Linnéuniversitetet
Kalmar Växjö

Självständigt arbete II, 15 hp

Sambandet mellan addition och subtraktion

Elevers uppfattning av relationen mellan de två räknesätten

Författare: Sofia Leo & Rebecka Åström
Handledare: Berit Roos Johansson
Examinator: Torsten Lindström
Termin: VT 2016
Ämne: Matematikdidaktik
Nivå: Avancerad nivå
Kurskod: 4GN04E

Sambandet mellan addition och subtraktion
Elevers uppfattning av relationen mellan de två räknesätten

The relation between addition and subtraction
Pupils' perception of the relationship between these arithmetic operations.

Abstrakt

Syftet med studien är att undersöka om och hur elever ser sambandet mellan addition och subtraktion och vilka matematiska strategier som eleverna använder vid räkneoperationer. Studien omfattar 82 elevdiagnoser och fyra gruppintervjuer med sammanlagt 12 elever i årskurs två och tre. Resultatet visar att eleverna kan se och använda sig av sambandet tidigare än vad de kan förklara hur och varför. Genom analysen blir det tydligt hur de två frågeställningarna hör ihop. De elever som ser och kan använda sig sambandet är också de med god taluppfattning som kan kombinera och förklara sina matematiska strategier.

Nyckelord

Addition, matematik, matematiska strategier, samband, subtraktion.

Sofia Leo & Rebecka Åström

Antal sidor 31

Innehåll

1 Inledning 1

2 Syfte och frågeställning 2

3 Teoretisk bakgrund 3
3.1 Taluppfattning 3
3.2 Matematiska principer 3
3.2.1 Kommutativa lagen 4
3.2.2 Associativa lagen 4
3.2.3 Kompensationsprincipen 4
3.2.4 Utfyllnadsmetoden 4
3.2.5 Borttagningsmetoden 4
3.2.6 Reversibilitetsprincipen 4
3.2.7 Övriga metoder 5
3.2.8 Svårigheter 5
3.3 Relationen mellan addition och subtraktion 6
3.4 Diagnoskonstruering 7

4 Metod 8
4.1 Urval 8
4.2 Datainsamlingsmetoder 8
4.2.1 Diagnos 8
4.2.2 Elevintervju 9
4.3 Genomförande 10
4.4 Etiska ställningstaganden 11
4.4.1 Validitet och reliabilitet 11

5 Resultat och analys 13
5.1 Diagnos 13
5.1.1 Del 1 – Bilda tal 13
5.1.2 Del 2 – Reversibla uppgifter 13
5.1.3 Del 3 – Tretermsuppgifter 15
5.1.4 Del 4 – Textuppgifter 16
5.1.5 Del 5 – Subtraktionsuppgifter med kontrollräkning 17
5.1.6 Sammanfattning av diagnosresultat 19
5.2 Elevintervju 19
5.2.1 Del 2 – Reversibla uppgifter 20
5.2.2 Del 3 – Tretermsuppgifter 21
5.2.3 Del 4 – Textuppgifter 22
5.2.4 Del 5 – Subtraktionsuppgifter med kontrollräkning 24
5.2.5 Sammanfattning av intervjuresultat 27

6 Diskussion 29
6.1 Metoddiskussion 29
6.1.1 Diagnos 29
6.1.2 Elevintervju 29
6.2 Resultatdiskussion 30
6.2.1 Frågeställning 1 – Sambandet mellan addition och subtraktion 30
6.2.2 Frågeställning 2 – Matematiska strategier 30
6.3 Slutsats och förslag till vidare forskning 31

Referenser 32

Bilagor I
Bilaga A Diagnos I
Bilaga B Manus för presentation av diagnos IV
Bilaga C Information till vårdnadshavare V
Bilaga D Intervjuguide VI

1 Inledning

“De fyra räknesättens egenskaper och samband samt användning i olika situationer” (Skolverket 2011:63) är en del av det centrala innehållet i läroplanen för elever i årskurs ett till tre. Subtraktion och addition är de två räknesätt som eleverna vanligtvis lär sig först och därför har vi valt att i denna studie fördjupa oss inom dessa räknesätt**.** Som blivande lärare kan vi ta hjälp av studien för att få kunskap om och hur elever använder olika strategier och ser olika samband mellan räknesätten. Det är en stor fördel att som lärare ha förståelse för hur elever löser matematiska uppgifter och vilka strategier de använder sig av för att kunna planera och genomföra matematikundervisningen och hjälpa eleverna framåt i sin utveckling.

Addition och subtraktion är reversibla eftersom de kan byta riktning, varje addition kan vändas till en subtraktion och tvärt om (Malmer 2002). “Subtraktion är motsatsen till addition, den “upphäver” resultatet av additionen” (McIntosh 2008:63). Ett exempel på detta är att 12-4=8 vilket gör att 4+8=12 och 8+4=12. Det underlättar räkneoperationerna om sambandet mellan addition och subtraktion synliggörs, därför bör det ske naturligt att se det nära sambandet mellan räknesätten (Malmer 2002).

Detta har vi kopplat till Petterssons och Wistedts (2013) åtta olika förmågor som elever behöver öva på för att bli bättre i matematik. En av förmågorna är ”flexibilitet och reversibilitet i tänkandet, det vill säga rörlighet i tänkande och förmågan att vända tankegång och skifta tankemodell” (Pettersson & Wistedt 2013:11). Författarna anser att matematik kan ses som en kreativ process när eleverna använder olika samband och regler för att komma fram till lösningarna på problemen. Elever vill ofta komma på smarta och enkla strategier för att effektivt komma fram till svaren. Detta kan de göra om de ser olika samband mellan räknesätten. Har eleverna förmågan att tänka flexibelt ger det dem en större möjlighet att själva fundera hur de på bästa sätt kan lösa ett problem (Pettersson & Wistedt 2013).

Genom att kunna tänka reversibelt innebär det att eleverna innehar kunskapen att använda sig av relationen mellan addition och subtraktion. Att kunna använda sig av sambandet mellan de två räknesätten är något som eleverna kan ha nytta av i vardagen när de till exempel får tillbaka växel i affären, eller som hjälp vid kontrollräkning av olika matematikuppgifter. Vi anser därför att det är viktigt att eleverna tidigt lär sig att använda och se sambanden mellan räknesätten.

I den här studien är det fokus på sambandet mellan de två räknesätt addition och subtraktion. Det undersöks också vilka strategier eleverna använder sig av för att lösa matematiska uppgifter med addition och subtraktion. Genom diagnos och intervjuer med elever i årskurs två och tre undersöks det om eleverna ser, använder och kan förklara sambandet mellan de två räknesätten och vilka matematiska strategier de använder.

2 Syfte och frågeställning

Syftet är att undersöka om och hur elever i årskurs två och tre i fyra klasser ser, använder och förklarar sambandet mellan addition och subtraktion. Det kommer även undersökas om och hur eleverna kan använda matematiska strategier till hjälp i räkneoperationer. Utifrån syftet ställs följande frågeställningar:

- Hur visar eleverna om de ser sambandet mellan räknesätten addition och subtraktion?
- Vilka matematiska strategier använder sig eleverna av för att genomföra räkneoperationerna?

3 Teoretisk bakgrund

I det här avsnittet presenteras tidigare forskning kring taluppfattning, matematiska principer, relationen mellan addition och subtraktion samt diagnoskonstruering.

3.1 Taluppfattning

Barn lär sig att räkna på olika sätt, men ofta sker det stegvis när de lär sig olika metoder allt eftersom de blir äldre (Ahlberg 2001). De får en större kunskap och fler erfarenheter om tal och deras egenskaper. Många barn lär sig först räkneramsan utan att ha förståelse om de enskilda siffrorna. Därefter ser barnen de olika siffrorna, men kan fortfarande inte se sambandet till ordningstal och antal. De kan sedan koppla de olika siffrorna till antal och kan därefter se sambanden mellan olika delar och helheter. På liknande sätt lär sig många barn att först räkna additionsuppgifter med varje tal för sig och då ofta med hjälp av fingrarna. Här finns flera olika strategier som de kan använda sig av, till exempel räkna uppåt från det första talet eller från det största talet. De kan sedan använda denna kunskap för att ta till sig talfakta och automatisera räknandet av tal som till exempel 2+4=6. Även vid subtraktion använder yngre barn ofta fingrarna till hjälp. Vid en uppgift som 6-4=2 tar de upp sex fingrar och viker ner fyra för att då se att två fingrar är kvar. De tar då bort de tal som subtraheras. På samma sätt kan de använda fingrarna för att räkna uppåt om de ska jämföra talen 6 och 4. De börjar då på fyra fingrar och räknar upp till sex och ser hur många fingrar de lagt till (Ahlberg 2001).

För att klara av att lösa matematiska uppgifter är det viktigt att eleverna har en grundläggande taluppfattning (Löwing 2008). Eleverna behöver ha så god förståelse för talen och deras egenskaper att de kan räkna med flyt. Löwing jämför det med läsning och menar att för en god läsare sker avkodning av orden så fort att läsaren inte är medveten om och behöver tänka på hur den gör. På samma sätt behöver elever öva upp sin taluppfattning för att kunna räkna med flyt för att förenkla uträkningen. Det kan exempelvis vara att kunna dela upp tal för att förenkla räkneoperationer som 98+3=101. Har eleven en god taluppfattning ser hon att det är enklare att dela upp talet tre i 2+1. Hon räknar sedan 98+2+1= 100+1=101. Detta sker utan att eleven behöver reflektera över hur den gör (Löwing 2008). Detta kan vara en förklaring till att många har svårt att förklara hur de gör när de räknar. Ofta svarar eleverna att de "bara räknat" utan att kunna säga hur de faktiskt har gått till väga (Canobi 2005). Vid intervjuer med elever kan det ibland behövas ledande frågor för att få veta hur de har tänkt. Det kan exempelvis vara "vilket tal börjar du räkna på?" (Canobi 2005).

Eleverna som har en förståelse för sambandet mellan delarna och helheten kan se det mer naturligt att även förstå sambandet mellan addition och subtraktion (Malmer 1990). Det är även viktigt att eleverna har förståelse för vad likhetstecknet betyder, att det inte bara "blir", som i två plus tre blir fem. Istället måste eleverna lära sig att det står för "lika med". På så sätt kan eleverna se att de två delarna två och tre är lika mycket som fem. De får då en större förståelse för hur delarna och helheten hör ihop, vilket kan hjälpa dem när de lär sig sambandet mellan subtraktion och addition (Malmer 1990).

3.2 Matematiska principer

Vid beräkningar av matematiska uppgifter använder vi ofta oss av olika strategier och tar hjälp av matematiska principer och lagar. Detta görs ofta utan vidare reflektion. I detta avsnitt beskrivs några olika principer, lagar och strategier. Avslutningsvis kommer även en del svårigheter med dessa strategier att nämnas.

3.2.1 Kommutativa lagen

Den kommutativa lagen för addition innebär att a+b är detsamma som b+a (McIntosh 2008). Det betyder att vid addition av två tal har det ingen betydelse vilket tal eleven börjar räkna med. Eleven kan byta plats på talen för att få en enklare uträkning men ändå få samma korrekta svar. Detta kan exempelvis användas för att börja räkna med det högsta talet, något som många uppfattar som enklare (McIntosh 2008). Även Sollervall (2007) beskriver att addition är ett kommutativt räknesätt då det går att byta plats på termerna och få samma summa oberoende på vilken term som är utgångspunkten. Den kommutativa lagen gäller ej för subtraktion (McIntosh 2008).

3.2.2 Associativa lagen

Den associativa lagen för addition innebär att a+(b+c) = (a+b)+c (McIntosh 2008). Att addition är associativ innebär att när fler än två termer läggs ihop blir det fortfarande samma summa oavsett ordning (Sollervall 2007). Har elever additionsuppgifter med tre eller fler termer kan de välja att räkna ut de talen de tycker är enklast först och sedan addera resterande tal, oberoende på vilken ordning de kommer i. Den associativa lagen gäller ej för subtraktion (McIntosh 2008).

3.2.3 Kompensationsprincipen

En strategi eleverna kan använda sig av är att kompensera, det vill säga att "79+26 kan lösas som 80+26-1. 79 avrundas uppåt till 80, detta kompenseras sedan genom att subtrahera 1 från resultatet, man kan också kompensera genom att räkna 80+25" (McIntosh 2008:117).

3.2.4 Utfyllnadsmetoden

Utfyllnadsmetoden innebär att om eleverna har uppgiften 12-9 utgår de ifrån 9 och räknar uppåt till 12 (Sollervall 2007). Metoden kan tillämpas med hjälp av tallinjen för att fylla ut mellanrummet mellan talen och därmed komma fram till svaret (Sollervall 2007). Denna metod kan även ses som subtraktion med addition (Peters, De Smedt, Torbyens, Ghesquiére & Verschaffel 2011). För att kunna räkna ut svaret på subtraktionsuppgiften använder eleven sig av addition. McIntosh (2008) beskriver en teknik där eleverna omvandlar subtraktion till addition, vilket har samma innebörd som utfyllnadsmetoden (Sollervall 2007) och subtraktion med addition (Peters m.fl. 2011). McIntosh förklarar detta med att uppgifter av denna typ, till exempel 72-67, kan ses som både additions- och subtraktionsuppgifter beroende på hur man väljer att se dem. Eleven kan uppleva att uppgiften ska lösas med subtraktion, men i många fall är det mer effektivt att använda addition. Det är då viktigt att eleverna har kunskap om relationen mellan räknesätten för att kunna skifta mellan dem (McIntosh 2008). Fortsättningsvis kommer begreppet utfyllnadsmetoden att användas och i detta inkluderas även begreppet subtraktion med addition.

3.2.5 Borttagningsmetoden

Borttagningsmetoden är en strategi där eleverna endast använder sig av subtraktion och räknar ner 9 steg från 12 vid uppgiften 12-9 (Sollervall (2007), vilket har samma innebörd som direkt subtraktion (Peters m.fl. 2011). Borttagningsmetoden kan förslagsvis tillämpas genom att gå tillbaka på tallinjen (Sollervall 2007). I fortsättningen används begreppet borttagningsmetoden som då inkluderar direkt subtraktion.

3.2.6 Reversibilitetsprincipen

Reversibilitetsprincipen ser till sambandet mellan addition och subtraktion. Det innebär att 2+3=5 och 5-2=3 (Canobi 2005). Att addition och subtraktion är reversibla innebär att de kan ändra riktning (Malmer 2002). Elever kan då ta hjälp av reversibilitetsprincipen när de räknar ut uppgifter. Det hör ihop med utfyllnadsmetoden där eleven ”vänder på” talen för att till exempel göra en subtraktionsuppgift till en additionsuppgift (Sollervall 2007).

3.2.7 Övriga metoder

Det finns fler metoder att använda vid addition och subtraktion. Vid addition med tvåsiffriga tal är det till exempel vanligt att elever använder sig av strategier där de adderar ental och tiotal för sig. Detta exemplifierar McIntosh (2008) genom: 64+28 med uträkningen 60+20=80 och sedan 4+8=12 för att till slut addera 80+12=92.

Det är även vanligt att eleverna successivt arbetar sig igenom uppgiften genom att utgå från ett av talen och lägga till eller dra ifrån det andra talet. Det kan till exempel vara om eleven har 64+28 börjar denne med uträkningen med tiotalen 64+20=84 och sedan 84+8=92. Eleven kan också börja med entalen först 64+8=72 och sedan 72+20=94 (McIntosh 2008).

En strategi många barn använder när de börjar räkna är fingerräkning. De räknar ett steg i taget ofta med hjälp av fingrarna (Ahlberg 2001). Att räkna med ett steg i taget både vid addition och subtraktion ”är effektivt och säkert upp till högst 3 steg, därefter uppstår lätt felräkningar” (McIntosh 2008:95). Det är vanligt att barn som använder denna strategi räknar fel på ett tal för mycket eller för lite då de börjar räkna på fel tal.

Många elever lär sig tidigt ”dubblor” (McIntosh 2008). De vet att till exempel 2+2=4, 4+4=8. Detta kan vara till hjälp både vid addition och vid subtraktion.

En teknik som eleverna ofta utgår ifrån är ”tiokamrater” (McIntosh 2008, Sollervall 2007). De lär sig vilka två tal som tillsammans är lika med tio, till exempel 1+9, 2+8 och så vidare. När eleverna behärskar att räkna med tiokamraterna kan de sedan använda det och utgå från 10 när de beräknar högre tal. Eleverna delar då upp talen för att gå via tio och fortsätter sedan uträkningen därifrån. Det kan till exempel vara vid additionsuppgiften 9+3. De tar då 9+1=10 och följt av 10+2=12. På samma sätt fungerar det vid subtraktion, till exempel vid 14-5. Eleven räknar då först 14-4=10 och sedan 10-1=9 (McIntosh 2008).

Algoritmer introduceras som en strategi för att beräkna talen. Det är ”en bestämd procedur eller uppsättning regler för att utföra en uppgift” (McIntosh 2008:124). För att elever ska kunna använda sig av algoritmer behöver de bland annat ha kunskap om positionssystemet och tabeller och ha en förståelse för hur algoritmen går till (McIntosh 2008).

3.2.8 Svårigheter

Barn behöver lära sig flera olika strategier och kunna växla mellan dem för att bli bättre inom matematiken (Ahlberg 2001). Vid subtraktion kan det till exempel vara att se när det är mest effektivt att räkna neråt och ta bort tal, som till exempel vid 72-4=68. De tar då bort 4 från 72. Det kan också vara att se när det är bättre att räkna uppåt och istället lägga till tal, exempelvis vid 72-68=4. Här utgår barnet från 68 och räknar uppåt till 72 för att se vad skillnaden mellan talen är. Om barnet enbart lärt sig en strategi och till exempel alltid använder sig av borttagningsmetoden vid subtraktion kan det bli svårt att räkna tal som detta (Ahlberg 2001).

Vid huvudräkning med tvåsiffriga tal kan eleverna få svårt att hålla hela uträkningen i huvudet och de olika stegen, vilket hör ihop med belastning av arbetsminnet. “För många elever kan bristen på en bred och flexibel uppsättning huvudräkningsstrategier skapa problem” (McIntosh 2008:117). Många elever använder sig av samma strategi vid huvudräkning som vid skriftlig algoritm, vilket kan leda till flera misstag. De elever som har svårigheter med skriftliga algoritmer gör ofta samma misstag vid huvudräkning, dessutom tillkommer ofta fler fel då kan vara svårare att hålla allt i huvudet (McIntosh 2008).

Subtraktionsalgoritmen är ofta svårare att hantera för elever än additionsalgoritmen då subtraktion är mer komplext och beskriver flera situationer såsom att ta bort, att jämföra och att se skillnaden (McIntosh 2008). Vid addition är det endast en situation som beskrivs: att lägga ihop. Dessutom kan eleverna vid en addition vända och vrida på talen och addera dem i den ordning de föredrar, vilket inte går vid subtraktion då talen måste stå på ett visst sätt. Ett vanligt misstag som elever gör vid subtraktionsalgoritmen är att de blandar ihop reglerna för subtraktion med reglerna för addition. Två andra misstag som är relativt vanligt förekommande är att eleverna subtraherar det minsta talet från det största och att de inte märker när svaret är orimligt (McIntosh 2008). Ytterligare en svårighet elever kan stöta på är tiotalsövergångar vid subtraktion. Det kan ge dem problem om de alltid räknar med en viss strategi som sedan inte fungerar vid tiotalsövergångar (Malmer 2002).

Elever kan även få problem med de ”signalord” som finns i textuppgifter (Malmer 2002). Vissa ord tolkas ofta som att en addition skall göras, till exempel ”*äldre, längre, dyrare, tyngre*” (Malmer 2002:193). Medan andra ord ofta tolkas som subtraktion, så som ”*yngre, kortare, billigare, lättare”* (Malmer 2002:193). Detta kan ge eleverna problem om de enbart ser till signalorden utan att läsa uppgiften. Det kan vara vid uppgifter som *Alice är 145 cm lång och 5 cm kortare än Fredrik. Hur lång är Fredrik?* Ser eleven enbart till ordet *kortare* kan det göra att de räknar 145-5=140 istället för 145+5=150.

3.3 Relationen mellan addition och subtraktion

Mycket forskning har gjorts på elevers förståelse om sambandet mellan addition och subtraktion. Ett resultat i Canobis (2005) forskning är vikten av att eleverna ser sambandet mellan de två räknesätten för att förstå hur delar adderas till en helhet. Forskaren ser till hur barn förstår några viktiga matematiska principer, bland annat kommutativa lagen och reversibilitetsprincipen. Det är stora individuella skillnader i barns förståelse och förmåga att se sambanden mellan räknesätten och kunna använda sig av matematiska regler och principer i uträkningar. Barn kan tidigare använda sig av principerna när de räknar än vad de kan förklara hur och varför de räknar på det sättet. De får ofta en tidigare förståelse för och kan använda den kommutativa lagen än reversibilitetspricipen (Canobi 2005).

Även Peters, De Smedt, Torbyens, Ghesquiére och Verschaffel (2011) har gjort en studie om relationen mellan räknesätten. De var på två skolor i Belgien för att testa elever i årskurs tre till sex. Forskarna ville ta reda på om eleverna löser subtraktionsuppgifter med hjälp av addition till skillnad från direkt subtraktion. Resultatet av deras tester visar att eleverna ibland använder sig av subtraktion med addition när de löser ensiffriga subtraktioner. De byter mellan subtraktion med addition och direkt subtraktion beroende på storleken av talet som ska subtraheras, det vill säga subtrahenden. Ett exempel på när många elever använder sig av subtraktion med addition är vid uppgiften 11-9, då beror det på talet 9 som är subtrahend. Däremot såg författarna att barn till skillnad från vuxna, som de har undersökt tidigare, inte flexibelt kunde byta mellan subtraktion med addition och direkt subtraktion vid högre tal. De vuxna hade enklare för att byta mellan räknesätten för att förenkla uträkningar med tal från 10 och uppåt både vid subtraktion och vid addition (Peters, m.fl. 2011).

Ahlberg (1992) skriver om Piaget som menar att kunskap består av mentala strukturer och en viktig del är att kunna tänka reversibelt, det vill säga att kunna tänka omvänt. Piaget uttrycker att "addition is a reversible operation" (Piaget 1952:189). För att förstå reversibilitet behöver barn ha kunskap om att när man delar en helhet i två delar är de fortfarande samma helhet (Piaget, 1952). "Det är endast när barn förmår utföra reversibla transformationer (operationer), som de har förutsättningar att tillägna sig matematisk förståelse" (Ahlberg 1992:40). Även Donaldson poängterar att det enligt Piaget är förmågan att i sitt tänkande kunna använda sig av reversibilitetsprincipen ett av de viktigaste tecknen på att barn "nått det konkreta operationella tänkandets stadium" (Donaldson 1978:57).

3.4 Diagnoskonstruering

Det kan vara missvisande att använda sig av ensiffriga tal i studier som ska testa elevernas förståelse för relationen mellan räknesätten (Canobi 2005). Det finns risk att det testar deras beräkningsmetoder istället för om de förstår och ser sambanden. Om eleverna ser sambanden mellan subtraktion och addition borde de kunna använda sig av de matematiska principerna även på tal som är okända för dem (Canobi 2005).

Canobi (2005) använder sig av olika typer av uppgifter för att se elevernas förståelse för addition och subtraktion. Hon använder sig bland annat av tretermsproblem, till exempel 12+4-4=12. Detta visar om eleverna har förståelse för talen och ser att om man utgår från ett tal, lägger till ett annat tal och sedan drar bort det talet man nyss adderat så har man samma tal som man började med (Canobi 2005). Det visar på hur en subtraktion motverkar en addition (McIntosh 2008). Elever har ofta lättare att räkna ut denna typ av uppgifter än att de kan förstå reversibilitetsprincipen och kunna förklara hur de räknat (Canobi 2005).

Peters med flera (2011) använde sig av olika addition- och subtraktionsuppgifter som kompletterar varandra. Dessa uppgifter testade om eleverna skulle kunna se ett mönster och därmed se svaret utan att räkna uppgiften steg för steg. Det kan till exempel vara uppgifter som 12-9=x och därefter 9+x=12 eller 12-3=x (Peters, m.fl. 2011). Canobi (2005) har använt sig av liknande uppgifter till exempel 2+5=7, 7-2=5. Detta för att se om eleverna kan använda sig av reversibilitetsprincipen och se att additionsuppgifter kan vändas till en subtraktion och tvärt om. Hon hade även både additions- och subtraktionsuppgifter som inte relaterade till dessa strategier (Canobi 2005).

Peters med flera (2011) nämner också att många undersökningar som har gjorts för att ta reda på vilka strategier människor använder ofta låter testpersonen muntligt förklarar sin strategi. De upplever dock en svårighet med dessa muntliga undersökningar då det kan vara svårt för testpersonen att förklara sin tankegång. Testpersonen förenklar därför sin förklaring genom att exempelvis säga att hon använt sig av direkt subtraktion eftersom det är en subtraktionsuppgift. En annan förklaring är att testpersonen anser att tankegången inte är som hon borde göra eller inte får göra och därför förklarar på ett sätt som hon tror är det rätta (Peters, m.fl. 2011).

4 Metod

I det här avsnittet presenteras urval av elever samt hur undersökningen har genomförts vid diagnos och intervju. Avslutningsvis redogörs för etiska ställningstaganden samt begreppen validitet och reliabilitet.

4.1 Urval

Ett flerstegsurval gjordes för att få svar på forskningsfrågorna (Denscombe 2009). Två skolor valdes ut till undersökningen. Urvalet av dessa skolor grundade sig på att vi har haft verksamhetsförlagd utbildning (VFU) där. Dock har ett medvetet val gjorts att inte genomföra diagnosen i de klasser vi varit i för att förbli opartiska. Fyra klasser valdes ut att göra diagnosen: en årskurs två och en årskurs tre på de två skolorna. Sammanlagt 82 elever genomförde diagnosen, 39 i årskurs två och 43 i årskurs tre. Därefter valdes tre elever i varje klass ut till en gruppintervju, vilket sammanlagt blev tolv elever. Detta skulle kunna ses som ett icke-sannolikhetsurval, det vill säga att det är inte ”ett urval som utgör ett *representativt* tvärsnitt av hela populationen” (Denscombe 2009:33). Undersökningen är utformad på detta sätt då det inte fanns möjlighet att ha med tillräckligt många elever för att ett sannolikhetsurval skulle kunna genomföras. Däremot har två årskurser valts för att jämföra dem och se om några likheter eller skillnader fanns att urskilja i resultaten. Dock gjordes ett val att inte ha med någon klass i årskurs ett i undersökningen då samma diagnos gjordes i de olika klasserna. Diagnosen bedömdes därför bli för svår för eleverna i årskurs ett. En medvetenhet finns om att vissa uppgifter är svårare för dem i årskurs två och att det även skiljer sig på individnivå. Urvalet av elever till intervjun gjordes subjektivt utefter elevernas svar på diagnosen och även i samråd med klassläraren. Vid subjektiva urval använder forskaren tidigare kunskap om personerna som är med i undersökningen och plockar ut dem som de tror ger svar på forskningsfrågorna (Denscombe 2009). Diagnosen har därför två syften: dels ger den en övergripande syn på hur eleverna använder sig av subtraktion och addition, dels är den en viktig del i urvalsprocessen till intervjuerna. Efter att eleverna gjort diagnosen analyserades deras svar och därefter valdes eleverna medvetet ut till intervjun. Urvalet av eleverna baserades på deras val av metod och svar på frågorna som upplevdes representera stor del av gruppen och även några elever vars strategier sticker ut ur mängden.

4.2 Datainsamlingsmetoder

Till undersökningen användes en diagnos och intervjuer av elever. Diagnosen var utformad med olika uppgifter som visade om eleverna kunde se sambandet mellan addition och subtraktion. I vissa uppgifter uppmärksammades vilka strategier och metoder eleverna använde. Intervjuerna gjordes för att höra elevernas tankegångar när de förklarade hur de gick tillväga och varför de gjorde på det sättet för att lösa uppgifterna.

4.2.1 Diagnos

Vid konstrueringen av diagnosen (se Bilaga A) togs hjälp av tidigare forskning och undersökningar och hur de lagt upp liknande studier. Därefter valdes olika typer av uppgifter som skulle kunna visa om eleverna kan använda sig av sambandet mellan addition och subtraktion.

I den första delen fick eleverna tre tal och skulle bilda egna uppgifter av dem med både subtraktion och addition. Den var tänkt att vara en mer öppen uppgift där eleverna själva kunde visa sina kunskaper. I denna del uppmärksammades hur och i vilken ordning eleverna skrev talen och om de varierade mellan de två räknesätten.

Den andra delen av diagnosen bestod av uppgifter som är reversibla, till exempel 16-7=9, 16-9=7 och 7+9=16. Dessa var med för att se om eleverna kunde se ett mönster mellan uppgifterna. 16-7 var exempel på en uppgift som var något lättare och som det förväntades att eleverna skulle kunna räkna ut även om de inte såg sambandet mellan uppgifterna. För att testa om eleverna kunde se mönstret valdes därför att även ha med uppgifter med högre tal som eleverna troligtvis skulle ha svårare att lösa om de enbart räknade Dessa uppgifter hade eleverna stor hjälp av om de kunde se att talen var reversibla (jfr. Malmer 2002, Canobi 2005).

I diagnosen gjordes även ett val att ha med tretermsuppgifter där eleverna fick uppgifter som till exempel 12+7-7=12. Uppgifterna var konstruerade utifrån Canobis (2005) exempel. En anledning till att uppgifter av detta slag fanns med var för att testa om eleverna såg att de två sista termerna tog ut varandra. Detta gjordes för att se om de såg uppgiften i sin helhet eller om de stegvis tog tal för tal. Det vill säga om eleverna såg att en subtraktion upphäver en addition (McIntosh 2008). Även här fanns det svårare uppgifter och uppgifter där termerna inte tog ut varandra för att kontrollera att eleverna verkligen såg sambandet mellan talen och även kunde se när uppgifter inte följde mönstret.

I diagnosen fanns även textuppgifter där eleverna själva fick avgöra vilket räknesätt de skulle använda. Dock fanns medvetenhet om att god läsförståelse var av vikt vid dessa uppgifter och därför erbjöds läshjälp. I dessa uppgifter undersöktes vilka strategier eleverna använde sig av för att komma fram till svaret, bland annat om och hur de delade upp talen eller om de använde sig av utfyllnadsmetoden och borttagningsmetoden (Sollervall 2007). Läsförståelseuppgifterna har olika signalord och formuleringar för att se om det påverkar hur eleverna räknar ut uppgifterna. Ord och formuleringar som användes var: hur länge dröjer det, mindre, mer, hur mycket fattas och hur mycket hade hon förut. De flesta av dessa uppgifter kan ses som subtraktionsuppgifter, men man kan även använda addition för att komma fram till svaren.

Att kontrollräkna subtraktionsuppgifter med addition fanns även med i diagnosen. Det var tänkt som en utmaning för att se om eleverna själva kunde tänka ut hur de skulle gå tillväga. Uppgiften är till för att se om eleverna kan se att subtraktion och addition är motsatser till varandra (jfr. McIntosh 2008).

4.2.2 Elevintervju

I de uppföljande intervjuerna var målet att ta reda på om eleverna även kan förklara hur de tänkt när de löste uppgifterna och om de kan se och förklara sambandet mellan räknesätten. Intervju valdes eftersom det kan vara svårt att utläsa elevernas metoder i diagnosen. Intervjuerna skedde i grupper med tre elever som alla gick i samma klass. Både elever och vårdnadshavare har fått godkänna att eleven fick delta i intervjun som spelades in. Det var viktigt att eleverna samtycker till intervjun och att de var medvetna om vad resultatet användes till (Denscombe 2009). Intervjuerna var seminstrukturerade, vilket innebär att färdiga frågor och uppgifter från diagnosen valts ut, men att vi var flexibla och lät eleverna förklara hur de tänkt och ställde följdfrågor till deras svar (Denscombe 2009). Många elever kan ha svårt att svara på hur de tänkte, de kan till exempel svara att de räknade, eller att de bara visste svaret. Då kan intervjuaren ställa följdfrågor som exempelvis “Vilket tal började du räkna på?” (Canobi 2005).

Gruppintervju valdes istället för enskilda intervjuer, då det fanns flera fördelar med att intervjua fler elever samtidigt. Det sparade tid, vilket gjorde att fler elever kunde intervjuas än vid enskilda intervjuer. Det kan också underlätta då en del elever kan tycka att det är jobbigt att prata med människor de inte känner. Om de har två klasskamrater med sig skulle det förhoppningsvis göra att de kände sig mer bekväma i situationen och hade lättare för att prata och förklara sina tankegångar. En stor fördel med gruppintervjuerna var att eleverna kunde diskutera med varandra och höra varandras förklaringar. Det gav dem tillfälle att djupare gå in på hur de tänkt och jämföra med varandra. “Gruppintervjun bygger i denna bemärkelse på gruppdynamik” (Denscombe 2009:237). Intervjuaren använder det sociala samspelet mellan eleverna för att få dem delaktiga och engagerade i diskussionen.

4.3 Genomförande

Med hjälp av forskning kring relationen mellan addition och subtraktion och även olika matematiska lagar och principer, konstruerades en diagnos (se Bilaga A). Diagnosen användes sedan för att få svar på forskningsfrågorna.

Datainsamlingen gjordes i fyra olika klasser på två skolor, en årskurs två och en årskurs tre på båda skolorna. Först kontaktades fyra olika klasslärare och som tillfrågades om de ville låta deras klass vara med i undersökningen. Alla fyra lärarna svarade att de gärna ställde upp. Lärarna fick diagnosen för att de skulle se om de kände att den fungerade i klassen. Därefter genofördes diagnosen i klasserna. Ett manus var förberett (se Bilaga B) med stödord och meningar som vi höll oss till vid presentationen av diagnosen för eleverna. Detta för att ge eleverna i de olika klasserna så likvärdig information om diagnosen som möjligt. Vi var tydliga med att diagnosen gjordes i forskningssyfte och att det inte var något som eleverna blev bedömda på.

Efter att diagnosen genomförts i de olika klasserna rättades de och resultatet gicks igenom. Resultatet sammanställdes i olika tabeller för att få en överblick. Den ena tabellen visade hur många rätt varje enskild elev fått på de olika uppgifterna. Den andra tabellen var på klassnivå där de olika svaren och även vilka felsvar eleverna skrivit sammanställdes. En tredje tabell gjordes för att visa hur många elever i de två årskurserna som räknat rätt på de olika uppgifterna. Detta visades även i procent för att tydliggöra hur många som svarat rätt. Denna tabell redovisas i resultatdelen.

Därefter valdes några elever i varje klass till intervju. Planen var att intervjua tre elever i varje klass. Ett brev skrevs till vårdnadshavarna (se Bilaga C) där de skulle godkänna om deras barn fick vara med vid intervjun. Eftersom vi anade att alla elever inte skulle lämna tillbaka breven valdes fyra elever i varje klass som fick hem breven. I en av klasserna fick alla eleverna hem breven och därefter valdes elever till intervju från dem som hade svarat att de fick delta. Detta gjorde att tre elever i varje klass deltog i intervjun. Några elever hade inte med breven, men vårdnadshavarna och eleverna gav muntligt godkännande att de fick vara med i undersökningen.

Till intervjun förbereddes en intervjuguide (se Bilaga D). Intervjuerna spelades in, vilket eleverna var medvetna om. Olika frågor ställdes till de olika klasserna, beroende på deras resultat i diagnosen, men de flesta frågorna var lika. Uppgifter från diagnosen valdes ut och eleverna fick fundera på hur de räknade och sedan förklara för oss.

Eleverna fick inte se deras egna svar på diagnosen utan fick fundera på hur de tänkte vid intervjutillfället. Det gjorde att en del elever inte svarade på samma sätt som vid diagnosen, men de flesta tänkte ungefär lika och kom oftast fram till samma svar. Några uppgifter valdes från varje del av diagnosen och alla eleverna fick svara på minst en uppgift från varje del. Efter intervjuerna transkriberades allt som sagts. Därefter gicks transkriptionerna noggrant igenom för att analysera elevernas olika strategier och mönster. Detta sammanställdes sedan i tabeller som användes för att skriva resultatet.

4.4 Etiska ställningstaganden

Vid undersökningar som denna är det viktigt att ta hänsyn till de fyra forskningsetiska principerna. I enlighet med konfidentialitetskravet ska samtliga personuppgifter behandlas varsamt (Vetenskapsrådet 2002). Det handlar om "att skydda deltagarnas intressen" (Denscombe 2009:195). Deltagarna i undersökningen ska kunna känna att de kan vara med utan att det kommer påverka dem negativt och att deras personliga resultat sprids (Denscombe 2009). För att samtliga personer som medverkat ska förbli anonyma nämns inga namn på elever, lärare eller skolor. Den enda gången namn användes var på diagnoserna och detta enbart för att veta vilka elever som skulle intervjuas. Detta finns dock inte med i studien, där eleverna istället benämnas som Elev 1, Elev 2 och så vidare.

Informationskravet innebär att forskaren måste vara tydlig med vad studien undersöker och vad den kommer användas till (Vetenskapsrådet 2002). "Forskare ska undvika falska förespeglingar och orimliga framställningar" (Denscombe 2009:196). Vi var tydliga och berättade för eleverna att undersökningen såg till hur de räknade addition och subtraktion och vad resultatet skulle användas till. Däremot gicks det inte in på detalj vad det var fokus på, då det skulle kunna påverka resultatet på diagnoserna och intervjuerna. Visste eleverna att det var sambandet mellan räknesätten som skulle undersökas fanns det en chans att de skulle tänka på det och inte beräknar uppgifterna som de brukar utan som de tror att vi ville se.

Samtyckeskravet belyser även att deltagarna ska godkänna sitt medverkande och vid behov behövs även vårdnadshavares godkännande (Vetenskapsrådet 2002). Att "deltagarna ska ge informerat samtycke" (Denscombe 2009:197) var en viktig del vid arbetet med diagnoser och intervjuer av barn. Diagnosen användes mer övergripande och pekade inte ut någon enskild elev. Därför bedömdes att det räckte med att läraren gav samtycke till deltagandet. Om någon elev valde att inte vara med behövde de förstås inte delta. Vid intervjun, som spelades in, hade både eleverna och deras vårdnadshavares godkänt att de fick vara med. Brev hade tidigare lämnats ut till elever och vårdnadshavare där undersökningen beskrevs och där de fick skriva under att eleven fick vara med vid intervjuerna. Några svarade även muntligt.

Den fjärde principen är nyttjandekravet som innebär att insamlad data enbart används till denna studie (Vetenskapsrådet 2002). Allt material som har samlats in nyttjas endast för att ge svar på studiens forskningsfrågor.

4.4.1 Validitet och reliabilitet

Validitet innebär huruvida mätinstrumentet, som i den här undersökningen är diagnosen och intervjun, mäter de kunskaper som det är tänkt ska mätas (Gustavsson, Måhl och Sundblad 2012). Det vill säga om det kan utläsas om eleverna faktiskt kan se och använda sig av sambandet mellan addition och subtraktion. För att denna undersökning ska vara så valid som möjligt finns det forskning representerad som stödjer valet av uppgifterna i diagnosen samt i intervjun. Reliabilitet innebär hur tillförlitlig bedömningen är, det vill säga om bedömningen är reliabel bedöms alla diagnoser lika (Gustavsson, m.fl. 2012). Det betyder att om andra forskare skulle utgå från det empiriska materialet skulle resultatet bli detsamma.

5 Resultat och analys

I detta avsnitt redogörs för resultat och analys först av diagnosen och sedan intervjuerna. De båda delarna avslutas med en sammanfattning kopplat till forskningsfrågorna.

5.1 Diagnos

Resultatet presenteras i text och i tabeller. Tabellerna är uppdelade i tre grupper. Den första gruppen består av alla 82 elever som gjorde diagnosen. Den andra gruppen är de 39 elever som går i årskurs två och den tredje gruppen är de 43 elever som går i årskurs tre. Tabellerna visar hur många i varje grupp som svarat rätt på de olika uppgifterna, detta visas även i procent. Ett undantag finns i tabell 4, som istället visar hur många elever som korrekt kontrollräknade uppgifterna.

5.1.1 Del 1 – Bilda tal

Den första uppgiften i diagnosen är att eleverna ska "Bilda så många tal du kan med siffrorna: 4, 6 och 10. Använd både addition och subtraktion." Tanken är att se om eleverna kan se sambandet mellan talen och göra additions- och subtraktionsuppgifter av dem. Förhoppningen var att se 4+6=10, 6+4=10, 10-4=6 och 10-6=4. Många elever svarar just på detta sätt, men många elever är kreativa och tänker på andra sätt till denna uppgift. Dock finns en medvetenhet om att uppgiften kan tolkas på olika sätt vilket också visar sig i elevernas svar. Eleverna kommer på många olika additions- och subtraktionsuppgifter och använder sig inte bara av talen 4, 6 och 10. Istället bildar de andra additioner och subtraktioner som till exempel 10+6=16 eller med högre tal som 46-10, vilket inte är fel men inte heller de svar som förväntades. En del elever skapar även egna sifferkombinationer som till exempel 4610. Eftersom det finns en viss otydlighet i uppgiften och eleverna tolkar den på olika sätt har vi valt att inte analysera den mer utförligt.

5.1.2 Del 2 – Reversibla uppgifter

Del två i diagnosen består av tolv uppgifter uppdelade i fyra delar där talen i varje del är reversibla mot varandra.

Resultat

Uppgift	Antal rätt alla elever	Antal rätt i %	Antal rätt i åk 2	Antal rätt i %	Antal rätt i åk 3	Antal rätt i %
16-7=9	79	96 %	38	97 %	41	95 %
16-9=7	72	88 %	34	87 %	38	88 %
7+9=16	80	98 %	38	97 %	42	98 %
63+22=85	74	90 %	36	92 %	38	88 %
85-63=22	59	72 %	26	67 %	33	77 %
85-22=63	60	73 %	26	67 %	34	79 %
11-5=6	76	93 %	37	95 %	39	91 %
11-6=5	71	87 %	31	79 %	40	93 %
6+5=11	79	96 %	38	97 %	41	95 %
44+34=78	73	89 %	34	87 %	39	91 %
78-44=34	62	76 %	27	69 %	35	81 %
78-44=34	62	76 %	29	74 %	33	77 %

Tabell 1: Del 2, reversibla uppgifter. Antal rätt svar. 82 elever, 39 i årskurs 2 och 43 i årskurs 3.

Del två i diagnosen ger ett varierat resultat. Vid denna del förekommer uppgifter med både addition och subtraktion, men det är samma tre tal som är reversibla mot varandra. Många elever har skrivit rätt svar på de flesta uppgifterna. Men det finns även vissa mönster att urskilja bland felsvaren.

Elever i årskurs två har fler fel på subtraktionsuppgifterna med de högre talen, 85-63, 85-22 samt 78-44. Det är en skillnad i jämförelsen mellan årskurs två och tre då eleverna i årskurs tre har fler rätt procentuellt på dessa uppgifter. Det förekommer även svar där eleverna räknar addition istället för subtraktion. Det märks till exempel på uppgiften 85-22 där tre elever svarar 107 och vid 78-44 där två elever svarar 122.

En upptäckt som visar sig i sammanställningen är att vid uppgifterna 11-5=6 och 11-6=5 skiljer sig resultatet. I årskurs två är det 95 % av eleverna som har svarat att 11-5=6 men det är endast 79 % som har svarat rätt på 11-6=5.

Uppgiften 78-44 är med två gånger för att se hur eleverna reagerar och om de automatisk kan se att det blir samma svar på de båda uppgifterna. Många elever svarar rätt och lika på båda uppgifterna, men ett flertal elever skriver två olika svar. Två elever svarar 44 på den sista uppgiften.

Ett tydligt resultat är att fler elever svarade rätt på additionsuppgifterna än subtraktionsuppgifterna. Resultatet gäller både klassvis och bland alla elever. Skillnaden är störst vid de högre talen.

Analys

Att flera elever har fel på uppgifterna med högre tal kan förklaras med att de upplevs svårare att räkna ut. Det visar på att eleverna inte ser mönstret och inte ser att uppgifterna är reversibla. Hade eleverna sett mönstret hade de troligtvis kunnat använda den kunskapen när de räknade uppgifterna med högre tal (Canobi 2005). Däremot är det möjligt att eleverna ser sambandet, men inte har kunskap om hur de kan använda sig utav det för att beräkna uppgifterna. Att det är en skillnad mellan årskurs två och tre visar på en utveckling mellan årskurserna.

Flera elever räknar addition istället för subtraktion vid några uppgifter. Detta tyder på att eleverna troligtvis missar att det är ett subtraktionstecken och läser det som en addition. Hade det varit en additionsuppgift istället för en subtraktionsuppgift hade det varit rätt svar. Eleverna har enklare för att beräkna additionsuppgifter än subtraktionsuppgifter vilket visar sig i resultatet då fler elever har fler antal rätt vid uppgifterna med addition. Detta kan bero på att subtraktion är mer komplext än addition (McIntosh 2008). Det är en tydlig skillnad i resultatet mellan de två räknesätten. Vid de högre talen är det större skillnad, då fler elever svarar rätt på additionsuppgiften men inte subtraktionsuppgifterna.

Att det skiljer sig i resultatet mellan uppgifterna 11-5=6 och 11-6=5 stärker tolkningen att många elever i årskurs två beräknar uppgiften och inte använder sig av sambandet mellan talen. Resultatet går emot föreställningen att uppgifterna var på samma svårighetsnivå. Dessa uppgifter förväntas eleverna kunna i årskurs två. Detta visar på vikten av att eleverna kan se sambandet mellan delarna och helheten för att kunna använda det vid addition och subtraktion (Canobi 2005, Malmer 1990). Hade eleverna sett att 5 och 6 är två delar av helheten som är 11 hade de haft lättare att komma fram till svaret. Eftersom många svarar fel på den ena uppgiften visar det att eleverna inte kan se sambandet. Detta gäller även andra uppgifter i denna del, men det syns tydligast vid just dessa uppgifter i årskurs två.

Resultatet vid uppgiften 78-44 visar att de två eleverna som svarade 44 ser mönstret i uppgifterna, då det hade varit rätt svar om mönstret följts vid konstruktionen av diagnosen. Troligtvis slarvar de när de läser uppgiften och följer samma mönster som finns på de andra uppgifterna. Det tyder på att dessa elever har förmågan att använda sig av reversibilitetsprincipen (Canobi 2005, Donaldson 1978).

5.1.3 Del 3 – Tretermsuppgifter

Den tredje delen i diagnosen består av åtta tretermsuppgifter. Hälften av dessa uppgifter är uppbyggda så att man utgår från ett tal, adderade ett annat och sedan subtraherade samma tal. Vid dessa uppgifter är svaret det samma som det första talet. De andra uppgifterna består också av tre termer med både addition och subtraktion, men där talet som adderades och subtraherades är inte det samma.

Resultat

Uppgift	Antal rätt alla elever	Antal rätt i %	Antal rätt i åk 2	Antal rätt i %	Antal rätt i åk 3	Antal rätt i %
12+7-7=12	75	91 %	36	92 %	39	91 %
5+8-8=5	71	87 %	34	87 %	37	86 %
80-2+3=81	63	77 %	32	82 %	31	72 %
70+2-3=69	63	77 %	29	74 %	34	79 %
7-5+7=9	61	74 %	28	72 %	33	77 %
11-8+11=14	51	62 %	23	59 %	28	65 %
67+11-11=67	67	82 %	31	79 %	36	84 %
12+15-15=12	68	83 %	29	74 %	39	91 %

Tabell 2: Del 3, tretermsuppgifter. Antal rätt svar. 82 elever, 39 i årskurs 2 och 43 i årskurs 3.

Vid diagnostillfället uppmärksammas att det förekommer fingerräkning både bland elever i årskurs två och tre. Vid sammanställningen syns det tydligt att eleverna är ojämna vid den här uppgiften och får olika antal rätt. Ett resultat är att det är fler elever som räknar rätt svar på de uppgifter där samma tal adderas och sedan subtraheras än de uppgifterna där talen inte tar ut varandra på samma sätt. Detta gäller även uppgifterna med högre tal. Det är fler elever som har rätt på de tretermsuppgifter där talet som adderas och sedan subtraheras är ett ental. Detta syns tydligast i årskurs två. Den uppgift som flest elever har fel på är 11-8+11=14. Det är bara 62 % av alla elever som svarar rätt. Två svar som är återkommande är 8 och 19. Utöver dessa två felsvar finns även flera andra olika svar på uppgiften där inget tydligt mönster går att urskilja.

Analys

Eleverna har svårare med de uppgifter där det inte är samma tal som adderas och subtraheras, exempelvis 80-2+3. Detta kan tyda på att eleverna har en förståelse för att om man utgår från ett tal, adderar ett annat tal och sedan subtraherar samma tal så har de kvar det talet man hade från början (Canobi 2005). Det som inte går att utläsa enbart vid diagnosen är om eleverna räknar ut uppgiften stegvis eller om de ser att om de lägger till och tar bort samma tal behöver de inte räkna ut hela uppgiften utan enbart se till det första talet. Att det är en så stor skillnad på antal rätt mellan uppgifterna där talen tar ut varandra och där de inte gör det visar dock på att eleverna kan använda sig av detta samband för att enklare räkna ut svaret (Canobi 2005). En tolkning är att eleverna har lättare att räkna ut uppgifterna med de lägre talen (Canobi 2005). Den uppgift som flest elever har svarar rätt på är 12+7-7=12, där 91 % av alla elever svarar 12. Det tolkas som att uppgiften är lättare att räkna då det inte är tiotalsövergång. Elever som räknar ut uppgiften stegvis kan då lättare beräkna uppgiften korrekt (Malmer 2002).

Att det är många elever som har fel på uppgiften 11-8+11 kan tolkas som att eleverna tänker att de följer mönstret från tidigare uppgifter och adderar och subtraherar samma tal så har de kvar det tredje talet, vilket här skulle vara 8. Att några elever svarar 19 skulle kunna visa på att de enbart räknar 8+11.

5.1.4 Del 4 – Textuppgifter

Ingen tabell har gjorts för att visa på resultatet till textuppgifterna, detta för att fokus här inte ligger på elevernas svar på frågorna, utan på deras tillvägagångssätt. Exempel på elevernas metoder och svar har därför beskrivits i texten.

Resultat

Ett mönster som blir tydligt vid sammanställningen av diagnoserna är att många elever använder sig av addition vid den första problemlösningsfrågan vid uppgift 4.1. Frågan är "Rikard är 10 år. Hur länge dröjer det tills han blir 18 år?". Flertalet elever får svaret 8 år och skriver uträkningen 10+8=18.

För vissa elever är det läsningen som gör det problematiskt att genomföra textuppgifterna, bland annat på grund av att några elever har ett annat modersmål än svenska. En del elever svarar inte rätt på frågan trots att uträkningen var korrekt. Ett exempel är vid frågan "Pelle har 100 kr. Eva har 70 kr mindre än Pelle. Hur mycket har Eva?" (4.2). Flera elever svarar då "Eva har 70 kr" vilket inte stämmer eftersom det korrekta svaret är att hon har 30 kr. Ett annat svar som förekom var svaret 30 kr *mindre*. Svaret ska vara 30 kr och inte 30 kr mindre då det stod i uppgiften att Eva har 70 kr mindre än Pelle.

Uppgift 4.3 är "Peter har 100 kr. Ida har 70 kr. Hur mycket mer har Peter?". Denna uppgift och 4.2 är lika varandra. De båda uppgifterna innehåller samma tal, 30, 70 och 100 men har olika signalord; *mer* och *mindre*. Uppgifterna är utformade på detta sätt för att se om eleverna skulle lösa dem med olika metoder. I sammanställningen av resultatet syns det tydligt att vid uppgiften 4.2 använder flertalet elever sig av subtraktion. I uppgiften 4.3 är det mer jämt fördelat mellan addition och subtraktion, både inom klasserna och överlag. Det förekommer även elever som skriver tiotalen som ental och räknade till exempel 10-7 istället för 100-70 och gjorde om 3 till 30 i svaret.

De två sista uppgifterna är "Eva vill köpa en glass för 18 kr, men hon har bara 15 kr. Hur mycket pengar fattas?" (4.4) och ”Eva tappade 3 kr och har nu bara 15 kr. Hur mycket pengar hade hon förut?" (4.5). Dessa uppgifter är liknande och innehåller även här samma tal: 3, 15 och 18. Däremot skiljer svaren sig mellan uppgifterna, vid uppgift 4.4 använder sig ungefär lika många elever addition som subtraktion. Dock skiljer det sig mer vid uppgift 4.5 där addition är det vanligaste räknesättet.

Det vanligaste är att eleverna skriver en räkneoperation med subtraktion eller addition, till exempel 10+8=18. Men det är även fler andra strategier används. Fler elever ritar olika symboler för de antal de räknade uppåt eller neråt, till exempel vid uppgift 4.1. Här skriver några elever 10+8=18, dessutom skriver de "11 år, 12 år" och så vidare upp till 18. Några elever ritar en tallinje och en båge mellan de tal de räknar. Ett fåtal elever använder sig av en algoritm vid uppgifterna med de högre talen. Några elever räknar först ental och därefter tiotal, till exempel 10-7=3 följt av 100-70=30. Det är även vanligt att eleverna vid de uppgifter där de ska räkna ut pengar ritar mynt, till exempel 10 kronor vid uppgifterna 4.2 och 4.3. Några elever använder sig av en ekvation, till exempel vid uppgift 4.4: 15+X=18, X=3.

Analys

Vid textuppgifterna är det ibland svårt att urskilja vilka strategier och uträkningar som eleverna använder sig av. I några fall skriver eleverna bara ner svaret, vilket inte berättar om deras tillvägagångssätt fram till svaret. Detta gör att det inte går att veta om eleverna använde sig utav addition eller subtraktion. Det är fler elever i årskurs två än i årskurs tre som bara skriver svaret utan beräkning.

De elever som använder addition i uppgift 4.1 använder sig av Sollervalls (2007) utfyllnadsmetod och räknade uppåt från 10 till 18. Eleverna omvandlar det som skulle kunna vara en subtraktion till en addition (McIntosh 2008). Dock förekommer även uträkning med subtraktion 18-10=8. De elever som istället skriver en subtraktion använder sig då av borttagningsmetoden (Sollervall 2007, Peters m.fl. 2011) och räknar från 18 och neråt till 10.

Fler elever använder sig av subtraktion vid uppgift 4.2, vilket skulle kunna tolkas som att när eleverna läser ordet *mindre* i en textuppgift använder de sig av subtraktion. Det är ett signalord i texten som ofta tolkas som en subtraktion (Malmer 1990). Detta visar på vikten av vilket signalord som används. I uppgiften med ordet *mindre* valde de flesta eleverna att räkna med en subtraktion och i uppgiften med ordet *mer* var det ungefär lika många som använde addition som subtraktion.

De elever som använder sig av addition vid uppgift 4.4 har använt sig av utfyllnadsmetoden (Sollervall 2007). En tolkning av varför eleverna använder sig av addition trots att signalordet är "fattas", som skulle kunna tolkas som subtraktion, är att eleverna har automatiserat sin räkning. De har upptäckt att det är mer effektivt att räkna uppåt från 15 till 18 vilket tyder på god taluppfattning (Löwing 2008). Eleverna visar på kunskap om sambandet mellan addition och subtraktion och kan skifta mellan dem (McIntosh 2008).

Att några elever ritar varje ental upp till svaret kan kopplas till hur barn utvecklar sin matematik för att uppnå grundläggande taluppfattning (Ahlberg 2001). De räknar uppåt eller neråt med ett tal åt gången och gör det tydligt genom att rita symboler eller skriva åren. De elever som använder sig av algoritmer visar på en förståelse för hur talen är uppbyggda (McIntosh 2008). De elever som först använder sig av ental tar hjälp av tiokamraterna (McIntosh 2008). De har lärt sig att 3+7=10 och kan då både vända det till en subtraktion och använda det som "hundrakamrater". Att några elever använt sig av ekvationer kan ses som utfyllnadsmetoden (Sollervall 2007). De börjar på talet 15 och ser hur stor skillnaden är upp till 18.

5.1.5 Del 5 – Subtraktionsuppgifter med kontrollräkning

Vid den sista delen av diagnosen ska eleverna beräkna subtraktionsuppgifter och även, om de kan, kontrollräkna dem med addition.

Resultat

Uppgift	Antal rätt alla elever	Antal rätt i %	Antal rätt i åk 2	Antal rätt i %	Antal rätt i åk 3	Antal rätt i %
15-10=5	77	94 %	39	100 %	38	88 %
90-7=3	62	76 %	30	77 %	32	74 %
154-54=100	71	87 %	34	87 %	37	86 %
85-78=7	30	37 %	13	33 %	17	40 %
45-5=40	75	91 %	36	92 %	39	91 %

Tabell 3: Del 5 subtraktionsuppgifter. Antal rätt svar. 82 elever, 39 i årskurs 2 och 43 i årskurs 3.

Uppgift	Alla elever	Antal i %	Antal elever i åk 2	Antal i %	Antal elever i åk 3	Antal i %
15-10=5	21	26 %	3	8 %	18	42 %
90-7=3	21	26 %	3	8 %	18	42 %
154-54=100	20	24 %	3	8 %	17	40 %
85-78=7	15	18 %	3	8 %	12	28 %
45-5=40	21	26 %	3	8 %	18	42 %

Tabell 4: Del 5 subtraktionsuppgifter. Antal elever som kontrollräknade korrekt. 82 elever, 39 i årskurs 2 och 43 i årskurs 3.

Det är många elever som lämnar kontrollräkningen blankt. Bland de elever som kontrollräknar är att många som vänder korrekt på talen till en addition. Dock är det en del elever som svarar fel på subtraktionsuppgiften och som vid kontrollräkningen använder samma tal som de kommit fram till. Det gör att additionen blir fel vilket gör att kontrollräkningen inte har någon betydelse. Ett exempel som förekommer några gånger är 85-78=13, då kontrollräkningen är 13+78=85. Vid genomförandet av diagnosen uppmärksammas vid ett tillfälle en elev som räknar fel men som vid kontrollräkningen upptäcker detta och ändrar svaret på subtraktionsuppgiften. Detta uppmärksammas bara en gång, men det är möjligt att fler elever märker att de räknat fel med hjälp av kontrollräkningen. Ett annat vanligt förekommande misstag som upptäcks är att eleverna vid uppgiften 15-10 får fram rätt svar, men vid kontrollräkningen med addition skriver 15+10 istället för att kontrollera om 10+5=15. Andra exempel på elever som inte förstår hur man kontrollräknar är vid 45-5=40 och kontrollräkningen är 20+20=40, eller 15-10=5 som då blir 3+2=5. Eleverna skriver istället en annan uträkning som med addition ger samma svar som subtraktionsuppgiften.

Vid uppgiften 85-78 kommer 37% av alla eleverna i undersökningen fram till rätt svar. Det är många elever som väljer att lämna uppgiften utan att skriva svar och även många elever som får fram ett felaktigt svar. En fjärdedel av alla elever får fram svaret 13.

I del 5 är det svårt att se vilka strategier eleverna använder. Det är en elev som visar hur hon tänker och gör en algoritm av 85-78 och får fram svaret 7. Dock försöker hon sudda ut uppställningen för att enbart skriva ner svaret vid uppgiften.

Analys

Att elever skriver en addition med andra tal än de i subtraktionen visar på att de inte har kunskap om hur de använder addition för att kontrollräkna en subtraktion (McIntosh 2008). Det kan även tyda på att de inte är bekanta med begreppet *kontrollräkning*.

En tolkning av att många elever fått fram svaret 13 vid uppgiften 85-78 är att eleven tagit entalen och tiotalen för sig när de räknat. De börjar då med tiotalen och kommer fram till att 80-70=10. När de sedan räknar entalen är det tolkningsbart att eleverna utgått från det högsta talet att subtrahera från alltså 8-5, eftersom det blir svårt att subtrahera 5-8, därmed får de svaret 3. Nästa steg är då 10+3=13. Det är ett vanligt misstag att eleverna blandar ihop reglerna för addition och subtraktion och byter plats på talen (McIntosh 2008). De använder sig av den kommutativa lagen, och byter plats på talen för att kunna subtrahera från det största talet. Men den kommutativa lagen gäller inte vid subtraktion och därmed får eleverna ett felaktigt svar (McIntosh 2008) En utmaning i denna uppgift är att det krävs tiotalsövergång vid subtraktionsuträkning för att komma fram till rätt svar (Malmer 2002).

Sammanställningen av resultatet visar tydligt att eleverna i årskurs tre har kommit längre i sin utveckling gällande reversibilitet och att kunna använda sig av sambandet mellan subtraktion och addition vid exempelvis kontrollräkning. Det visar att eleverna kan använda sig av reversibilitetsprincipen (Canobi 2005, Donaldson 1978).

5.1.6 Sammanfattning av diagnosresultat

Det finns återkommande mönster som tyder på att eleverna kan använda sig av sambandet mellan räknesätten addition och subtraktion. Däremot skiljer det sig på individnivå. I del två är det många elever som har alla rätt, vilket kan tyda på att de ser och använder sambandet, men det kan också visa på att de använder andra fungerande räknestrategier. Det som tydligast visar på elever som ser sambandet är de två elever som svarade 44 på den andra uppgiften 78-44, då detta hade varit korrekt om uppgiften följt mönstret. I den tredje delen märks det att många elever har lättare för de uppgifterna där det är samma tal som adderas och subtraheras än de andra uppgifterna. Detta tyder på att eleverna kan använda sig av sambandet mellan räknesätten för att göra uträkningen enklare. Det blir även märkbart i den fjärde delen att eleverna kan använda sig av sambandet mellan addition och subtraktion då de använder sig av addition där de kunde ha använt sig av subtraktion. I den femte delen märks det tydligast på de elever som kontrollräknar att de ser att en subtraktion kan vändas till en addition. Det är bara runt en fjärdedel av alla elever som kontrollräknar korrekt, de flesta av dem går i årskurs tre. Detta visar på att eleverna har svårt att vända på talen, men det kan också förklaras med att eleverna inte känner till begreppet *kontrollräkna*.

Den del som vid diagnostillfället visar tydligt på de strategier eleverna använder sig av är del 4 med textuppgifterna. Där är eleverna ombedda att skriva och rita hur de tänker när de räknar, vilket ger en möjlighet att se vilka strategier de använder. De matematiska strategier eleverna använder sig av i del 4 är bland annat utfyllnadsmetoden och borttagningsmetoden som blir tydliga när eleverna räknar uppåt eller neråt. Andra strategier som är synliga är algoritmer, tiokamrater och ekvationer.

5.2 Elevintervju

Fyra gruppintervjuer genomförs med tre elever i varje intervju. Eleverna har blivit tilldelade ett nummer för att förbli anonyma, Elev 1-6 går i årskurs två och Elev 7-12 går i årskurs tre. Intervjun utgår från diagnosen och frågor ställs om de olika uppgifterna. Alla elever svarar inte på samma frågor, men alla får förklara minst en uppgift per del.

5.2.1 Del 2 – Reversibla uppgifter

Resultat

Flertalet elever svarar på hur de gör för att lösa uppgiften 16-7 och de använder några olika metoder. Elev 11 förklarar "*jag tänkte att 16-7 då räknade jag såhär på fingrarna, såhär 16 och sen räknade jag bakåt från 16"*. Elev 8 använder också en subtraktion, men tänker på ett annat sätt: "*jag tänkte att 16-6 är 10 och sen minus 1 till och det är 9"*. Även Elev 12 räknar på detta sätt. Några elever gör om uppgiften till en addition, till exempel Elev 9 som förklarar detta genom att "*jag tänkte lite mer plus där, liksom nånting plus 7 är lika med 16 [...] 9*". Elev 1 får frågan hur han tänker vid uppgiften 7+9 och svarar "*jag tänkte att man den här 9:an är nästan 10 så jag tar 1 från 7 till 9:an då blir det 6 kvar på 7:an så det är 6 där så det är 10 plus 6 så det är 16".*

Vid uppgiften 44+34 tänker flera elever på liknande sätt. Elev 7 förklarar sin lösning på följande sätt: "*78 för om 3+4 är 7 och 4+4 är 8 då blir det 78"*. Elev 5 resonerar att "*då gjorde jag så att först tog jag tiotalen och då blev det 4+3, det blev 7 alltså blev det 70. Och sen dubblade jag ihop entalen och det blev 8".*

När eleverna förklarat hur de tänker på några uppgifter får de sedan frågan om de ser något mönster och om de i så fall kan använda det mönstret för att enklare räkna ut uppgifterna. Tre elever i en grupp från en årskurs två pratar med varandra och kommer fram till att det är samma tal i uppgifterna. De har inte upptäckt detta förrän nu, och säger att de ändå skulle räkna ut uppgifterna på samma sätt som de gjort tidigare, utan att ta hjälp av sambandet mellan talen. I den andra tvåan har Elev 1 redan uppmärksammat mönstret och säger att "*man tar bort 7 där [från 16] då blir det 9 och där när man tar bort 9 [från 16] då blir det 7 så det är 7 9 och dom blir där dom blir 16 tillsammans"*. Eleven kan använda sambandet även på de högre talen. De två andra eleverna i gruppen kan se att det finns ett samband, men har svårt att använda sig av det när de räknar.

Det är fler elever i årskurs tre som ser sambandet mellan talen. Elev 7 förklarar att "*16-9 är 7 och 16-7 är 9 och då måste det bli 16, 7+9"*. Elev 12 beskriver det som en talfamilj: "*typ att det här är som en talfamilj, 16-7 är 9 och 16-9 är 7 och sen 7+9 är 16"*. Däremot säger han att han "räknade ut dom" på frågan om han såg att de högre talen var talfamiljer eller om han räknade ut dem. Det är några elever i årskurs tre som inte ser sambandet och flera uppmärksammar det först efter att de får frågan om de kan se något mönster. De elever som ser mönstret tar hjälp av det vid uträkningen av uppgifterna med de lägre talen, men inte vid de högre talen.

Analys

Flera olika metoder används vid uppgiften 16-7. Några elever använder sig av borttagningsmetoden (Sollervall 2007), en av dem är Elev 11 som räknar på fingrarna (Ahlberg 2001, McIntosh 2008). Elev 8 och 12 räknar med subtraktion och räknar då via 10 (McIntosh 2008), 16-6=10, 10-1=9. Även Elev 1 räknar via 10, men med en addition vid uppgiften 7+9, han tar 7-1=6, 9+1=10, 10+6=16. Detta skulle även kunna förklaras med kompensationsprincipen (McIntosh 2008). Eleven tar en summa från ena talet till det andra talet för att förenkla uträkningen.

Vid uppgifterna med de högre tvåsiffriga talen använder de flesta eleverna strategin att dela upp tiotal och ental för sig (McIntosh 2008). Inga uppgifter har några tiotalsövergångar, varken vid addition eller subtraktion vid denna del av diagnosen och intervjun. Det gör att de flesta eleverna kan använda strategin att dela upp talsorterna och komma fram till korrekt svar. Även Elev 5 använder denna strategi, dessutom säger hon att hon "*dubblade ihop entalen och det blev 8*". Att använda sig av "dubblor" (McIntosh 2008) är en vanlig metod som de flesta elever lär sig tidigt.

Alla elever får frågan om de ser något mönster mellan uppgifterna i del två. Detta görs för att se om de kan se att talen är reversibla mot varandra och om eleverna kan ta hjälp av det i deras uträkningar (Canobi 2005, Malmer 2002). De flesta eleverna i årskurs två kan se mönstret, men några av dem ser det först när de får frågan om de ser något mönster, vilket i sig är en ledande fråga. De kan däremot inte använda sig av relationen mellan talen, utan väljer att beräkna uppgifterna på samma sätt som de gjort innan. Detta tyder på att trots att eleverna kan se sambandet är de inte tillräckligt bekväma med det att för att kunna använda det när de räknar ut uppgifterna.

De elever som ser och kan använda relationen mellan talen för att lösa uppgifterna har en förståelse för reversibilitetsprincipen (Canobi 2005, Donaldson 1978). De kan se sambandet i talen vid additions- och subtraktionsuppgifterna och använda det för att förenkla sina uträkningar. Däremot är det flera av eleverna som använder sig av reversibilitetsprincipen vid uppgifterna med de lägre talen, men inte vid de högre tvåsiffriga talen. Detta talar emot att eleverna är insatta i hur reversibilitetsprincipen faktiskt fungerar. Hade de haft en djupare förståelse för principen hade de kunnat använda den även på högre tal (Canobi 2005). Nu är det fler elever som enbart använder principen vid de lägre talen. Eleven som använder ordet "talfamilj" visar på en förståelse för talens relation till varandra och hur de olika delarna inom talfamiljen kan bilda en helhet (Malmer 1990). Däremot använder han sig inte av "talfamiljer" och reversibilitetsprincipen vid de tvåsiffriga talen.

5.2.2 Del 3 – Tretermsuppgifter

Resultat

I intervjun får eleverna olika uppgifter att förklara, därefter blir de ombedda att se efter mönster bland uppgifterna. Det är ett flertal elever som ser mönstret men många löser uppgiften genom att räkna. Exempel på detta är Elev 12 som löser uppgiften 12+7-7 "*om jag tar 12+7 sen tar man ju bort 7 igen så blir det ju 12*". Även Elev 5 och 6 löser denna uppgift. Elev 6 säger: "*12 plus 7 sen tog jag bort 7 då blev det 12*" och fortsätter med att "*egentligen behöver man inte ens räkna med sjuan"* och Elev 5 instämmer *"nej, man ska ändå ta bort den sen igen"*. Elev 8 som löser samma uppgift säger *"jag tänkte att jag vet ju vad 12+7 är, det är 19 sen tog man bort 7 till så då blir det 12 igen".* Fler exempel på elever som räknar uppgifterna är Elev 4 och 7 som löser uppgiften 5-8+8. Elev 5: "*5+8-8, 5 plus 8 vad blir det... Det blir 13 och sen minus 8 igen är 5"*och Elev 7 räknade*"13-8, 5*". Elev 4 säger sig förstå hur Elev 6 tänker men måste själv räkna ut alla stegen för att komma fram till svaret.

Vid diskussion om mönster säger även Elev 9, som tidigare inte kunde förklara hur han kommer fram till rätt svar vid uppgiften 12+7-7, att de inte behöver räkna ut dessa uppgifter. Elev 9 fortsätter med "*för att om man tar till exempel 12+15-15 då tar man ju 12+15 och sen tar bort 15 igen, då blir det ju samma svar som talet från början".*

Några elever får även frågan hur de löser uppgifterna där talen inte tar ut varandra. Elev 8 löser uppgiften 80-2+3 genom att räkna som om det vore en parentes 80-(2+3) och får svaret 75. Eleven tänkte på detta sätt vid diagnosen och är vid intervjun medveten om att det är fel svar men kan förklara sin tankegång.

Analys

Genom att läsa citaten från Elev 5, 6 och 12 är det tydligt att de inte behöver räkna ut uppgifterna. Även Elev 9 uppmärksammar mönstret vid diskussionen och kan se att subtraktionen upphäver additionen och kan sätta ord på varför. Detta visar på att eleverna kan se att termerna tar ut varandra (Canobi 2005). Det syns även tydligt att eleverna har förståelse för att subtraktionen motverkar additionen (McIntosh 2008). Bland de elever som räknat ut uppgifterna märks det att de inte kan använda sig av sambandet utan räknar steg för steg. Det blir märkbart att de elever som räknar steg för steg behöver öva upp sin taluppfattning för att kunna förenkla sina räkneoperationer (Löwing 2008).

Den metod som Elev 8 använder sig av och får svaret 75 är intressant. Då eleven vid 80-2+3 sätter ihop 2+3=5 och istället tar 80-5=75. Eleven använder sig av den associativa lagen (McIntosh 2008, Sollervall 2007), men den fungerar inte vid subtraktion. Hade det enbart varit additioner i uppgiften hade det inte påverkat svaret vilken ordning hon räknade ut de olika delarna, men nu finns även en subtraktion med i uppgiften. Detta gör att den associativa lagen inte fungerar, när eleven då räknar ut 2+3 först blir det fel svar.

5.2.3 Del 4 – Textuppgifter

Vid textuppgifterna får alla tre elever vid varje intervjutillfälle samma uppgift som de först får fundera på själva hur de löser den. De får även ett papper där de kan rita och skriva hur de tänker. Det skiljer på vilka frågor som ställs vid de olika intervjutillfällena.

Resultat – Uppgift 4.1

Under intervjuerna får sammanlagt nio elever frågan om hur de löser uppgift 4.1 "Rickard är 10 år. Hur länge dröjer det tills han blir 18 år?". Åtta av eleverna kommer fram till rätt svar, men Elev 10 behöver veta vilken dag Rickard fyller år för att kunna svara, vilket gör att hon inte svarar på uppgiften. Sammanlagt sex elever använder addition och skriver 10+8=18 och kommer fram till att det är 8 år tills Rickard är 18. De använder olika metoder för att visa och förklara hur de tänker. Elev 1 skriver först 10 och ritar sedan åtta streck och förklarar uträkningen så här: "*han var ju 10 från första början och sen så tog jag streck och gjorde år typ och sen så kom jag fram till 18 och då var det 8 år och sen kan man också tänka 10 plus 8 och det blir 18 och då kan man räkna ut att det är 8 år till dess*". Elev 3 skrev 11år, 12år, 13år, 14år, 15år, 16år, 17år, 18år. Elev 6 förklarar att han ser till tiotalen först och ser att det är ett tiotal i både 10 och 18 och att det skiljer 8 ental. Elev 11 förklarar 10+8=18 "*Jag tänkte att om han är 10 år så räknade jag [...]10 upp till 18 och ser hur många år det dröjde kvar och det blev 8 år [...] Det var säkert 8 för 10+8=18. Det var 8 jag skrev så blir det 8 år tills han blir 18 år"*.

Två elever använder sig av subtraktion, en skriver 18-10=8 och en skriver 18-1-1-1…=8. Några elever får frågan hur det kommer sig att de får samma svar på frågan, trots att de använder olika metoder. Elev 3 svarar: "*det är typ för att alla vi räknar ändå på samma tal på samma grej typ och sen så blir det ju samma svar då för att vi räknar på samma tal typ ungefär"*.

Analys

De flesta elever använder addition vid uppgift 4.1 för att räkna ut skillnaden mellan 10 och 18, 10+8=18, vilket innebär att de använder sig av utfyllnadsmetoden (Sollervall

2007). De använder olika sätt för att förklara hur de tänker, några visar genom att rita streck och skriva år. Det visar på hur de räknar stegvis vid varje tal från 10 upp till 18 och sedan ser hur många steg de gått. Det är vanligt att barn lär sig räkna varje steg (Ahlberg 2001, McIntosh 2008), vilket kan göra att när de ska beskriva hur de tänker använder de sig av denna strategi. Elev 3 använder sig av ental och tiotal, en vanlig metod att räkna ut både addition och subtraktion (McIntosh 2008. Eleven kan då se att det är lika många tiotal i 10 och 18 och att det enbart skiljer 8 ental.

De två elever som räknar med subtraktion använder borttagningsmetoden (Sollervall 2007). De gör uppgiften till en subtraktion, men använder här olika strategier. Elev 12 räknar 18-10=8 medan Elev 2 skriver 18-1-1-1…=8. Att Elev 2 börjar skriva varje ental skulle kunna visa på hur eleven räknar varje tal för sig (Ahlberg 2001). Men eftersom eleven inte skriver ut alla tio ettorna tyder det på att han räknar ut uppgiften först som 18-10=8 och sedan när har ska förklara hur han gör väljer han att visa hur han går stegvis neråt tio steg för att sluta på 8.

Elev 3 gör ett försök att förklara varför de får samma svar trots att de använder olika metoder. Hon har svårt att sätta ord på sina tankar, men försöker ändå förklara att eftersom de använder samma tal blir det samma svar, trots att de räknar på olika sätt. Att barn har svårt att förklara metoder och samband är vanligt (Canobi 2005), men Elev 3 ser sambandet och är på väg att även kunna förklara det.

Elev 10 kunde inte lösa uppgiften då hon inte visste vilken dag Rikard fyller år. Detta hade kunnat utvecklas under intervjun och hon skulle kunnat få förklara mer hur hon menar. Vi hade också kunnat svara att Rikard fyller år idag, och se hur det påverkade hennes svar.

Resultat – Uppgift 4.2 och 4.3

Samtliga elever får frågan om hur de går tillväga på uppgift 4.2 “Pelle har 100 kr. Eva har 70 kr mindre än Pelle. Hur mycket har Eva?”. Tio av eleverna får ett korrekt svar som är 30 kr. Medan två elever, Elev 4 och 9, en i årskurs två och en i årskurs tre använder subtraktion och får svaret 20. De båda inser dock att svaret inte stämmer och ändrar sig till 30 när det är deras tur att förklara. Samtliga elever i årskurs tre använder sig av räknesättet subtraktion vid intervjutillfället. Av eleverna i årskurs två använder hälften av eleverna sig av subtraktion och hälften av addition. Metoderna skiljer sig mellan eleverna. Elev 2, 5 och 6 använder sig av addition. Elev 2 använder ental först genom att ta 7+1+1+1=10 och sedan tiotalen 70+10+10+10=100. Elev 6 resonerade enligt följande: ”*Då räknade jag bara ut skillnaden mellan 70 och 100 och det var 30 kroner. Jag räknade så här jag började på 70 sen räknade jag tioskutt 70 sen gjorde jag 80, 90 och 100 då gjorde jag då räknade jag såhär på fingrarna hur mycket tieskutt man behövde hoppa."* Elev 5 använder sig av tiokamraterna och beskriver sin tankegång “*Jag räknade 70, nu låtsas vi att det här bara är ental, 7 och 3 är ju tiokompisar egentligen så dom blir 10 och då blir 70 och 30 hade det blitt 100. Så alltså hade hon 30 kronor mindre”.* Eleven använder sig av additionen 70+30=100 och får fram ett matematiskt sett korrekt svar, dock stämmer det inte att Eva har 30 kr mindre utan att hon har 30 kr. Eleven får sedan frågan om hur mycket Eva har och svarar då “*Eva hade 70*” vilket inte heller stämmer och blir ombedd att läsa uppgiften igen och inser att “*70 kr mindre, oj aha. Hon hade 30, så alltså är det tvärt om”.* Elev 1 använder sig av subtraktion och tar först 10-7=3 för att sedan göra om det till 100-70=30. Eleven räknar även med tiotal genom att ta 30+70=100. Elev 3 använder sig av subtraktion och räknar bakåt med tiotal och skriver följande 100-10-10-10-10-10-10-10= och under detta 90 80

70 60 50 40 30. Elev 10 som använder sig av nedräkning med tiotal på fingrarna förklarar detta genom följande "*jag skrev upp 100-70 och då så var det, tänkte jag från början 100, 90, 80, 70, 60, 50, 40, 30 för att då är det minus 70 och då blir det ju 30".* Elev 7 och 11 använder sig av en fungerande algoritm och Elev 8 och 12 använder sig av huvudräkning med subtraktion utan att förklara närmare hur.

Uppgift 4.3 "Peter har 100 kr, Ida har 70 kr hur mycket mer har Peter?" är det tre elever i årskurs tre som förklarar under intervjun. Eleverna använder sig av tre olika strategier för att komma fram till korrekt svar. Elev 7 säger först *"jag tänkte såhär 100 plus minus 70=30*". Eleven har svårt att förklara men det kommer dock fram att hon tänker ut svaret genom "*30+70 är 100 och såhär gjorde jag 30+70=100 och då måste det bli 30*". Elev 8 använder sig av subtraktion och tiokamraterna och säger "j*ag vet att 10-7 är 3 och då bara plussar jag på en nolla"*. Elev 9 använder sig av addition och ekvation för att lösa uppgiften "*70+x= 100 och så är x=30 för att jag vet att 7+3 är 10 och så lägger man bara till en nolla efter".*

Analys

Precis som vid diagnosen kan ett mönster utläsas vid intervjun i valet av räknesätt på uppgift 4.2. Nio av tolv elever använder subtraktion och enbart tre elever använder addition. Detta kan tolkas som att eleverna ser till ordet *mindre* och då löser uppgiften med subtraktion (Malmer 2002). De elever som använder addition kan tolkas använda utfyllnadsmetoden och de elever som räknar med subtraktion använder borttagningsmetoden (Sollervall 2007). Det är flera elever som räknar med "tioskutt" med de båda räknesätten. De som använder addition börjar på 70 och räknar sedan hur många "tioskutt" de behöver ta för att komma till 100, det vill säga 80, 90, 100. En elev gör först om talen till ental och räknar hur många steg det är mellan 7 och 10. De som använder subtraktion börjar istället på 100 och räknar 7 tiotal neråt. Detta kan kopplas till att barn ofta räknar varje steg för sig för att komma fram till svaret (Ahlberg 2001, McIntosh 2008). Även de metoder som de två elever som svarar 20 använder skulle kunna kopplas till denna metod att räkna varje steg. Det är ett vanligt misstag hos elever då de räknar varje steg att räkna fel på ett tal (McIntosh 2008), här blir det ett tiotal istället. Elev 5 använder sig av tiokamraterna (McIntosh 2008, Sollervall 2007). Eleven vet att 7 och 3 är tiokamrater, och kan då omvandla det till 70 och 30 som är hundrakamrater.

Även vid uppgift 4.3 använder eleverna olika metoder. Elev 7 har väldigt svårt att förklara hur hon tänkt, men kommer sedan fram till att hon använder additionen 30+70=100. Även Elev 9 använder en addition, men gör om det till en ekvation 70+x=100. Båda dessa metoder kan ses som utfyllnadsmetoden (Sollervall 2007), då de väljer att räkna ut skillnaden mellan talen med en addition. Elev 8 använder istället en subtraktion, borttagning (Sollervall 2007) och tiokamraterna (McIntosh 2008, Sollervall 2007).

5.2.4 Del 5 – Subtraktionsuppgifter med kontrollräkning

Vid del 5 redovisas först några resultat från intervjuerna igenom, framför allt med fokus på kontrollräkning. Därefter redogörs för uppgiften 85-78=7. Denna uppgift är utvald då den ger ett intressant resultat på diagnosen som vi vill utveckla vid intervjun.

Resultat

De flesta eleverna i årskurs tre behärskar vid intervjun kontrollräkning och vet hur de ska gå tillväga och kan även förklara hur de gör. De flesta eleverna i årskurs två hade svårt för kontrollräkningen i diagnosen. Vid intervjun blir det tydligt att flera elever i årskurs två inte förstår innebörden av kontrollräkning, men att de är bekanta med tillvägagångssättet. Elev 6 i årskurs två kontrollräknade inte på diagnosen men får frågan vid intervjun om hon vet hur hon ska göra vid uppgift 15-10. Hon svarar då *"eftersom att jag försökte liksom att jag försökte göra som [Läraren] brukar säga, att man går baklänges med det funka definitivt inte [...] Jag tänkte att jag tänkte först ut svaret med subtraktion sen så gick jag baklänges alltså 5+10=15 men jag fattade inte den"*. Det är tre elever i årskurs två som kontrollräknar vid diagnosen en av dem är Elev 1. Eleven förklarar hur han gör och nämner vid flera uppgifter att han använder kontrollräkning. Elev 2 och 3 berättar att läraren har gått igenom kontrollräkning efter diagnostillfället, vilket gör att de båda eleverna nu kan vända subtraktionerna till additioner korrekt. Elev 2 kontrollräknar 15-10: "*jag tror att det är 5, så då kan man ju sätta 5:an där och ja plussa ihop 5+10 och det är 15*".

Vid den första uppgiften 15-10 svarar Elev 9 "*jag tog 15-10 och räknade i huvudräkning och så kom jag fram till att det var 5*" vid frågan hur eleven kommer fram till detta svarar han "*för att 10+5 är 15*". Elev 7 får frågan hur hon går tillväga vid uppgiften 90-7 och svarar "*jag räknade 7-9=2 va 0-7 är 0*". Efter en stund av fundering och skrivande svarar eleven igen. Hon skriver en algoritm och får fram svaret 83: "*jag tänkte 9 eller 0-7 går inte och då lånade jag 10 därifrån 9 och 10-7 det är 3, och 8… och det är 8 kvar då blir det 8*". Hon kontrollräknar sedan detta genom att "*jaa för 83+7 är 90, för 7+3 är 10 och då blir det 9 där, 90*". Elev 1 räknar ut 90-7 på följande sätt "*jag tog först 90-5 så då var jag på 85 men då hade jag fortfarande 2 kvar så jag tog dom 2 till då var det bara 83*". Vid uppgiften 45-5 svarar Elev 12 att "*45-5=40 och så tog jag baklänges och då blev det 40 och plus 5 är 45"*. Elev 12 svarar både på subtraktionsuppgiften och på kontrollräkningsuppgiften i samma mening.

Analys

De elever som kontrollräknar korrekt visar att de behärskar reversibilitetsprincipen. Eleverna vänder subtraktionen till en addition vilket visar att de förstår sambandet mellan räknesätten (Canobi 2005). Elev 6 kontrollräknar rätt, men är inte själv medveten om det. Hon påpekar flera gånger att det inte fungerar och att hon inte förstår, men lyckas trots det vända på subtraktionen till en addition. Detta tyder på att hon inte är medveten om hur en kontrollräkning går till, men ser ändå att subtraktionen kan bli en addition (McIntosh 2008). Detta är ett exempel på när elever kan använda sig av matematiska strategier, men inte själva ser sambandet eller kan förklara hur och varför de gör på det sättet (Canobi 2005).

Elev 9 använder sig av addition direkt för att komma fram till att svaret är 5 på frågan 15-10. Han väljer även att räkna ut subtraktionsuppgiften med addition i huvudet men uttrycker först subtraktionen i sitt resonemang. Det tyder på att eleven förstår att det går att räkna addition vid en subtraktionsuppgift vilket indikerar på god taluppfattning. (Löwing 2008). Även att eleven kontrollräknar och vänder på talen tyder på att Elev 9 förstår att en subtraktion och addition är motsatser till varandra (McIntosh 2008).

Elev 7 har tendensen att vända på talen vid förklaring av sitt tillvägagångssätt. Hon får uppgiften 90-7 och kommer fram till korrekt svar men det är svårt att hänga med i hennes resonemang. Som citatet visar har hon först svårt att sätta ord på sin tankegång. Eleven har inte förmågan att förklara sitt resonemang utan stöd från sin skriftliga räkneoperation. När eleven sedan kan förklara utifrån sin skriftliga algoritm blir resonemanget tydligare. Elev 7 vet hur kontrollräkning ska utföras och eleven gör det på korrekt sätt. Att eleven har svårt att förklara sitt resonemang är troligen för att förståelsen för sambandet mellan räknesätten samt tillvägagångssätt utvecklas tidigare än förmågan att kunna förklara sitt tänkande (Canobi 2005). Dock kan eleven förklara delar av sina tankegångar, exempelvis kontrollräkningen och den skriftliga algoritmen. Elev 1 som svarar på samma uppgift som Elev 7 använder sig av borttagningsmetoden (Sollervall 2007) och delar dessutom upp talet 7 i 5+2. Eleven går inte via talet 10 (McIntosh 2008) utan väljer här att gå via 5 för att förenkla uträkningen.

Resultat – Uppgift 85-78

Alla elever får uppgiften 85-78 och deras svar och uträkningar ger ett varierat resultat. Av de 12 elever som intervjuas svarar sex elever det korrekta svaret 7. Tre elever svarar 13, en elev svarar 10 och två elever skriver av en annan elev. Dessa två elever skriver rätt svar men det är tydligt att de skriver av svaret och de kan inte förklara hur de tänker.

De elever som svarar korrekt använder sig av olika strategier. Elev 1 utgår från 78, lägger till 2 och får 80. Därefter räknar eleven från 80 upp till 85 och ser att det behövs 5 till. Eleven adderar 2+5=7. Elev 6 utgår från 78 och räknar hur många ental det är upp till 85: 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85. Tre elever använder sig vid intervjutillfället av algoritmer och kommer fram till svaret 7. Elev 12 väljer att inte skriva hur han räknar, han berättar bara för oss hur han tänker: "*Jaa först tog jag tiotalen, 8-7 det är ju 1 så är det 15 kvar där, och 8 där sen tog jag bort 5 från 8:an och så tog jag bort 5:an där så det blev 10, det jag har kvar är 10-3 och det är 7”.* Han räknar i flera steg för att komma fram till svaret. 80-70=10, 10+5=15, 8-5=3, 15-5=10, 10-3=7.

Vid uppgiften 85-78 syns det hur det kommer sig att flertalet elever svarar 13. Dessa elever beräknar uppgiften genom att först ta tiotalen och sedan entalen för sig. De beräknar 80-70=10 och vid entalen har de vänt på siffrorna och beräknar 8-5 istället för 5-8 och får fram svaret 3, nästa steg är 10+3 som blir 13. Elev 9 får frågan varför han tar 8-5 istället för 5-8 svarar “*för att, jag vet inte jag bara tog det 8-5, kanske för att det var det högsta talet.”* Elev 10 förklarar sitt tillvägagångssätt såhär “*85-78 då tänkte jag först 8 minus, först tänkte jag ta entalen men det gick inte det var lite svårt för jag hade blandat ihop det så tog jag 8-7=1 alltså tiotalen så blev 10 och 8-5=3 och kan man ta 10+3= 13”.*

Elev 3 får vid intervjutillfället fram svaret 10 och förklarar detta genom att “*80 och 70 det blir om man tar bort 70 från 80 det blir 10. Men sen kommer jag inte på det. För att en det blir typ 0 men jag är lite osäker på om det blir 10”.*

Analys

Elev 1 delar upp talen och räknar 78+2=80 följt av 80+5=85, 2+5=7 använder utfyllnadsmetoden (Sollervall 2007) och även att gå via tiotalen för att förenkla uträkningen (McIntosh 2008). Elev 6 som räknar ental använder sig också av utfyllnadsmetoden (Sollervall 2007), men räknar varje steg istället för att dela upp talen.

För många elever verkar det som att svårigheten ligger i tiotalsövergången och att de inte kan räkna ut entalen 5-8. För de eleverna som använder algoritm vid denna uppgift är det tydligt för dem hur de behöver ta ett tiotal från 80 för att då få 15-8=7. När de sedan kommer till tiotalen är det tydligt att 70-70=0. Detta kräver dock en förståelse för hur man ställer upp talen i en algoritm vid subtraktion, vilket kan leda till svårigheter om eleverna inte vet hur de ska gå tillväga (McIntosh 2008). En intressant aspekt är att eleverna vid intervjutillfället blir ombedda att skriva hur de tänker, något de inte gjorde vid diagnosen. Ingen av dessa elever visade på diagnosen hur de tänkt, det är möjligt att de tänkte en algoritm i huvudet, men det är inget som besvaras under intervjun.

Elev 12 använder sig av flera olika metoder. Han börjar med att subtrahera tiotalen (McIntosh 2008) och kommer fram till att skillnaden är 10. Därefter väljer eleven att addera 10 med entalet 5 och får då 15. För att sedan räkna ut 15-8 delar eleven upp talen för att räkna via 10 (McIntosh 2008). Eleven kommer fram till rätt svar, använder sig av flera olika metoder och kan tydligt förklara hur han har tänkt, utan att skriva på pappret. Detta visar på en god taluppfattning hos eleven (Löwing 2008).

Att få fram svaret 13 är en vanlig felberäkning som grundar sig i svårigheten att beräkna entalen 5-8. Strategin att ta tiotal och ental för sig fungerar inte vid denna uppgift då tiotalsövergång krävs. Det är vanligt att elever som räknar 8-5 fastnar och inte kan förklara varför de tar 8-5 istället för 5-8. Denna svårighet är ett vanligt misstag då eleverna tar det högsta talet och subtraherar det minsta (McIntosh 2008). Elev 9 uttrycker just detta att han tagit 8-5 för att det är det högsta talet. Många av eleverna som får fram svaret 13 kan inte förklara varför de tar 8-5 men troligtvis tänker de på samma sätt som elev 9. Att eleverna fastnar vid tiotalsövergången tolkas bero på att de blir osäkra på sitt tillvägagångssätt då tiotals- och entalsstrategin inte fungerar som de tänkt (Malmer 2002).

Elev 3 tar först tiotalen och får fram att det är 10. Men eleven fastnar vid steget efter då hon tolkar att 5-8 ”*är typ 0*”. Eleven är märkbart osäker på sin tankegång vilket även syns i citatet. Strategin att ta tiotal och ental för sig är vanlig och används av många elever (McIntosh 2008). Dock krävs vid denna uppgift att eleven behärskar tiotalsövergången och kan skifta mellan olika strategier vilket behövs för att uppnå god taluppfattning (Löwing 2008).

5.2.5 Sammanfattning av intervjuresultat

Många elever ser sambandet vid del 2 och 3, men vissa elever ser det först när de blir tillfrågade att se efter mönster. I del 2 är det fler elever som använder sig av sambandet vid uppgifterna med de lägre än vid de högre talen. Det är även skillnad mellan årskurserna då eleverna i årskurs tre har lättare för att se och använda sambandet och mönstret. I del 3 är det ungefär hälften som ser att de inte behöver räkna ut uppgifterna där samma term adderas och subtraheras. De ser att svaret är det samma som det första talet i uppgiften.

Ett resultat vid alla uppgifter är att många elever har förmågan att se mönster och samband, men de förlitar sig inte tillräckligt på sambandet som räknestrategi för att använda det. Istället väljer de att räkna varje uppgift stegvis. Vid kontrollräkningen syns det att framförallt eleverna i årskurs tre kan använda sig av sambandet då de har förmågan att vända subtraktionsuppgifter till addition. Det blir tydligt att sambandet mellan addition och subtraktion är en process där eleverna först lär sig se sambandet. Därefter kan de börja använda sig av det och sedan förklara hur de går tillväga och varför. Denna process synliggörs i och med diskussionerna med eleverna.

Eleverna varierar sig mellan att använda borttagningsmetoden och utfyllnadsmetoden. Många elever använder tiokamrater och går via talet tio för att förenkla uträkningarna. Även kompensationsprincipen och reversibilitetsprincipen används. Eleverna använder sig mycket av fingerräkning när de räknar tal för tal neråt eller uppåt. Att dela upp tiotal och ental är en strategi som nästan alla elever använder sig av vid tvåsiffriga tal.

Eleverna med god taluppfattning kombinerar olika strategier för att förenkla sina räkneoperationer.

6 Diskussion

I det här avsnittet redovisas metoddiskussion angående både diagnos och elevintervju samt resultatdiskussion kopplat till frågeställningarna. Avslutningsvis framförs slutsats och förslag på vidare forskning.

6.1 Metoddiskussion

Denna undersökning har gjorts på fyra klasser på två olika skolor i årskurs två och tre. Det gör att resultatet inte kan ses som ett generellt resultat som gäller för alla elever i dessa årskurser, utan gäller bara för de klasser som har undersökts. Däremot var antalet elever som medverkade i undersökningen tillräckligt många för att mönster kunde urskiljas och analyseras.

6.1.1 Diagnos

Årskurs två och tre gjorde samma diagnos för att resultaten skulle kunna vara jämförelsebara. Dock fanns medvetenhet om att diagnosens svårighetsgrad kan vara utmanande för eleverna i årskurs två och även för vissa elever i årskurs tre. En för enkel svårighetsgrad skulle istället bidragit till att fler elever skulle klarat alla frågor, men det hade blivit för lätt för vissa elever och därmed gett ett svårtolkat resultat. De uppgifter som var utmanande, till exempel tretermsuppgifter, 85-78 och kontrollräkningen bidrog till att eleverna fick tänka efter mer och använda olika strategier för att lösa uppgifterna.

Vi valde att använda vardagliga begrepp i diagnosen. Detta hade kunnat göras på annat sätt då mer matematiska begrepp hade kunnat användas. Istället för att skriva "räkna talen" hade det kunnat stå "beräkna uppgifterna". Dock var detta inget som påverkade elevernas resultat i diagnosen, förutom vid del 1. Vi är medvetna om att den första uppgiften är svårtolkad för eleverna och att den hade behövts göras tydligare för att de skulle förstå vad vi var ute efter. Det var meningen att det skulle vara en öppen uppgift, men den blev för öppen och svårtolkad. Detta gjorde att resultatet på denna uppgift var väldigt varierat. Därför valdes uppgiften bort i analysen och även vid intervjuerna. Vi är även medvetna om att 10 är ett tal och inte en siffra, detta var ett misstag som upptäcktes i efterhand.

De resterande uppgifterna i diagnosen gav mer tolkningsbara resultat. Det var dock svårt att avgöra vilka metoder eleverna använt sig av och om de såg sambandet mellan talen och räknesätten. Canobi (2005) betonar att man vid liknande undersökningar måste vara uppmärksam på om det testar elevernas förmåga att se sambanden, eller om de använder andra beräkningsmetoder. Vi var medvetna om att diagnosen inte i samma utsträckning som intervjuerna skulle visa på elevernas metoder, dock visade diagnosen på flera intressanta resultat och mönster i elevernas svar.

6.1.2 Elevintervju

Eleverna förklarade hur de tänkt vid beräkningen av uppgifterna. Det är dock inte säkert att de använde sig av denna strategi när de faktiskt löste uppgifterna. Det kan vara ett sätt för dem att förklara hur de tror att de tänkt, eller hur de tror att intervjuaren vill att de ska förklara. Eleverna genomförde olika uppgifter i de olika grupperna, vilket skulle kunnat ge olika resultat på frågeställningarna.

Vi valde att genomföra intervjuerna i grupper för att eleverna skulle kunna resonera med varandra och känna trygghet under intervjun. Däremot hade intervjuer med eleverna enskilt kanske lett till att eleverna skulle kunnat utveckla sina resonemang utan att bli avbrutna eller distraherade av de andra eleverna och deras tankar. Vid en av intervjuerna var det tydligt att två elever skrev av svaret från en tredje elev på uppgiften 85-78. De kunde då inte förklara hur de tänkt. Hade intervjuerna skett enskilt hade eleverna troligtvis löst uppgiften själva utan att distraheras av de andra. Däremot upplevde vi att gruppintervjuerna ledde till intressanta diskussioner mellan eleverna. De kommenterade och jämförde varandras lösningar och diskuterade de olika mönstren.

6.2 Resultatdiskussion

De två forskningsfrågorna har en tydlig koppling till varandra. Ser eleverna mönstret mellan räknesätten kan de ofta använda det i olika strategier vid matematiska räkneoperationer. Pettersson och Wistedt (2013) poängterar även att matematik kan ses som en kreativ process, vilket stämmer överens med vårt resultat kring hur eleverna visar om de ser och kan använda sig av sambandet mellan addition och subtraktion. De elever som har förmågan att använda fler olika strategier kan kombinera dem för att på ett kreativt sätt komma fram till olika lösningar.

6.2.1 Frågeställning 1 – Sambandet mellan addition och subtraktion

Att lära sig sambandet och förstå relationen mellan addition och subtraktion är en process som sker stegvis. Eleverna ser först att det finns ett samband, därefter kan de börja använda det och slutligen kan de även förklara och resonera kring varför och hur talen hör ihop. Det är även en del elever som omedvetet växlar mellan räknesätten och till exempel räknar ut svaret på de olika textuppgifterna med en addition på uppgifter som skulle kunna ses som subtraktionsuppgifter. Detta skulle kunna förklaras med att barn har lättare för att se och även använda relationen mellan talen än att förklara hur och varför de gör på det sättet (Canobi 2005). En utveckling mellan årskurserna syns i resultatet. Eleverna i årskurs tre har generellt sätt fler rätt, kan kontrollräkna och tydligare förklara hur de tänker. Detta visar på progressionen i deras matematiska utveckling och förståelse för sambandet mellan de två räknesätten.

6.2.2 Frågeställning 2 – Matematiska strategier

Eleverna varierar och anpassar sina strategier framförallt vid tal som är bekanta för dem. Metoder och strategier som de flesta behärskar och väljer att använda sig av är att dela upp talen och utgå från ental och tiotal för sig samt att vända på addition och subtraktion. Det är även vanligt förekommande att de räknar på fingrarna och använder sig av uppåt och neråt räkning med ett steg i taget.

Eleverna vill gärna komma på smarta och enkla lösningar på uppgifterna, men de litar inte alltid på att de mönster de hittar stämmer. Många elever väljer att beräkna uppgifterna även om de kan se att talen hör ihop. De svårigheter som nämns i den teoretiska bakgrunden av bland annat McIntosh (2008) och Malmer (2002) syns i elevernas lösningar och val av strategier. Ett exempel på en vanlig svårighet som är synlig i resultatet är att eleverna subtraherar det minsta från det största talet (McIntosh 2008). Svårigheten att kunna förklara sambandet mellan räknesätten återkommer när eleverna ska förklara vilka strategier de använder för att komma fram till lösningen. En del elever har ofta svårt att sätta ord på varje steg de gör när de räknar. De har väldigt svårt att förklara varför det fungerar att använda olika strategier men ändå komma fram till samma svar. Några elever gör försök att förklara, men har inte tillräcklig förståelse för sambandet eller har inte kännedom om de ord och begrepp som behövs för att kunna förklara de matematiska sambanden och metoderna.

Många elever kan skifta mellan räknesätten och räkna addition vid uppgifter som är subtraktionsuppgifter med lägre tal, det vill säga att de använder utfyllnadsmetoden (Sollervall 2007) eller reversibilitetsprincipen (Canobi 2005, Donaldson 1978). Däremot har många elever svårt att använda denna metod vid uppgifter med högre tal, vilket uppmärksammades vid 85-78. Det var bara ett fåtal elever som vid intervjun utgår från 78 och räknar 7 steg upp till 85. Eftersom många elever svarar fel på denna fråga vid diagnosen tyder även det på att de inte använder utfyllnadsmetoden. En förklaring till detta skulle kunna vara att eleverna är mer bekanta med de lägre talen och då har lättare att se svaret och skifta mellan räknesätt. När de sedan ska räkna ut uppgifter med högre tal har de svårare att använda sig av de strategier de är vana vid, vilket gör att de har svårare att räkna ut svaren.

6.3 Slutsats och förslag till vidare forskning

Många elever ser sambanden mellan uppgifterna, talen och räknesätten. Däremot är det många som inte litar på sambandet, även om de ser att det finns. Det varierar i vilken grad eleverna kan använda sig utav sambandet när de löser uppgifterna. En del elever gör det utan att de själva är medvetna om det. Det är enbart ett fåtal som kan förklara relationen mellan räknesätten.

För att bli bättre i matematik behöver eleverna öva på att tänka flexibelt och reversibelt. Har eleverna en god taluppfattning och en förståelse för räknesättens samband och egenskaper kan de använda det för att växla mellan och kombinera olika strategier.

Efter att ha genomfört studien har vi fått en djupare förståelse och håller fast vid grundtanken att det är viktigt att eleverna tidigt lär sig att se och använda sambanden mellan räknesätten. Har eleverna förmågan att tänka flexibelt förenklar det deras räkneoperationer och ger dem större möjlighet att själva fundera, resonera och hitta lösningar på olika matematiska problem. Det är även av stor vikt att lärare är medvetna om att det är en process att få förståelse för räknesätten. Detta för att kunna synliggöra den för eleverna för att de ska få en djupare förståelse och kunna se, använda och dessutom förklara relationen mellan addition och subtraktion.

Vidare forskning skulle kunna innebära att vidga studiens perspektiv. Antingen fler deltagande elever eller genom att ha med elever från högre årskurser för att kunna göra en jämförelse mellan de olika åldrarna.

Referenser

Ahlberg, Ann (1992*). Att möta matematiska problem: en belysning av barns lärande*. Diss. Göteborg : Univ.

Ahlberg, Ann (2001). *Lärande och delaktighet*. Lund: Studentlitteratur.

Canobi, Katherine H. (2005). Children's profiles of addition and subtraction understanding. *Journal of Experimental Child Psychology* 92(3):220-246. 2005.

Denscombe, Martyn (2009). *Forskningshandboken – för småskaliga forskningsprojekt inom samhällsvetenskapen.* Lund: Studentlitteratur.

Donaldson, Margaret (1978). *Hur barn tänker*. Lund: LiberLäromedel.

Gustavsson, Anders; Måhl, Per; & Sundblad, Bo (2012). *Prov och arbetsuppgifter - en handbok*. Stockholm: Liber.

Löwing, Madeleine (2008). *Grundläggande aritmetik. Matematikdidaktik för lärare.* Lund: Studentlitteratur.

Malmer, Gudrun (1990). *Kreativ matematik.* Solna: Ekelunds förlag.

Malmer, Gudrun (2002). *Bra matematik för alla - Nödvändig för elever med inlärningssvårigheter.* Lund: Studentlitteratur.

McIntosh, Alistair (2008*). Förstå och använda tal – en handbok. Göteborg: Nationellt centrum för matematikundervisning* (NCM), Göteborgs universitet.

Peters, Greet; De Smedt, Bert; Torbeyns, Joke; Ghesquiere, Pol & Verschaffel, Lieven (2012). Children's Use of Subtraction by Addition on Large Single-Digit Subtractions. *Educational Studies in Mathematics*, 79(3):335-349. 2012.

Pettersson, Eva & Wistedt, Inger (2013). *Barns matematiska förmågor – och hur de kan utvecklas.* Lund: Studentlitteratur.

Piaget, Jean (1997[1952]). Selected works. Vol. 2, *The child's conception of number.* London: Routledge.

Skolverket (2011). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011.* Stockholm: Skolverket.

Sollervall, Håkan (2007). *Tal och de fyra räknesätten.* 1. uppl. Lund: Studentlitteratur.

Vetenskapsrådet (2002). *Forskningsetiska principer inom humanistisksamhällsvetenskapligforskning.* Stockholm: Vetenskapsrådet.

Bilagor

Bilaga A Diagnos

Namn och klass____________________

1. Bilda så många tal du kan med siffrorna: 4, 6 och 10. Använd både addition och subtraktion.

2. Räkna talen.

16 - 7 =________	11 - 5 =________
16 - 9 =________	11 - 6 =________
7 + 9 =________	6 + 5 =________
63 + 22 =______	44 + 34=______
85 - 63 =______	78 - 44 =______
85 - 22 =______	78 - 44 =______

3. Räkna talen

12 + 7 - 7 =____________	7 - 5 + 7 =____________
5 + 8 - 8 =____________	11 - 8 + 11=___________
80 - 2 +3 =____________	67 + 11 -11=___________
70 + 2 - 3 =____________	12 + 15 - 15=__________

4. Rita och skriv hur du tänker!

4.1 Rikard är 10 år. Hur länge dröjer det tills han blir 18 år?

4.2 Pelle har 100 kr. Eva har 70 kr mindre än Pelle. Hur mycket har Eva?

4.3 Peter har 100 kr. Ida har 70 kr. Hur mycket mer har Peter?

4.4 Eva vill köpa en glass för 18 kr, men hon har bara 15 kr. Hur mycket pengar fattas?

4.5 Eva tappade 3 kr och har nu bara 15 kr. Hur mycket pengar hade hon förut?

5. Räkna

15 - 10 = Kontrollräkna med addition

90 - 7 = Kontrollräkna med addition

154 - 54 = Kontrollräkna med addition

85 - 78 = Kontrollräkna med addition

45 - 5 = Kontrollräkna med addition

Bilaga B Manus för presentation av diagnos

- Diagnosen är till för att vi gör ett arbete om addition och subtraktion
- Gör så gott du kan, kan du inte svaret på alla frågor så gör det inget, vill du så får du gissa.
- På första sidan ska ni bilda egna tal och sedan räkna ut några additions och subtraktionsuppgifter
- På andra sidan är det läsförståelseuppgifter där ni även ska visa hur ni tänkt när ni räknat. Ni kan antingen skriva eller rita eller göra både och. Är det någon som tycker att det är svårt att läsa så räck upp handen så kommer någon av oss och läser uppgiften.
- På sista sidan är det några subtraktionsuppgifter. Där står det även att ni ska kontrollräkna med addition. Vet du inte hur man gör så gör det inget, då räcker det att ni skriver svaret på uppgiften. Men vet du hur man kontrollräknar så kan du göra det också.
- När ni är klara så kommer ni fram till oss/räcker upp handen så kommer vi till er.
- Frågor?

Bilaga C Information till vårdnadshavare

Hej! Vi heter Sofia Leo och Rebecka Åström och vi går sista terminen på lärarutbildningen med inriktning förskoleklass och årskurs 1-3 på Linneuniversitetet. Vi skriver vårt examensarbete och gör en studie om sambandet mellan addition och subtraktion.

I undersökningen kommer vi att genomföra en diagnos i klassen. Därefter kommer vi att välja ut ett antal elever som vi intervjuar i smågrupper. Under intervjun samtalar vi om olika additions- och subtraktionsuppgifter och ber eleverna förklara sin tankegång. Samtalet kommer att spelas in, men inte filmas. Materialet kommer enbart att användas för denna undersökning och alla elever som deltar kommer att vara helt anonyma och inga namn kommer att nämnas.

Eftersom eleverna är minderåriga behöver vi både elevens och vårdnadshavares medgivande för att delta i intervjun. Var vänlig att fyll i ditt svar nedan och ta med till skolan så snart som möjligt.

Har ni några frågor får ni gärna höra av er!

Med vänliga hälsningar
Sofia Leo sl222ma@student.lnu.se
Rebecka Åström ra222fh@student.lnu.se

- ☐ Ja, mitt barn får delta i intervjun.
- ☐ Nej, mitt barn får inte delta i intervjun.

Elevens namn

____

Vårdnadshavares underskrift

____

Bilaga D Intervjuguide

Intervjuguide

Vi gav eleverna ett blankt exemplar av diagnosen som de fick se på under intervjun. Vi hade även med deras diagnoser som de skrev förra gången så att vi kunde referera till dem vid behov. Vi valde ut några uppgifter som vi frågade beroende på hur de svarat på diagnosen. Eleverna fick först en liten stund att tänka igenom svaret igen och sedan berätta hur de räknar. Eleverna fick ha kladdpapper till hjälp om de vill. Därefter fick de en i taget berätta hur de tänkt. Vi ställde följdfrågor och gav även de andra eleverna möjlighet att kommentera. Eftersom vi har sett på olika resultat i de olika klasserna valde vi olika uppgifter att diskutera på intervju.

- Kommer ni ihåg diagnosen ni gjorde förra veckan/för några dagar sedan?
- Vad tyckte ni om diagnosen?
- Hur gjorde ni när ni räknade ut denna uppgift?
- Vilket tal började du på?
- Vilket räknesätt använde du?
- Ser du något samband mellan de olika uppgifterna?
- Ser du något mönster i uppgifterna och svaren?
- Skulle man kunna kontrollräkna uppgiften? Hur då?
- Finns det andra sätt att lösa uppgiften på?
- Elev X och elev Y har gjort på olika sätt men ändå kommit fram till samma svar, varför tror ni att det kan bli så?

Lnu.se

Linnéuniversitetet
Kalmar Växjö

Fakulteten för teknik
391 82 Kalmar | 351 95 Växjö
Tel 0772-28 80 00
teknik@lnu.se
Lnu.se/fakulteten-for-teknik