Att utveckla elevernas problemlösningsförmåga

Ingemar Holgersson, Högskolan Kristianstad

Problemlösning är en grundläggande matematisk aktivitet. Egentligen kan man nog påstå att alla matematikens resultat i form av teorier, begrepp eller formler har sitt ursprung i någon form av problemlösande eller undersökande aktivitet. En matematiker formulerar egna problem: Vad händer om jag gör så här istället eller om jag ändrar något villkor? osv. I skolan är det vanligt att man som elev får arbeta med uppgifter som är mycket mer avgränsade och där frågeställningen bestämts av någon annan, av läromedelsförfattare eller av lärare.

Hur kan man bli bättre på att lösa problem i matematik? En utgångspunkt för att svara på denna fråga är att beskriva vad som kännetecknar personer som är duktiga i matematik. Den ryske forskaren Krutetskii publicerade på 1970-talet en bok, där han går igenom och beskriver vad som kännetecknar elever med det han kallar matematisk begåvning. Den engelska forskaren Anne Watson (professor i matematikdidaktik vid Oxford University) har sammanställt både sitt arbete med lärare och sitt arbete med s.k. svagpresterande elever på engelska motsvarigheterna till högstadiet och gymnasiet i en bok med titeln Raising achievement in secondary mathematics. Där finner hon, att det lärarna identifierar som uttryck för god förmåga i hög grad liknar Krutetskiis lista över kännetecken på matematisk begåvning. Men hon finner även att svagpresterande elever kan uppvisa sådana egenskaper om rätt omständigheter ges.

Ett annat sätt att försöka besvara frågan är att beskriva hur duktiga problemlösare går till väga. De använder sig oftast av många olika strategier, såsom att först lösa en enklare variant av det givna problemet, att rita en figur, göra upp en tabell, eller att arbeta baklänges osv. En tanke som ligger nära till hands är då att lära ut olika sådana strategier, ofta en i taget, för att eleverna ska bli bättre rustade att lösa problem. Sedan 1980-talet har det framför allt i USA genomförts flera omfattande projekt, där inlärning av sådana metoder varit i fokus för att förbättra resultaten i problemlösning. Efter mer än trettio års erfarenheter av detta arbete har man dock konstaterat att förbättringen endast är marginell (English, Lesh och Fennewald, 2008). Det verkar som om den flexibilitet och förmåga att anpassa olika strategier till olika situationer, som utmärker en god problemlösare, utvecklas framför allt genom att eleverna får erfarenhet av att lösa många och olika sorters problem, först enklare och efter hand svårare och svårare. Men man lär inte denna flexibilitet i första hand genom att öva enskilda strategier, som sedan kombineras, utan genom att tvingas hantera en allt mer komplex helhet.

I Gy 11 finns problemlösning med både som en förmåga och som ett centralt innehåll. Det som emellertid gör att problemlösningen är speciell i förhållande till annat centralt innehåll är bl.a. att den är av en annan karaktär, genom att innehållet i olika problem kommer från en eller flera av de andra centrala momenten. Problemlösningens innehåll ligger därmed på någon form av metanivå. När man löser ett problem försöker man först sätta sig in i den situation som beskrivs. Detta kan vara ganska rakt fram eller kan kräva att man, t ex via att testa vad som händer i ett par enkla fall, får ett bättre grepp om problemet. Många problem förutsätter att man har en viss repertoar av matematiska verktyg eller metoder, för att kunna utföra olika former av beräkningar och visualiseringar i form av diagram, figurer eller andra sorters bilder. Men i problemlösningen ligger också olika sätt att resonera. För att övertyga några andra om att man verkligen löst ett problem måste man ge argument som i princip kan övertyga alla andra. Dessa argument kan i skolmatematiken vara formulerade med hjälp av ett mer eller mindre informellt språk, medan man inom matematisk vetenskap endast godtar formella bevis.

Det som gör problemlösning till den mest fundamentala matematiska aktiviteten, är att alla de andra förmågorna på ett naturligt sätt kommer till användning i problemlösning. Matematisk kunskap växer inte enbart i takt med hur många begrepp eller metoder vi behärskar. I själva verket är inte ett begrepp något som vi antingen förstått en gång för alla eller inte, utan något där förståelsen också ökar beroende på vilka olika situationer vi möter begreppet i. Därför innebär också en central del av utvecklingen av matematisk förmåga av att bli förtrogen med olika problemsituationer, där den förståelse och de metoder vi behärskar får nya utmaningar.

Hur kan man då arbeta för att ge eleverna bättre förutsättningar att utveckla sina matematiska förmågor? För att man ska utveckla sin problemlösningsförmåga behöver man för det första få tillfälle att självständigt fundera över och lösa problem. Inte genom mallar för hur man ska göra, utan genom att man lär sig att utnyttja och förädla sin egen förmåga att tänka och resonera. Kort sagt, eleverna behöver bjudas in till att bli mer intellektuellt aktiva. Och klassrumsklimatet behöver då vara öppet för olika sätt att tänka och att göra misstag. Att ha mindre fokus på rätt eller fel och mer fokus på olika sätt att tänka är en förutsättning för att få igång en sådan process. Bjuder man som lärare in eleverna till att berätta om hur de tänker, behöver man också värna om ett klimat där detta ses som en tillgång för det gemensamma arbetet med att utveckla förmågorna.

Vad kan man då bygga på när det gäller att arbeta med att utveckla problemlösningsförmåga? I sin bok pläderar Anne Watson för att alla elever har en medfödd och ”naturlig förmåga”. Exempel på sådana ”naturliga förmågor” är:

• att se, upptäcka och föreställa sig olika mönster

t ex se mönster hos koefficienterna för två punkter som ligger på en linje med riktningskoefficient lika med 2

• att uttrycka dessa mönster i ord, bild, handling, eller symboler

t ex rita en skiss som förklarar sambandet mellan koefficienterna på en rät linje

• att arbeta med specialfall för att upptäcka eventuella mönster

t ex ta fram olika exempel på rektanglar med arean 0,9 ha för att studera den möjliga variationen

• att formulera hypoteser om generella samband

t ex formulera med ord hur koefficienterna för två punkter som ligger på en linje med riktningskoefficient lika med 2 (eller mer generellt lika med k) hänger ihop

• att modifiera sådana hypoteser för att försöka övertyga sig själv och andra

t ex pröva en hypotes på nya värden och justera hypotesen efter utfallet av prövningen

Genom att arbeta med väl valda och för olika grupper anpassade problemställningar kan eleverna ges möjlighet att utveckla och förädla dessa naturliga förmågor. Tanken med denna del i modulen är därför att ni under moment C, genom att erbjuda eleverna en öppen uppgift att arbeta med, ska få möjlighet att studera vilka naturliga förmågor som eleverna i den specifika klassen ger uttryck för.

Referenser

English, L. D., Lesh, R. & Fennewald, T. (2008). Future directions and perspectives for problem solving research and curriculum development. Paper presented at ICME 11, Monterrey, Mexico.

Krutetskii, V. A. (1976) The Psychology of Mathematical Abilities in School Children: University of Chicago Press.

Watson, A. (2006). Raising achievement in secondary mathematics. Maidenhead: Open University Press.