t^\alpha$, условия (11) будут выполнены при $\alpha \in \left(-\frac{1}{p} - 1, -\frac{1}{p} \right)$.

Сейчас мы продемонстрируем применения теоремы 4.

Теорема 5. Пусть фиксировано число $p \in (1, \infty)$ и зафиксирована весовая функция w ,

удовлетворяющая (6). Пусть по функции v построены функции w_0, w_1, v , для которых выполнено условие (11). Пусть Y – некоторое идеальное банахово пространство в $S(\mu)$.

Для того чтобы сублинейный оператор T действовал и был ограничен как оператор из $K(\downarrow, \uparrow) \cap L_w^p$ в Y , необходимо и достаточно, чтобы оператор суперпозиции $T(Q_1 + P_1)$ действовал и был ограничен как оператор из L_v^p в Y .

Теперь мы переходим к теоремам экстраполяции для операторов, действующих в конусах. Для этого вам потребуются некоторые дополнительные построения.

Пусть X_0, X_1 – два идеальных пространства $X_0, X_1 \subset S(\mu)$.

Зафиксируем $0 < \theta < 1$. Новое идеальное пространство $X_0^\theta X_1^{1-\theta}$ (конструкция Кальдерона–Лозановского) состоит из тех $x \in S(\mu)$, для которых конечна норма

$$\|x\|_{X_0^\theta X_1^{1-\theta}} = \inf \{ \lambda > 0: |x(t)| \leq \lambda \cdot |x_0(t)|^\theta |x_1(t)|^{1-\theta} \} \\ \forall t \in \Omega; \|x_0\|_{X_0} \leq 1, \|x_1\|_{X_1} \leq 1 \}. \quad (12)$$

Пространство $X_0^\theta X_1^{1-\theta}$ введено А.П. Кальдероном [13] при изучении комплексного метода интерполяции.

Если K – некоторый конус в $S(\mu)$, то по аналогии с пространством $X_0^\theta X_1^{1-\theta}$ можно ввести новый конус $(K \cap X_0)^\theta (K \cap X_1)^{1-\theta}$, рассматривая разложения в (12) только по элементам конуса. Следующая теорема носит интерполяционный характер. Для конуса, состоящего из неотрицательных функций, она хорошо известна (см., например, [14, 15]).

Теорема 6. Пусть T – позитивный оператор, K_0, K_1 – два конуса в $S(\mu)_+$. Пусть в $S(\mu)$ задано четыре идеальных банаховых пространства X_0, X_1, Y_0, Y_1 . Пусть оператор T действует и ограничен как оператор $T: X_i \cap K_0 \rightarrow Y_i \cap K_1$ ($i = 0, 1$). Пусть фиксировано число $\theta \in (0, 1)$.

Тогда оператор T действует и ограничен как оператор $T: (K_0 \cap X_0)^\theta (K_0 \cap X_1)^{1-\theta} \rightarrow (K_1 \cap Y_0)^\theta (K_1 \cap Y_1)^{1-\theta}$.

З а м е ч а н и е 2. Как обычно бывает в теории интерполяции, для произвольного конуса K равенство $(K \cap L_{v_0}^1)^\theta (K \cap L_{v_1}^\infty)^{1-\theta} = K \cap ((L_{v_0}^1)^\theta (L_{v_1}^\infty)^{1-\theta})$ справедливо далеко не всегда даже для конуса $K(\downarrow)$.

Теорема 7. Пусть фиксировано число $p \in (1, \infty)$ и зафиксирована весовая функция w , удовлетворяющая условиям (1) и (2), по которой, согласно (3), построена функция v . Поло-

жим $\theta = \frac{1}{p}$. Пусть задан линейный позитивный оператор T , действующий и ограниченный в паре

$$T: K(\downarrow) \cap L_w^p \rightarrow L_w^p.$$

Тогда найдутся функции v_0, v_1, u_0, u_1 такие, что выполнены соотношения

$$v_0^\theta(t) \cdot v_1^{1-\theta}(t) \equiv v(t), \quad u_0^\theta(t) \cdot u_1^{1-\theta}(t) \equiv u(t); \quad (13)$$

оператор TQ действует и ограничен, если его рассматривать в парах:

$$TQ: L_{v_0}^1 \rightarrow L_{u_0}^1, \quad TQ: L_{v_1}^\infty \rightarrow L_{u_1}^\infty.$$

Объединение теорем 6 и 7 дает вариант теоремы экстраполяции для операторов на конусе $K(\downarrow)$.

Теорема 8. Пусть фиксировано число $p \in (1, \infty)$, зафиксирована весовая функция w , удовлетворяющая условию (6), по которой построены функции w_0, w_1, v , пусть выполнено условие

(11). Положим $\theta = \frac{1}{p}$. Пусть задан линейный позитивный оператор T , действующий и ограниченный в паре

$$T: K(\downarrow, \uparrow) \cap L_w^p \rightarrow L_w^p.$$

Тогда найдутся функции v_0, v_1, u_0, u_1 такие, что выполнены соотношения (13) и оператор $T(Q_1 + P_1)$ действует и ограничен, если его рассматривать в парах:

$$T(Q_1 + P_1): L_{v_0}^1 \rightarrow L_{u_0}^1, \quad T(Q_1 + P_1): L_{v_1}^\infty \rightarrow L_{u_1}^v.$$

Объединение теорем 6 и 7 дает вариант теоремы экстраполяции для операторов на конусе $K(\downarrow, \uparrow)$.

Работа была поддержана грантом Шведской Королевской АН для сотрудничества с Россией (проект 35160). Первый автор пользовался поддержкой Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05-01-00206).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sawyer E.T. // Stud. math. 1990. V. 96. P. 145–158.
2. Бережной Е.И. // Тр. Мат. ин-та РАН. 1993. Т. 204. С. 3–36.
3. Heinig H., Maligranda L. // Stud. math. 1995. V. 116. P. 133–165.
4. Kufner A., Persson L.-E. Weighted Inequalities of Hardy Type. Singapore: World Sci., 2003.
5. Коротков В.Б. Интегральные операторы. Новосибирск: Наука, 1983.
6. Garcia-Cuerva J., Rubio de Francia J. Weighted Norm Inequalities and Related Topics. Amsterdam: North Holland, 1985.
7. Бережной Е.И. // ДАН. 1995. Т. 344. № 6. С. 727–730.
8. Бережной Е.И., Малигранда Л. // ДАН. 2003. Т. 393. № 5. С. 583–586.
9. Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.
10. Maz'ja V.G. Sobolev Spaces. В.: Springer, 1985.
11. Бережной Е.И. // Тр. Маш. ин-та АН СССР. 1991. Т. 201. С. 26–42.
12. Bereznoi E.I. // Proc. AMS. 1999. Т. 127. № 1. P. 79–87.
13. Кальдерон А.П. // Математика. 1965. Т. 9. № 3. С. 56–129.
14. Бережной Е.И. В сб.: Качественные и приближенные методы исследования операторных уравнений. Ярославль: Ярослав. гос. ун-т. 1981. С. 3–12.
15. Maligranda L. Orlicz Spaces and Interpolation. Campinas, 1989.