Matematiska resonemang i en lärandemiljö med dynamiska matematikprogram

Mats Brunström

Fakulteten för hälsa, natur- och teknikvetenskap

Matematik

DOKTORSAVHANDLING | Karlstad University Studies | 2015:12

Matematiska resonemang i en lärandemiljö med dynamiska matematikprogram

Mats Brunström

DOKTORSAVHANDLING | Karlstad University Studies | 2015:12

Matematiska resonemang i en lärandemiljö med dynamiska matematikprogram

Mats Brunström

DOKTORSAVHANDLING

Karlstad University Studies | 2015:12

urn:nbn:se:kau:diva-35037

ISSN 1403-8099

ISBN 978-91-7063-623-3

© Författaren

Distribution:
Karlstads universitet
Fakulteten för hälsa, natur- och teknikvetenskap
Institutionen för matematik och datavetenskap
651 88 Karlstad
054 700 10 00

Tryck: Universitetstryckeriet, Karlstad 2015

WWW.KAU.SE

Förord

Efter några intensiva och lärorika år har det nu äntligen blivit dags att lämna in avhandlingen till tryckeriet. Ja, det blev faktiskt en bok till slut! När jag tänker tillbaka på den här tiden är det många minnen som dyker upp från kurser, konferenser, insamling och analys av data, artikelskrivande och artikeldiskussioner och det är många jag vill tacka.

Först vill jag tacka mina handledare! När jag började mina doktorandstudier var det Gunnar Gjone som var min huvudhandledare och Thomas Martinsson som var min biträdande handledare. Förutom att Gunnar var handledare höll han i flera av de kurser jag läste i början av doktorandtiden. Tack Gunnar! Thomas har gett mig mycket inspiration genom åren, ända sedan jag började jobba på det som på den tiden hette Högskolan i Karlstad. Det var dessutom Thomas som i början av 90-talet introducerade mig för ett dynamiskt geometriprogram. Tack Thomas! Både Gunnar och Thomas har gått i pension under min tid som doktorand och två nya handledare har tagit över, Kenneth Ruthven som huvudhandledare och Arne Engström som biträdande handledare. Thank you very much Ken for all your help! Your comments and suggestions on paper drafts have been most valuable and it has always been a pleasure to discuss different questions with you. It has been a privilege! Arne har varit min handledare på hemmaplan. Det har känts tryggt att ha Arne några rum bort och ha möjlighet att få goda råd när problem har uppstått. Tack Arne!

Jag vill även tacka både tidigare och nuvarande kollegor på matematikavdelningen vid Karlstads universitet där jag har jobbat och trivts väldigt bra i snart 25 år. De senaste åren har det varit fokus på matematikdidaktisk forskning och där har jag haft god hjälp av medarbetare från matematikavdelningen och inom forskargruppen SMEER. Tack till alla er som kommit med synpunkter längs vägen, det har varit väldigt värdefullt! Speciellt vill jag tacka Maria Fahlgren. Det har varit en stor fördel för mig att ha dig som doktorandkollega med samma forskningsinriktning. Vi har kunnat diskutera artiklar, vara varandras bollplank, hjälpas åt med datainsamling och analys och dessutom har vi skrivit två gemensamma artiklar. Tack även till Morten Blomhøj för värdefulla synpunkter vid mitt 90% seminarium.

Utan de empiriska studier som gjorts hade det inte blivit någon avhandling. Stort tack till både lärare, elever, studenter och doktorander som har medverkat!

Slutligen vill jag tacka min kära familj som betyder så mycket! Tack för allt stöd Birgitta, Mattias, Joakim och Anton!

Karlstad, februari 2015
Mats Brunström

Förteckning över artiklar

Artikel 1

Fahlgren, M. & Brunström, M. (2014). A model for task design with focus on exploration, explanation, and generalization in a dynamic geometry environment. *Technology, Knowledge and Learning, 19*(3), 287–315.

Artikel 2

Brunström, M. (2015a). An expanded version of Toulmin's model to analyse students' mathematical reasoning in a dynamic software environment. *Manuscript submitted for publication.*

Artikel 3

Brunström, M. (2015b). Students' mathematical reasoning in a dynamic software environment. *Accepted, subject to revision in Nordic Studies in Mathematics Education.*

Artikel 4

Brunström, M. & Fahlgren, M. (in press). Designing prediction tasks in a mathematics software environment. *International Journal for Technology in Mathematics Education.*

Samförfattarskap

Artikel 1 och artikel 4 har jag skrivit tillsammans med min doktorandkollega Maria Fahlgren. Vi står som huvudförfattare till varsin artikel, men egentligen har båda två bidragit lika mycket till båda artiklarna. Vi har hjälpts åt med samtliga delar av den process som till slut har resulterat i respektive artikel, det vill säga bakgrundsarbete, insamling och analys av data samt artikelskrivande.

Innehåll

1 Introduktion

Under senare tid har olika forskare, både nationellt och internationellt, försökt beskriva matematisk kunskap utifrån olika matematiska kompetenser eller förmågor (t.ex. Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001; Niss, 2003). Resonemangsförmågan är en av de förmågor som lyfts fram i samtliga dessa beskrivningar. Synen på matematiskt kunnande utifrån olika förmågor återspeglas även i olika länders styrdokument (Goos, Galbraith, Renshaw, & Geiger, 2003) samt i de teoretiska ramverk som styr internationella undersökningar som exempelvis TIMMS (Mullis & Martin, 2013). I den svenska ämnesplanen i matematik för gymnasiet (Skolverket, 2011b) lyfts sju olika förmågor fram, som eleverna ska ges möjlighet att utveckla i samtliga matematikkurser. I grundskolans kursplan i matematik (Skolverket, 2011a) är det fem förmågor som lyfts fram. En förmåga som betonas i båda dessa styrdokument handlar just om matematiska resonemang. I gymnasiets ämnesplan står det att eleverna ska ges förutsättningar att utveckla förmåga att ”följa, föra och bedöma matematiska resonemang” (Skolverket, 2011b, s. 90). I resonemangsförmågan ingår bland annat att hitta mönster, formulera hypoteser och att undersöka dessa hypoteser vidare (Skolverket, 2012).

Den svenska matematikundervisningen har nyligen granskats, både inom grundskolan (Skolinspektionen, 2009) och gymnasieskolan (Skolinspektionen, 2010). Resultat från dessa granskningar visar att läroboken har en dominerande roll och att eleverna använder en stor del av tiden till färdighetsträning. De flesta elever får begränsad möjlighet att engagera sig i aktiviteter som problemlösning, matematisk kommunikation och matematiska resonemang. Dessa granskningar gjordes visserligen innan de nu gällande styrdokumenten infördes, men även de tidigare styrdokumenten innehöll tydliga skrivningar om t.ex. problemlösning, kommunikation och resonemang (Skolverket, 2000a, 2000b).

Under senare tid har tillgången till digital teknik i skolan ökat markant. Idag är det många skolor, i Sverige och i många andra länder, som förser sina elever med en egen dator (Grönlund, 2014; Valiente, 2010). Dock har datorer ofta köpts in utan att lärarna fått någon egentlig kompetensutveckling när det gäller hur datorn kan användas som ett pedagogiskt hjälpmedel i undervisningen (Skolinspektionen, 2012). Detta gäller inte minst i ämnet matematik som tillhör de ämnen där datorn används allra minst i Sverige (Skolverket, 2013). När datorn används är det dessutom ofta frågan om färdighetsträning där uppgifterna som ges inte skiljer sig markant från de uppgifter som normalt ges i läroboken (Bottino & Kynigos, 2009). Det finns dock andra typer av program som har potential att bidra till en förändrad matematikundervisning. Exempelvis finns det idag olika dynamiska matematikprogram som ger möjlighet till ett laborativt och undersökande arbetssätt, där elever själva kan upptäcka olika matematiska samband (t.ex. Arcavi & Hadas, 2000; Goos m.fl., 2003; Healy & Hoyles, 2002). Detta i sin tur ger nya möjligheter att stimulera elever till matematiska resonemang, inte minst när det gäller att formulera och undersöka egna hypoteser (t.ex. Baccaglini-Frank & Mariotti, 2010; Ruthven, Hennessy, & Deaney, 2008).

Sammanfattningsvis är utgångspunkten för mitt val av forskningsområde att resonemangsförmågan är en väsentlig förmåga som elever får begränsad möjlighet att utveckla, samtidigt som tillgången till datorer är god och det finns dynamiska matematikprogram som kan utnyttjas för att stimulera matematiska resonemang.

Forskning visar dock att det inte räcker med god datortillgång och ändamålsenliga program för att de möjligheter som ges ska utnyttjas på ett bra sätt (Drijvers, Doorman, Boon, Reed, & Gravemeijer, 2010; Pierce & Ball, 2009). Bland annat krävs nya typer av uppgifter (Doorman m.fl., 2007; Fuglestad, 2007; Hitt & Kieran, 2009; Laborde, 2001). Matematiklärare och forskare behöver därför arbeta fram, utvärdera och beskriva uppgifter och undervisningssituationer där dynamiska matematikprogram utnyttjas på ett sätt så att elever ges möjlighet att utveckla olika matematiska förmågor, inte minst förmågan att föra matematiska resonemang. Vidare behövs mer kunskap om vilka typer av resonemang som kan utvecklas i dessa situationer. Enligt Smith (2010) råder det brist på forskning som studerar elevers matematiska resonemang, med fokus på struktur och innehåll, när de använder dynamiska matematikprogram.

1.1 Syfte

Det övergripande syftet med avhandlingen är att undersöka hur dynamiska matematikprogram kan användas för att öka möjligheterna för elever att utveckla sin förmåga att föra matematiska resonemang. Detta görs dels genom att fokusera på design av uppgifter i en lärandemiljö med dynamiska matematikprogram och dels genom att studera och karakterisera de resonemang som utvecklas när elever jobbar med olika uppgifter i denna miljö. Utifrån syftet har fyra olika aspekter identifierats, vilka behandlas i de fyra artiklarna enligt följande:

- design av uppgifter som stimulerar till matematiska resonemang (artikel 1 och 4),
- utvecklandet av analysverktyg för att beskriva och analysera elevers resonemang (artikel 2 och 4),
- karakterisering av de resonemang som utvecklas när elever jobbar med olika uppgifter (artikel 1, 3 och 4),
- kartläggning av hur datorn används för att stödja dessa resonemang (artikel 1, 3 och 4)

Olika typer av forskning behövs inom det problemområde som utgör utgångspunkt för avhandlingen. För att inte tappa fokus har ett antal viktiga avgränsningar varit nödvändiga att göra. Två faktorer som inte behandlas i avhandlingen, men som är avgörande för elevernas möjlighet att utveckla sin resonemangsförmåga, är lärarnas agerande och de sociala och sociomatematiska normer som utvecklas i klassrummet (Yackel & Cobb, 1996). En annan viktig avgränsning är att interaktionen mellan elever inte undersöks trots att eleverna arbetar parvis i samtliga studier.

1.2 Avhandlingens disposition

Avhandlingen består av fyra artiklar och en sammanbindande kappa. I kappan, som kommer först i avhandlingen, ingår åtta kapitel. Efter introduktionen där även syftet med avhandlingen presenteras följer ett bakgrundskapitel med en forskningsöversikt. I detta kapitel behandlas forskning om matematiska resonemang, speciellt matematiska resonemang i en lärandemiljö med dynamiska matematikprogram. Dessutom behandlas forskning om uppgiftsdesign i denna lärandemiljö.

Kappans tredje kapitel behandlar teoretiska utgångspunkter. Det inleds med en genomgång av olika sätt att se på matematik som vetenskap och kopplingen till matematik som skolämne. Därefter presenteras Toulmins modell, som är den analysmodell som har legat till grund för utvecklandet av en ny analysmodell som används i avhandlingen. Kapitlet avslutas med en genomgång av forskning kring olika perspektiv på funktioner. I kapitel 4 diskuteras några av de metoder som används i avhandlingen och i kapitel 5 ges en sammanfattning av de fyra artiklarna som ingår i avhandlingen.

I kappans sjätte kapitel presenteras och diskuteras avhandlingens slutsatser utifrån de fyra aspekterna som lyfts fram i syftesbeskrivningen. Dessa slutsatser bygger på de olika delstudiernas resultat i förhållande till varandra och i förhållande till tidigare forskning. I det sjunde kapitlet diskuteras sedan avhandlingens bidrag till undervisningspraktiken samt avhandlingens teoretiska bidrag. Dessutom diskuteras forskningens kvalitet och förslag ges till vidare forskning. Kappans åttonde och sista kapitel består av en engelsk sammanfattning. Efter kappan följer avhandlingens andra del bestående av de fyra artiklarna.

1.3 Några kommentarer till hur texten är skriven

I de empiriska studier som legat till grund för avhandlingen har gymnasieelever, universitetsstudenter och även i viss mån doktorander medverkat. I de fall en speciell studie diskuteras i kappan används benämningen elever, studenter eller doktorander, beroende på vilken studie det gäller. Vid mer övergripande diskussioner har jag vanligtvis valt att bara skriva ”elever” istället för det mer omständliga ”elever/studenter” eller ”elever/studenter/doktorander”. Detta eftersom det är gymnasiematematik som studeras både av eleverna i artikel 4 och studenterna i artikel 3 (naturvetenskapligt basår).

I den engelskspråkiga forskningslitteraturen förekommer många specifika begrepp, inom det område som behandlas i avhandlingen. I vissa fall har jag valt att behålla den vedertagna engelska benämningen istället för att göra en svensk översättning. Exempelvis används ”prediction task”, scaffolding” och ”instrumental genesis”.

2 Bakgrund

I detta kapitel presenteras först olika sätt att definiera matematiska resonemang samt den syn på matematiska resonemang som ligger till grund för avhandlingen. Vidare definieras några olika typer av resonemang. Därefter presenteras forskning om matematiska resonemang i skolan. Kapitlets tredje avsnitt handlar om dynamiska matematikprogram och de möjligheter och utmaningar som denna typ av program ger. Därefter kommer ett avsnitt som behandlar forskning med fokus på matematiska resonemang i en lärandemiljö med dynamiska matematikprogram. Kapitlets sista avsnitt fokuserar på design av uppgifter som stimulerar till matematiska resonemang i en lärandemiljö med dynamiska matematikprogram.

2.1 Matematiska resonemang

Trots att det råder stor enighet om att förmågan att föra matematiska resonemang är central i matematik finns det ingen allmänt accepterad definition av matematiska resonemang (Yackel & Hanna, 2003). I matematikdidaktisk forskningslitteratur förekommer olika definitioner av resonemang och dessutom olika sätt att se på kopplingen mellan resonemang och argumentation. Bergqvist, Lithner och Sumpter (2008) har följande utgångspunkt:

> ‘Reasoning’ in this paper is the line of thought, the way of thinking, adopted to produce assertions and reach conclusions... *Argumentation* is the substantiation, the part of the reasoning that aims at convincing oneself, or someone else, that the reasoning is appropriate (s. 2).

I denna definition ses alltså ”argumentation” som en del av ”reasoning”. Lavy (2006) byter i stort sett plats på de båda begreppen och ser “reasoning” som den del av “argumentation” som förklarar varför det är rimligt att dra en viss slutsats utifrån den fakta som legat till grund för slutsatsen. Han skriver ”In order to establish the validity, or the correctness of the claim, one needs to use reasoning” (s. 157). Walton (1990) försöker reda ut begreppen i artikeln *What is reasoning? What is an argument?* Efter att ha jämfört olika definitioner av de båda begreppen ger han sin egen definition:

> *Reasoning* is the making or granting of assumptions called premises (starting points) and the process of moving toward conclusions (end points) from these assumptions by means of warrants. A warrant is a rule or frame that allows the move from one point to the next point in the sequence of reasoning (s. 403).
>
> *Argument* is a social and verbal means of trying to resolve or at least to contend with, a conflict or difference that has arisen or exists between two (or more) parties. An argument necessarily involves a claim that is advanced by at least one of the parties (s. 411).

Enligt Walton (1990) kan resonemang förekomma både vid argumentation och i andra sammanhang. Det råder alltså delade meningar om kopplingen mellan resonemang och argumentation och/eller argument. Dessutom kan sambandet mellan argumentation och argument ses på olika sätt. Krummheuer (1995) betonar att argumentation handlar om interaktion mellan individer och att argument kan ha två olika betydelser, dels som den del av argumentationsprocessen där ett påstående bestyrks eller förklaras och dels som produkten av en argumentation. I denna avhandling kommer termerna argument och argumentation att undvikas i möjligaste mån, dels för att fokus i studien inte ligger på interaktionen mellan studenter och dels för att undvika missförstånd. Däremot är det viktigt att fastslå vilken syn på matematiska resonemang som ligger till grund för avhandlingen. För att göra detta ges ytterligare två citat. Boesen (2006) beskriver vad som ingår i resonemangskompetensen på följande sätt.

> With reasoning we here have in mind an argumentation done on general logical and specific theoretical grounds, including deductive reasoning where assertions are done based on specific assumptions and rules and where the strictest version constitutes a mathematical proof. The competence also includes inductive reasoning, where general statements can be reached based on observations of patterns and regularities. This means that the competence could involve an element of investigative activity in finding patterns, formulating, improving and examine different hypothesizes. It also involves critical examinations of proofs and other mathematical statements (ss. 35-36).

Enligt Kilpatrick m.fl. (2001) har matematiska resonemang vanligtvis sammankopplats med deduktiva resonemang, speciellt i form av formella bevis. De introducerar begreppet ”Adaptive reasoning” och förklarar att ”Our notion of adaptive reasoning is much broader, including not only informal explanation and justification but also intuitive and inductive reasoning based on pattern, analogy, and metaphor” (s. 129). Den breda syn på matematiska resonemang som både Boesen (2006) och Kilpatrick m.fl. (2001) ger uttryck för stämmer väl överens med många andra dokument där skolmatematik behandlas (t.ex. NCTM, 2000; Stylianides, 2008). Den stämmer även väl överens med det synsätt som används i denna avhandling.

I den syn på matematiska resonemang som används i avhandlingen ingår aktiviteter som att förutsäga, hitta mönster, ställa hypoteser, motivera, generalisera, förklara och bevisa. Denna syn inbegriper deduktiva, induktiva och abduktiva resonemang och omfattar såväl formella som informella och intuitiva resonemang. Nedan definieras några olika typer av resonemang som ryms inom ramen för denna syn på matematiska resonemang.

Deduktiva resonemang är resonemang där logiskt giltiga slutsatser dras utifrån de förutsättningar som antas gälla (t.ex. Harel & Sowder, 2007).

Induktiva resonemang är resonemang där hypoteser i form av generaliseringar ställs utifrån ett antal specialfall (t.ex. Pedemonte, 2007).

Abduktiva resonemang är resonemang där hypoteser ställs angående hur observationer eller fakta av något slag kan förklaras. Om hypotesen visar sig vara sann är sedan själva förklaringen en formsak (t.ex. Baccaglini-Frank, 2011).

Visuella resonemang är resonemang som utgår ifrån, bearbetar och/eller uttrycks i form av visuell information. Hershkowitz (1990) menar att visuella resonemang ”generally refers to the ability to represent, transform, generalize, communicate, document, and reflect on visual information” (s. 75).

Symboliska resonemang definieras i denna avhandling som resonemang som utgår ifrån, bearbetar och/eller uttrycks i form av numerisk eller algebraisk information.

Konceptuella resonemang definieras i denna avhandling som resonemang som bygger på antaganden om matematiska begrepp och/eller relationer.

De ovan definierade resonemangstyperna förekommer vanligtvis i olika kombinationer. Exempelvis kategoriseras de resonemang som identifieras i artikel 4 på följande sätt: induktiva visuella resonemang, konceptuella visuella resonemang, induktiva symboliska resonemang och konceptuella symboliska resonemang.

2.2 Matematiska resonemang i klassrummet

Som tidigare nämnts råder det stor enighet om att förmågan att föra matematiska resonemang är en viktig matematisk kunskap. Detta återspeglas inte minst i de olika ramverk som på senare tid tagits fram för att beskriva vilka förmågor som är centrala i matematik (t.ex. Kilpatrick m.fl., 2001; NCTM, 2000; Niss, 2003) samt i olika länders styrdokument (Goos m.fl., 2003). I *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000) står bland annat ”Being able to reason is essential to understanding mathematics” (s. 56). Vidare skriver Ball och Bass (2003) i den forskningsöversikt som tagits fram som stöd för ovanstående dokument att ”mathematical reasoning is as fundamental to knowing and using mathematics as comprehension of text is to reading” (s. 29). Krummheuer (1995) lyfter fram kommunikationens betydelse och betonar att det råder stor enighet om att aktivt deltagande i en mellanmänsklig kommunikation som bygger på matematiska resonemang har positiv effekt på den matematiska förståelsen. Även Herheim (2010) har fokuserat på kommunikationens betydelse. Han har skrivit en forskningsöversikt kring elevers kommunikation när de jobbar i smågrupper med tillgång till dator. Gemensamt för den litteratur som har granskats är att den utgår från ett sociokulturellt lärandeperspektiv. En viktig slutsats är att elevers lärande gynnas av en kreativ, utforskande och utmanande kommunikation där de uppmuntras att konstruera och formulera förklaringar.

Trots enigheten om de matematiska resonemangens betydelse dominerar fortfarande enskild tyst räkning i boken, med fokus på olika procedurer, både i Sverige och i andra länder (t.ex. Gill & Boote, 2012; Skolinspektionen, 2009, 2010). Många elever får alltså inte chansen att utveckla sin förmåga att resonera kring matematiska begrepp och samband. Dock är det viktigt att poängtera att det är fullt möjligt att jobba på ett sätt, redan med yngre elever, som främjar matematiska resonemang (Lampert, 1990; Monaghan, 2005; Yackel & Cobb, 1996).

I det brittiska projektet *Thinking Together* visar flera studier att elever i olika åldrar kan utveckla ”explanatory talk” inom olika ämnen, däribland matematik (Monaghan, 2005). Denna typ av samtal karakteriseras av ett kritiskt och konstruktivt engagemang där olika idéer och förslag utmanas och diskuteras och där elevernas resonemang är i fokus. En grundläggande princip i projektet är att det är viktigt att komma överens om vilka ”grundregler” som ska gälla för samtal i klassen. Genom att komma överens om och praktisera dessa grundregler kan en klassrumskultur som uppmuntrar till matematiska resonemang skapas. Även Lampert (1990) ger exempel på hur elever kan engagera sig i relativt avancerade matematiska resonemang. Hon poängterar att en viktig utgångspunkt är att skapa en klassrumskultur där det är matematiska resonemang och inte läraren eller boken som förväntas avgöra olika hypotesers sanningsvärde. Yackel och Cobb (1996) betonar betydelsen av denna typ av klassrumskultur och introducerar begreppen ”sociala normer” och ”sociomatematiska normer”. Ett exempel på en social norm är att man förväntas förklara sina lösningar medan ett exempel på en sociomatematisk norm är vad en giltig matematisk förklaring bör bestå av. Dessa normer, som är avgörande för vilken typ av kommunikation som uppstår, utvecklas i klassrummet.

2.3 Dynamiska matematikprogram i undervisningen

Under 1980- och 1990-talen utvecklades ett antal dynamiska geometriprogram (Dynamic Geometry Software, DGS), t.ex. *Cabri Geometry* och *The Geometer's Sketchpad*. Ungefär samtidigt som de första dynamiska geometriprogrammen utvecklades introducerades ett antal kraftfulla symbolhanterande program (Computer Algebra Systems, CAS), t.ex. *Maple* och *Mathematica*. En viktig historisk skillnad mellan dessa båda programtyper är att dynamiska geometriprogram utvecklades för att bli användbara i undervisning medan CAS-programmen främst utvecklades för att kunna användas vid avancerade matematiska beräkningar (Ruthven m.fl., 2008). På senare tid har en del traditionella dynamiska geometriprogram kompletterats med CAS samtidigt som en del traditionella CAS-program har kompletterats med dynamisk geometri (Hohenwarter & Jones, 2007). Dessutom har nya program utvecklats med båda dessa funktioner. Ett sådant dynamiskt matematikprogram är *GeoGebra* som enligt Hohenwarter och Jones (2007):

> provides a closer connection between the symbolic manipulation and visualisation capabilities of CAS and the dynamic changeability of DGS. It does this by providing not only the functionality of DGS (in which the user can work with points, vectors, segments, lines, and conic sections) but also of CAS (in that equations and coordinates can be entered directly and functions can be defined algebraically and then changed dynamically) (s. 127).

I följande avsnitt behandlas först de möjligheter dynamiska matematikprogram ger till ett undersökande arbetssätt. Därefter behandlas några utmaningar som har identifierats när det gäller att utnyttja dessa möjligheter i matematik-undervisningen.

2.3.1 Dynamiska matematikprogram ger nya möjligheter till ett undersökande arbetssätt

Det råder stor enighet om att dynamiska matematikprogram ger nya möjligheter till ett laborativt och undersökande arbetssätt, där elever kan interagera med datorn och själva upptäcka och testa olika matematiska samband (Arcavi & Hadas, 2000; Goos m.fl., 2003; Granberg & Olsson, 2015). Några egenskaper hos denna typ av program som har identifierats som extra värdefulla behandlas nedan.

Dynamiska matematikprogram gör det möjligt att göra konstruktioner som sedan kan manipuleras dynamiskt på olika sätt. Exempelvis kan en geometrisk figur med specifika egenskaper konstrueras så att egenskaperna bevaras då figuren manipuleras, till exempel då något av figurens hörn flyttas. På så vis kan ytterligare egenskaper hos den konstruerade figuren undersökas. Möjligheten att ”dra fria objekt” (till exempel punkter) i en konstruktion (”dragging”) är en av de egenskaper hos dynamiska matematikprogram som lyfts fram som extra värdefull (Arzarello, Olivero, Paola, & Robutti, 2002; Baccaglini-Frank & Mariotti, 2010; Hölzl, 2001; Laborde, 2001; Leung, 2011). Olika sätt att använda ”dragging” har identifierats, vilket har resulterat i en kategorisering av ett antal ”dragging modalities” (Arzarello m.fl., 2002).

En annan viktig funktion är ”spårfunktionen” som gör att man kan sätta spår på ett rörligt objekt. Detta medför att det blir möjligt att studera den bana ett objekt följer, till exempel när en konstruktion manipuleras. Spårfunktionen kan användas på olika sätt, exempelvis vid ”geometriska lokusproblem” (Santos-Trigo & Espinosa-Perez, 2002). Baccaglini-Frank och Mariotti (2010) menar att en kombination av ”dragging” och spår ger ”a *new* global tool that can be used in the process of conjecture-generation” (ss. 230-231). De benämner denna kombination ”dragging with trace activated” (s. 230). Både användandet av ”dragging” och spårfunktionen har främst studerats i samband med geometriundervisning.

När det gäller undervisning och lärande av funktioner lyfts möjligheten att dynamiskt koppla en funktions olika representationsformer fram som en viktig egenskap hos dynamiska matematikprogram (Ferrara, Pratt, & Robutti, 2006; Laborde, 2007; Leinhardt, Zaslavsky, & Stein, 1990; Pierce, Stacey, Wander, & Ball, 2011). Exempelvis finns stora möjligheter att undersöka sambandet mellan en funktions algebraiska och grafiska representation, vilket är centralt inom funktionsläran (Leinhardt m.fl., 1990). Ett verktyg som visat sig erbjuda unika möjligheter i detta sammanhang är det som kallas för ”glidare” (slider). Glidaren gör det möjligt att dynamiskt variera t.ex. värdet på en parameter genom att dra i en punkt (placerad på en tallinje) som representerar värdet på parametern. Med hjälp av detta verktyg och den dynamiska kopplingen mellan algebraiska och grafiska representationer är det möjligt att undersöka hur olika värden på en parameter i ett algebraiskt funktionsuttryck påverkar motsvarande grafs form och placering i ett koordinatsystem (Drijvers, 2003; Zbiek, Heid, Blume, & Dick, 2007).

Både när ”dragging” och glidarverktyget används ges elever möjlighet att snabbt och enkelt undersöka ett stort antal exempel. Denna möjlighet lyfts fram av Marrades och Gutierrez (2000) som den största fördelen med dynamiska matematikprogram. Det är den direkta feedbacken från datorn som gör interaktionen mellan användaren och datorn effektiv. Arcavi och Hadas (2000) menar att det kan finnas flera fördelar med denna typ av datorfeedback.

> The feedback is provided by the environment itself, which re-acted as it was requested to do. It is the “dry” consequences of the student action that are to be confronted. Such direct feedback is potentially more effective than the one provided by a teacher, not only because of its affective underpinnings (lack of value judgment), but also because it may engage motivation to re-check, revise the prediction and induce the need for proof (s. 27).

Möjligheten till visuell feedback från datorn uppmuntrar dessutom till samarbete mellan elever om de får resonera utifrån resultat som visas på en gemensam skärm (Arzarello & Robutti, 2010; Goos m.fl., 2003; Granberg & Olsson, 2015).

2.3.2 Utmaningar vid implementeringen av dynamiska matematikprogram

De möjligheter som dynamiska matematikprogram erbjuder utnyttjas i liten utsträckning i vanliga klassrum (Hoyles, Noss, Vahey, & Roschelle, 2013). Ruthven (2008) använder uttrycket ”interpretative flexibility” för att belysa den skillnad som ofta finns mellan hur lärare tolkar ett program och dess möjligheter och de möjligheter som programmets förespråkare och de som har utvecklat programmet ser. Ruthven (2008) skriver: ”the interpretative flexibility of dynamic geometry is such that its modes of use in mainstream classrooms may differ markedly from the exploratory orientation advocated by many proponents” (s. 300). Ett exempel som nämns för att belysa problemet kommer från en stor amerikansk undersökning som visar att många lärare valde det dynamiska programmet *The Geometer’s Sketchpad* som det mest värdefulla programmet samtidigt som de ansåg att datorer främst kan användas till färdighetsträning (Becker, Ravitz & Wong, 1999, refererad i Ruthven m.fl., 2008).

Ruthven (2012) menar att det finns många faktorer som kan påverka lärares vilja och möjligheter att integrera ny teknik i undervisningen. Utifrån tidigare forskning har han skapat ett ramverk för att synliggöra och analysera hur olika faktorer påverkar och påverkas av integrationen av ny teknik. I detta ramverk lyfter Ruthven (2012) fram fem ”key structuring features of classroom practice …: working environment, resource system, activity format, curriculum script, and time economy” (s. 87). ”Working environment” handlar om att den fysiska miljön ofta påverkas vid införandet av ny teknik och att detta i sin tur påverkar hur arbetet kan organiseras. Det kan exempelvis handla om att klassen måste gå iväg till en speciell datasal eller att alla elever har sina bärbara datorer framme med skärmen uppfälld under lektionen. ”Resource system” står för den samling av tillgängliga resurser som läraren har till sitt förfogande i klassrummet. Utmaningen består i att integrera och samordna de olika resurserna på ett bra sätt. I många fall är läroboken den resurs som dominerar och det kan då vara en utmaning att integrera en ny resurs, som t.ex. ett dynamiskt matematikprogram, på ett sätt så att dessa resurser samverkar. ”Activity format” handlar om de arbetsformer som används i klassrummet. Ofta kan införandet av ny teknik innebära att nya arbetsformer behövs och att nya klassrumsnormer behöver etableras. ”Curriculum script” handlar om de kunskaper och erfarenheter läraren har med sig när det gäller undervisning av ett specifikt innehåll. Läraren har ofta en föreställning om vad som är viktigt för eleverna att lära sig, vilka de vanligaste missuppfattningarna är och vilket material som är lämpligt att använda när man undervisar om just detta innehåll. ”Time economy”, slutligen, handlar om hur man bäst kan utnyttja den tid som finns till förfogande för matematikundervisning. Står elevernas förväntade lärande i proportion till den tid det tar för dem att sätta sig in i den nya tekniken och den tid som behöver avsättas till arbete med nya elevaktiviteter? Ruthven (2012) framhåller att ”the effective integration of new technologies into everyday teaching depends on a more fundamental and wide-ranging adaptation and extension of teachers’ professional knowledge than has generally been appreciated” (s. 83).

Det är alltså en stor utmaning för många lärare att förändra sin undervisning för att utnyttja de möjligheter som ett dynamiskt matematikprogram erbjuder. Användandet av dynamiska matematikprogram kan även medföra stora utmaningar för många elever. Sinclair (2003) skriver att ”students must actually learn the process of exploration. In the most general sense, this means learning to notice, to pose questions, and, as mentioned earlier, to use change to investigate relationships” (ss. 291-292). Dessutom krävs det ofta både matematisk förståelse och en kunskap om själva programmet för att kunna utnyttja programmet och tolka den feedback som ges (Laborde, 2007). Ett speciellt ramverk har utvecklats av franska forskare (Verillon & Rabardel, 1995) för att synliggöra den komplicerade process, benämnd ”instrumental genesis”, där det som från början är ett verktyg utan direkt användbarhet för en individ utvecklas till ett för individen användbart instrument. Enligt denna teori övergår ett verktyg till att bli ett instrument när användaren utvecklar speciella tekniker och mentala scheman för att lösa en viss typ av uppgifter (Artigue, 2002; Trouche, 2004). Artigue (2002) framhåller att det är viktigt att som lärare förstå de begränsningar och svårigheter som kan uppstå vid användandet av ett visst datorprogram för att kunna främja elevers ”instrumental genesis”.

2.4 Matematiska resonemang i en lärandemiljö med dynamiska matematikprogram

Det undersökande arbetssätt som dynamiska matematikprogram erbjuder kan stimulera till matematiska resonemang där elever kan upptäcka, formulera, verifiera, förklara och ibland även bevisa egna hypoteser (Baccaglini-Frank & Mariotti, 2010; Christou, Mousoulides, Pittalis, & Pitta-Pantazi, 2004; Hanna, 2000). I detta avsnitt behandlas elevers resonemang utifrån olika faser. Edwards (1997) beskriver den undersökande fasen på följande sätt:

> It is during this exploratory and testing phase that learners and expert mathematicians alike apply their intuitions in seeking patterns, follow hunches, testing ideas, and formulating generalizations that may become conjectures (s. 190).

Möjligheten att snabbt och enkelt undersöka ett stort antal exempel ger elever förutsättningar att hitta generella mönster och att formulera hypoteser. Därmed stimulerar dynamiska matematikprogram till induktiva resonemang (Ruthven m.fl., 2008).

Dynamiska matematikprogram stimulerar även till visuella resonemang (som kan vara induktiva) tack vare den feedback som ges på skärmen. I vissa fall grundar sig dessa resonemang på visuella intryck som är svåra att erhålla utan dynamiska program. Healy och Hoyles (1999) menar att den teknologiska utvecklingen har gjort att tidigare dolda egenskaper nu kan synliggöras:

> The evolution of technology has opened up new possibilities for visual expression in the process of mathematical reasoning. Images now can be externalized through computer constructions, rendering more explicit previously hidden properties and structures (s. 59).

Natsheh och Karsenty (2014) framhåller att visuella resonemang kan främja begreppsförståelsen samtidigt som det finns en risk att övertygande visuella intryck gör att elever inte reflekterar kring den bakomliggande matematiken. Denna risk har även identifierats av Drijvers (2003) samt av Healy och Hoyles (1999) som skriver att ”Reasoning tends to be compartmentalized into the visual or the symbolic, with students operating in one or the other mode without making links between them” (s. 60). Natsheh och Karsenty (2014) använder uttrycket ”visual inferential conceptual reasoning” för att karakterisera resonemang där de slutsatser som dras av visuella intryck även bygger på förståelse av bakomliggande matematiska begrepp.

Den obegränsade tillgången till exempel som dynamiska program erbjuder ger även elever nya möjligheter att enkelt testa sina hypoteser. När de ställda hypoteserna jämförs med resultat från de nya undersökningarna kan detta leda till ytterligare resonemang som ger nya insikter och förbättrade hypoteser (Lin, Yang, Lee, Tabach, & Stylianides, 2012). De nya undersökningarna kan även leda till att de ursprungliga hypoteserna bekräftas. Genom att testa en hypotes på ett stort antal exempel kan elever övertyga både sig själva och andra om att deras hypoteser är sanna. Dock finns en risk att detta medför att de inte ser något behov av varken förklaringar eller bevis (Chazan, 1993; Edwards, 1997; Hadas, Hershkowitz, & Schwarz, 2000).

Samtidigt finns det studier som visar att elever, när de är övertygade om att deras hypotes gäller, blir motiverade att försöka förklara varför den gäller (Furinghetti & Paola, 2003). Vidare har det visat sig att elever kan bli motiverade att söka förklaringar när de själva har ställt de hypoteser som ska förklaras (t.ex. Christou m.fl., 2004). De Villiers (1999) föreslår att frågan *varför* en hypotes är sann måste sättas mer i fokus och att lärare, genom att ställa denna fråga, kan väcka elevers nyfikenhet och vilja att söka förklaringar och eventuellt även genomföra bevis.

Flera studier visar att arbete med dynamiska matematikprogram kan lägga grunden för förklaringar och även i visa fall för formella bevis (Furinghetti & Paola, 2003; Healy & Hoyles, 2002; Jones, 2000). Furinghetti och Paola (2003) betonar att studenterna i deras studie refererade till sina datorundersökningar, när de i ett senare skede använde papper och penna för att konstruera formella bevis. Healy och Hoyles (2002) konstaterar att användandet av ett dynamiskt matematikprogram (*Cabri*) ”can help learners to explore, conjecture, construct and explain geometrical relationships, and can even provide them with a basis from which to build deductive proofs” (s. 18).

2.5 Design av uppgifter som stimulerar till matematiska resonemang i en lärandemiljö med dynamiska matematikprogram

Uppgiftsdesign har identifierats som ett centralt område inom matematikdidaktisk forskning (Sierpinska, 2004). Sierpinska lyfter fram ”the design, analysis and empirical testing of mathematical tasks, whether for the purpose of research or teaching, as one of the most important responsibilities of mathematics education” (s. 10). Uppgiftsdesign är också det område som behandlas i den 22:a ICMI studien, vars konferensdel genomfördes 2013. I studien ingår fem olika teman varav ett är ”Tools and Representations” (Margolinas, 2013). Detta avsnitt fokuserar på uppgiftsdesign i en lärandemiljö med dynamiska matematikprogram.

För att tillvarata de möjligheter till matematiska resonemang som dynamiska matematikprogram erbjuder krävs en annan typ av uppgifter jämfört med traditionella läroboksuppgifter (Doorman m.fl., 2007; Hitt & Kieran, 2009; Laborde, 2001). En uppgiftstyp som rekommenderas för att ge elever/studenter möjlighet att undersöka matematiska samband och formulera hypoteser är så kallade *öppna problem* (Baccaglini-Frank & Mariotti, 2010; Furinghetti & Paola, 2003; Mogetta, Olivero, & Jones, 1999). Pehkonen (1997) definierar öppna problem genom att jämföra med dess motsats:

> The concept “open problem” could be explained as follows: We will begin with its opposite, and say that a problem is closed, if its starting situation and goal situation are closed, i.e. exactly explained. If the starting situation and/or the goal situation are open, i.e. they are not closed, we have an open problem (s. 8).

Ett öppet problem inom geometrin karakteriseras av att det vanligtvis består av en kort beskrivning av någon geometrisk konstruktion följt av en öppet formulerad förfrågan om en hypotes angående egenskaper hos konstruktionen eller samband mellan dess komponenter (Mogetta m.fl., 1999).

Vid design av uppgifter, öppna eller slutna, i en datorbaserad lärandemiljö uppstår ofta frågan om elever själva ska göra de konstruktioner som behövs (se t.ex. Christou m.fl., 2004) eller om de ska få färdiga konstruktioner att undersöka (se t.ex. Sinclair, 2003). Ett motiv för att låta elever göra egna konstruktioner är att de därigenom kan lära känna både det program som används och den matematik som behandlas (Leung, 2011).

Oavsett om elever gör egna konstruktioner eller om de får en färdig konstruktion är tanken med öppna problem att något matematiskt samband ska undersökas. Utifrån resultat från dessa undersökningar ska sedan en eller flera hypoteser formuleras. Vikten av att utforma uppgifterna så att elever explicit ombeds att formulera sina hypoteser betonas i litteraturen (t.ex. Arzarello & Robutti, 2010; Leung, 2011). Baccaglini-Frank och Mariotti (2010) inför uttrycket ”conjecturing open problem” för att skilja öppna problem där en hypotes explicit efterfrågas från andra öppna problem. Baccaglini-Frank och Mariotti poängterar även vikten av att dessa hypoteser formuleras skriftligt. En skriftligt formulerad hypotes kan bli föremål för ytterligare reflektion (Kieran & Saldanha, 2008), vilket i sin tur kan leda till ytterligare undersökningar och eventuellt till en förbättrad hypotes (Lin m.fl., 2012)

Joubert (2013) påpekar att elever vanligtvis endast gör det som är nödvändigt för att de ska lösa de uppgifter de ställs inför. Detta innebär att man inte kan räkna med att de kommer att försöka verifiera sina hypoteser om detta inte efterfrågas explicit. En hypotes kan verifieras både via ytterligare exempel och via en förklaring

(Marrades & Gutierrez, 2000). För att elever inte ska nöja sig med att verifiera en hypotes genom att testa den på flera exempel föreslår De Villiers (1999), som tidigare nämnts, att frågan *varför* en hypotes är sann bör ställas.

I flera studier med fokus på uppgiftskonstruktion i en lärandemiljö med dynamiska matematikprogram betonas att en deluppgift bör vara att förklara varför ställda hypoteser är sanna (Joubert, 2013; Leung, 2011). Leung (2011) poängterar att ”A meaningful mathematical explorative task should be one that involves conjecturing and explanation activities” (s. 328). Han föreslår en modell för uppgiftsdesign i en datorbaserad lärandemiljö bestående av tre faser, eller tre ”epistemic modes”. Under den första fasen görs de konstruktioner som ska användas (om dessa inte är förkonstruerade) och själva undersökningen påbörjas. Under nästa fas observeras och registreras t.ex. mönster och invarianta egenskaper. Slutligen, under den sista fasen utvecklas både induktiva resonemang som leder till generella hypoteser och förklaringar som eventuellt även leder till bevis. Marrades och Gutierrez (2000) följer en liknande designmodell med tre faser. I den första fasen får elever göra de konstruktioner som behövs och börja undersöka dessa konstruktioner. I fas 2 ska hypoteser produceras och formuleras och i fas 3 ska hypoteserna verifieras. Joubert (2013) formulerar motsvarande tankar på följande sätt: ”a task should provoke students to engage in dialectics of action, formulation and, crucially, validation” (s. 75).

Både Leungs modell och den modell som presenteras av Marrades och Gutierrez avslutas med att förklaringar (och eventuellt bevis) efterfrågas. Dock menar flera forskare att det är viktigt att fortsätta utforska en matematisk situation även efter det att en förklaring eller ett matematiskt bevis har formulerats (Chazan, 1990a; Christou m.fl., 2004; Yerushalmy, 1993). Genom frågor som ”Vad händer om?” och ”Vad händer om inte?” (Brown & Walter, 1983, refererad i Chazan, 1990b) kan elever ges chansen att både hitta specialfall och att generalisera sina resultat. Att det är lärorikt, när man just har löst ett problem, att undersöka om det finns närliggande problem och om resultaten kan generaliseras framhöll George Pólya redan 1945 i den klassiska boken *How to solve it* (Pólya, 1990b).

I de studier som hänvisas till ovan är vanligtvis det första steget att elever ska undersöka en matematisk situation. En annan uppgiftstyp som rekommenderas för att stimulera matematiska resonemang är så kallade ”prediction tasks”, där elever först uppmanas att gör en genomtänkt gissning. Denna gissning ska sedan jämföras med resultat från de undersökningar som görs (t.ex. Laborde, 2001). Enligt Arcavi och Hadas (2000) är det viktigt att gissningarna är genomtänkta och att de uttrycks explicit. Detta medför att elever måste sätta sig in i den aktuella situationen ordentligt och därmed att de kan bli motiverade att genomföra själva undersökningen. Om undersökningsresultat och gissningar inte stämmer överens gäller det att försöka förklara varför (Laborde, 2001). Enligt Arcavi och Hadas (2000) kan oväntade undersökningsresultat leda till att motivationen att söka förklaringar ökar och därmed kan även möjligheterna för elever att reda ut tidigare missuppfattningar öka.

3 Teoretiska utgångspunkter

Detta kapitel inleds med en genomgång av olika sätt att se på matematik som vetenskap och kopplingen till matematik som skolämne. Därefter presenteras den analysmodell, Toulmins modell, som utgör grunden för den nya analysmodell som utvecklas och används i avhandlingen. Kapitlet avslutas med en genomgång av forskning kring olika dualiteter gällande funktioner.

3.1 Matematik som vetenskap och skolämne

Det finns flera särdrag hos matematik som vetenskap. Ett är att matematik inte utgår från konkreta objekt utan istället behandlar abstrakta begrepp. Ett annat särdrag är det axiomatiskt-deduktiva vetenskapsidealet och kravet på bevis som är starkt förknippat med matematik. Det axiomatiskt-deduktiva vetenskapsidealet associeras främst med Aristoteles som menade att en vetenskap bör innehålla hierarkiskt ordnade satser som kan härledas ur ett antal grundsatser. Euklides förverkligade det axiomatiskt-deduktiva vetenskapsidealet med definitioner, grundsatser (som han kallade allmänna antaganden respektive postulat) och hierarkiskt ordnade satser inom geometrin i sitt stora verk *Elementa.* Aristoteles vetenskapssyn och *Elementa*, som inte enbart innehåller geometri, har haft enormt inflytande både på matematik som vetenskap och som skolämne (Katz, 1998; Thompson & Martinsson, 1991; Thompson, 1996).

Bevisets ställning inom matematiken har varit stark ända sedan Aristoteles dagar. I och med den analytiska geometrins genombrott under 1600-talet började det bli allt vanligare med bevis som visserligen var korrekta men som inte förklarade varför en sats var sann. Detta gav upphov till en diskussion, som har pågått sedan dess, kring bevisens roll och vilka krav man egentligen ska ställa på ett matematiskt bevis (Hanna, 2000; Mancosu, 2000; Otte, 2006). Är ett bevis som förklarar bättre än ett bevis som ”bara” bevisar? Hersh (1993) menar att bevis har olika syften beroende på om man diskuterar matematisk forskning eller matematikundervisning. Inom matematisk forskning är meningen med bevis att övertyga, medan det inom matematikundervisning är viktigt att bevis även förklarar. Weber och Alcock (2004) betonar vikten av att elever får använda intuitiva och informella representationsformer för att förstå det som ska bevisas så att deras bevis kan bygga på denna förståelse. De introducerar benämningen ”semantic proof production” för att karakterisera denna typ av bevisproduktion.

Flera forskare (t.ex. A. W. Bell, 1976; De Villiers, 1990) menar att bevis även har andra funktioner än att bevisa och förklara. De Villiers (1990) gör följande lista över olika funktioner som bevis kan ha

- verification (concerned with the truth of a statement)
- explanation (providing insight into why it is true)

- systematisation (the organization of various results into a deductive system of axioms, major concepts and theorems)
- discovery (the discovery or invention of new results)
- communication (the transmission of mathematical knowledge) (s. 18).

Matematik är inte bara en axiomatiskt-deduktiv vetenskap. Nya upptäckter nås ofta på induktiv väg istället för deduktiv och det är först när nya samband ska bevisas som deduktionen används (Thompson & Martinsson, 1991). Tillgången till ny teknik har naturligtvis även haft stort inflytande på den matematiska forskningen. Borwein och Bailey (2004) använder uttrycket ”experimental mathematics” när de diskuterar och illustrerar olika sätt att använda modern teknik i matematisk forskning. De beskriver vad de menar med ”experimental mathematics” på följande sätt:

> To be precise, by experimental mathematics, we mean the methodology of doing mathematics that includes the use of computations for:
>
> 1. Gaining insight and intuition.
> 2. Discovering new patterns and relationships.
> 3. Using graphical displays to suggest underlying mathematical principles.
> 4. Testing and especially falsifying conjectures.
> 5. Exploring a possible result to see if it is worth formal proof.
> 6. Suggesting approaches for formal proof.
> 7. Replacing lengthy hand derivations with computer-based derivations.
> 8. Confirming analytically derived results (Borwein & Bailey, 2004, ss. 2-3).

Borwein och Bailey (2004) är dock noga med att poängtera att matematiska bevis fortfarande spelar en mycket viktig roll. Borwein (2012) skriver: ”Finally, it will never be the case that quasi-inductive mathematics supplants proof. We need to find a new equilibrium” (s. 94).

Flera forskare (Burton, 2004; Chazan, 1990a; Lampert, 1990; Pólya, 1990a; Schoenfeld, 1992) framhåller att det är viktigt att elever får chansen att arbeta matematiskt i skolan, d.v.s. att de får chansen att uppleva matematik och arbeta med matematik på ett sätt som influerats av hur många matematiker arbetar. Detta kan t.ex. innebära att de får chansen att ifrågasätta, undersöka, ställa hypoteser, kontrollera, förklara och övertyga. Schoenfeld (1992) beskriver sin samsyn med Pólya i denna fråga på följande sätt:

> For Pólya, mathematical epistemology and mathematical pedagogy are deeply intertwined. Pólya takes it as given that for students to gain a sense of the mathematical enterprise, their experience with mathematics must be consistent with the way mathematics is *done*. The linkage of epistemology and pedagogy is, as well, the major theme of this chapter (s. 339).

Detta synsätt på kopplingen mellan matematik som vetenskap och matematik som skolämne har även funnits i bakgrunden under arbetet med denna avhandling.

3.2 Toulmins modell

Toulmins argumentationsmodell presenterades för första gången i boken *The Uses of Argument* (Toulmin, 1958). Modellen utvecklades utifrån följande frågeställning:

> 'What, then, is involved in establishing conclusions by the production of arguments?' Can we, by considering this question in a general form, build up from scratch a pattern of analysis which will do justice to all the distinctions which proper procedure forces upon us? That is the problem facing us (s. 97).

Toulmins mål var att utveckla en modell som var användbar för analys av olika typer av argumentation i vardagen, utan krav på logisk stringens. Modellen har använts inom en rad olika områden och på senare tid har den även använts för att analysera matematiska resonemang i olika skolkontexter. Modellen består av sex sammankopplade delar (se figur 1). Nedan beskrivs de olika delarna kortfattat med ett förslag på svensk översättning (se t.ex. Rudsberg, 2014) inom parentes:

Claim (påstående): Det påstående som ska försvaras eller den hypotes eller slutsats som har dragits

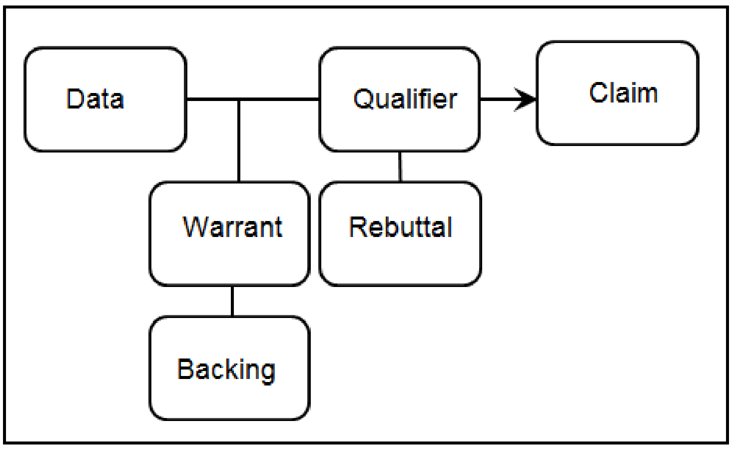
Data (grund): Fakta som ligger till grund för påståendet/hypotesen/slutsatsen

Warrant (garant): Förklaring till varför steget från fakta till påstående/hypotes/slutsats är rimligt

Backing (understöd): I vissa fall kan garanten behöva styrkas. Understöd som ger garanten legitimitet kallas "backing"

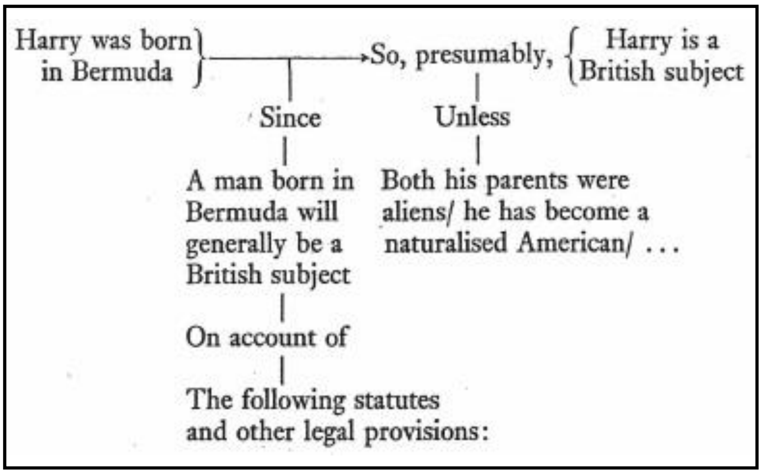
Qualifier (styrkemarkör): Markering av säkerheten i resonemanget, d.v.s. hur säkert steget från fakta till påstående/hypotes/slutsats är

Rebuttal (villkor): I vissa fall kan det finnas undantag där slutsatserna inte gäller. Omständigheter som leder till dessa undantag kallas "rebuttal"



Figur 1. *Toulmins modell*

Det är viktigt att påpeka att inte alla resonemang behöver innehålla samtliga delar i modellen. Toulmin använder själv olika exempel för att förklara sin modell. I figur 2 återges ett av dessa exempel.



Figur 2. *Ett av Toulmins originalexempel* (Toulmin, 1958, s. 105)

Inom matematikdidaktik har Toulmins modell använts för att analysera olika typer av resonemang i olika kontexter. För att ge en bild av bredden i användningsområden ges några exempel. Toulmins modell har använts för att analysera intervjuer med elever/studenter (Hollebrands, Conner, & Smith, 2010; Inglis, Mejia-Ramos, & Simpson, 2007) och för att analysera resonemang mellan elever/studenter som arbetar parvis i en datoriserad lärandemiljö (Lavy, 2006; Pedemonte, 2007). Dessutom har modellen använts för att analysera de resonemang som utvecklas vid gruppdiskussioner (Weber, Maher, Powell, & Lee, 2008) och vid helklassdiskussioner (Stephan & Rasmussen, 2002; Whitenack & Knipping, 2002).

Även när det gäller den matematiska nivån där Toulmins modell har använts råder stor variation, från grundskolans tidiga år (Krummheuer, 1995; Whitenack & Knipping, 2002) till högpresterande studenter på universitetsnivå (Inglis m.fl., 2007). Vidare har en reducerad version av Toulmins modell bestående av ”claim”, ”data”, ”warrant” och ”backing” använts i vissa studier (Krummheuer, 1995; Stephan & Rasmussen, 2002) medan den fullständiga modellen har använts i andra studier (Hollebrands m.fl., 2010; Inglis m.fl., 2007).

Även syftet med de analyser som gjorts med hjälp av Toulmins modell har varierat. Exempelvis använde Inglis m.fl. (2007) modellen för att kategorisera studenternas resonemang genom att urskilja olika typer av ”warrant”, medan Pedemonte (2007) använde modellen för att jämföra strukturen i studenters förklaringar av en hypotes med strukturen i motsvarande bevis. Hollebrands m.fl. (2010) använde Toulmins modell för att upptäcka olika kopplingar mellan typ av ”warrant”, användandet av datorn och typ av uppgift. Ytterligare ett exempel är att Stephan och Rasmussen

(2002) använde modellen för att påvisa när en matematisk idé övergick till att bli en del av den matematiska normen i klassrummet.

3.3 Funktioner – några dualiteter

Ett av de mest centrala begreppen inom matematik och matematikundervisning är funktionsbegreppet (Carlson, 1998; Hansson, 2006; Viirman, 2014). Det är väl dokumenterat att det är ett svårt begrepp att förstå för många elever (Knuth, 2000; Leinhardt m.fl., 1990). I detta avsnitt kommer ett antal dualiteter som är viktiga att beakta vid undervisning av funktioner att behandlas.

Den första dualiteten handlar om att funktioner kan betraktas både som objekt och som processer (Even, 1998; Lagrange & Psycharis, 2014; Moschkovich, Schoenfeld, & Arcavi, 1993; Sfard, 1991). När funktioner betraktas som processer är det funktionernas operationella, dynamiska sida där funktionsvärden beräknas som är i fokus. Betraktas funktioner istället som objekt är det en mer statisk strukturell sida som fokuseras. Enligt Sfard (1991) är det ett stort steg för många elever att gå från ett processinriktat synsätt till ett mer objektinriktat. Samtidigt är förmågan att se en funktion både som en process och som ett objekt en förutsättning för en djupare förståelse. Flera forskare menar att digitala hjälpmedel kan användas för att öka möjligheterna för elever att gå mot ett mer objektinriktat synsätt (Doorman m.fl., 2007; Moschkovich m.fl., 1993).

När en funktion ses som ett objekt betraktas den vanligtvis också som en helhet. Därmed har dualiteten objekt/process tydlig koppling till nästa dualitet, som handlar om att funktioner kan betraktas både lokalt, "local view", och globalt, "global view" (Even, 1998; Leinhardt m.fl., 1990). När funktioner betraktas lokalt är fokus på detaljer, t.ex. vissa funktionsvärden eller specifika punkter på en graf. Betraktas funktioner istället mer globalt är det funktionernas egenskaper i stort som är i fokus, vilket kan främja ett mer objektinriktat synsätt.

Ytterligare en dualitet som är viktig att beakta vid undervisning av funktioner är skillnaden mellan att fokusera på samband mellan variabler (t.ex. hur *y*-värdet beror av *x*-värdet) och att fokusera på hur variabler samvarierar (t.ex. hur mycket *y*-värdet ändras då *x*-värdet ökar med 1). I engelskspråkig forskningslitteratur används benämningarna ”correspondence approach” respektive ”covariation approach” (Confrey & Smith, 1994, 1995; Ellis, Ozgur, Kulow, Williams, & Amidon, 2012; Lagrange & Psycharis, 2014). Carson och Thompson (2005) lyfter fram betydelsen av ”covariational reasoning” och menar att detta sätt att resonera är avgörande för elevers möjligheter att förstå centrala begrepp i inledande analyskurser:

> It is our view that the mathematics community is ready for a careful rethinking of the precaclulus and calculus curriculum – one that is driven by the broad body of

> research on knowing and learning function, including calls for a covariation approach to precalculus and calculus instruction (s. 7).

En typ av funktioner där det är extra viktigt att kunna tänka i termer av samvariation är exponentialfunktioner (Confrey & Smith, 1994, 1995; Green, 2008). Förståelsen för denna typ av funktioner kan öka om variablernas samvariation är i fokus, genom att detta kan synliggöra förändringstakten. Det räcker dock inte att förändringstakten synliggörs för att elever ska inse det bakomliggande mönstret. De måste dessutom kunna tänka i termer av ”multiplikativ förändringstakt”, d.v.s. betrakta kvoterna av på varandra följande funktionsvärden.

4 Metod

En typ av forskningsdesign som spelat en viktig roll i avhandlingen är designexperiment. Dels bygger artikel 4 på första fasen i ett större design-experiment och dels bygger den metod som har använts i artikel 1 delvis på principer som är utmärkande för designexperiment. Designexperiment behandlas därför i kapitlets första avsnitt. Det andra avsnittet behandlar den data-insamlingsmetod som varit gemensam i studierna, nämligen videoinspelning av elever/studenter som jobbar i par framför en gemensam dator. Kapitlet avslutas med att etiska överväganden diskuteras.

Artikel 2 är speciell på så vis att den fokuserar på utvecklandet och användandet av ett nytt analysverktyg i form av en utökad version av Toulmins modell. Denna modell används sedan för att analysera de data som ligger till grund för artikel 3. Eftersom modellen och hur den används som analysverktyg beskrivs utförligt i sammanfattningen av artikel 2 (se kapitel 5.2) kommer detta inte att behandlas i metodkapitlet.

De metoder som har använts i avhandlingens olika studier har alltså både likheter och skillnader. På grund av skillnaderna har jag valt att lägga en del av metodbeskrivningen i de sammanfattningar av respektive artikel som finns i kapitel 5. Exempelvis återfinns där beskrivningar av respondenter och de uppgifter som har använts i studierna.

4.1 Designexperiment

I detta avsnitt ges först en beskrivning av vad som är utmärkande för ett designexperiment. Därefter beskrivs ett speciellt designverktyg, benämnt *didaktiska variabler*, som är användbart i samband med designexperiment. Avslutningsvis ges en beskrivning av den forskningsdesign, i termer av designexperiment, som har använts i den studie som ligger till grund för artikel 4. Även en kort beskrivning av den forskningsdesign som har använts i artikel 1 ges i denna avslutande del, eftersom den har vissa likheter med designexperiment.

4.1.1 Beskrivning av designexperiment

Cobb m.fl. (2003) lyfter fram fem olika egenskaper som karakteriserar ett designexperiment. Den *första* egenskapen är att designexperiment syftar till att utveckla teorier, dels om elevernas möjligheter till lärande och dels om hur lärandet kan stödjas med exempelvis lämpligt undervisningsmaterial. Det gäller inte bara att undersöka vad som fungerar utan även hur, när och varför det fungerar. Gravemeijer (2004) använder benämningen ”local instruction theories” för dessa teorier. Den *andra* egenskapen är att designexperiment syftar till att undersöka möjligheter till ökat lärande genom att utveckla, studera och utvärdera interventioner, t.ex. i form av alternativa arbetsformer eller undervisningsmaterial.

Nästa egenskap, den *tredje*, är att designexperiment alltid innehåller en spekulativ fas och en reflektiv fas. Den spekulativa fasen resulterar i en ”conjectured local instruction theory” (Gravemeijer, 2004, s. 109). Gravemeijer och Cobb (2006) betonar att designexperiment måste förberedas ordentligt både genom att lärandemål diskuteras och fastslås och att utgångspunkter, i form av elevers förkunskaper och inställning tydliggörs. Detta är en förutsättning för att en första ”conjectured local instruction theory” ska kunna arbetas fram. Denna analyseras och revideras sedan i den reflektiva fasen, utifrån empiriska resultat. Detta upprepas i en iterativ process. Det är denna iterativa process som Cobb m.fl. (2003) lyfter fram som den *fjärde* egenskapen som karakteriserar designexperiment. Den iterativa processen medför att resultatet av ett designexperiment är en *empiriskt grundad* ”local instruction theory” (Gravemeijer & Cobb, 2006). Den *femte* egenskapen, slutligen, är att de teorier som utvecklas ska vara direkt tillämpbara i undervisningen. Därför är det viktigt att forskare och lärare samarbetar så att erfarenheter från såväl undervisningspraktik som forskning kan utnyttjas (The Design-Based Research Collective, 2003)

4.1.2 Didaktiska variabler

För att identifiera, analysera och revidera viktiga val i samband med design av undervisningsmaterial föreslår Ruthven, Laborde, Leach och Tiberghien (2009) *didaktiska variabler* som designverktyg. Även om didaktiska variabler har sitt ursprung i Brousseaus teori om didaktiska situationer kan de användas utan specifik koppling till denna eller någon annan övergripande teori (Ruthven m.fl., 2009). När de didaktiska variablerna har identifierats görs förutsägelser angående hur olika designval kan komma att påverka elevernas lärande. De didaktiska variablerna spelar sedan en viktig roll i det analysarbete som ligger till grund för eventuella revideringar av undervisningsmaterialet. Ruthven m.fl. (2009) beskriver processen på följande sätt: ”conjectures about the impact of didactical variables on students’ mental activities are tested in instruction, potentially leading to their refinement. This process contributes to specifying conditions that have a critical influence on the learning potential of a situation” (s. 334).

Didaktiska variabler kan identifieras både *a priori* och under designprocessen (Mackrell, Maschietto, & Soury-Lavergne, 2013; Ruthven m.fl., 2009). Mackrell m.fl. (2013) betonar den viktiga roll didaktiska variabler kan spela under designprocessen samtidigt som de betonar att designprocessen kan göra att viktiga didaktiska variabler identifieras: ”In turn, designing a task … enables a greater awareness of the potential of different didactical variables” (s. 86).

4.1.3 Designexperiment i avhandlingen

Artikel 4 behandlar delar av den första cykeln i ett större designexperiment där olika datoraktiviteter, i form av arbetsblad med uppgifter, arbetades fram, testades empiriskt och reviderades. I designexperimentet bildade de båda artikelförfattarna forskningsteam tillsammans med fyra gymnasielärare från två olika skolor. Syftet med artikel 4 är att identifiera viktiga aspekter att beakta vid design av ”prediction tasks” i en lärandemiljö med dynamiska matematikprogram för att matematiska resonemang ska stimuleras, speciellt resonemang om exponentialfunktioner.

I designexperimentets förberedelsefas samlades information in genom intervjuer med lärarna och en kort elevenkät. Detta gjordes bland annat för att få information om elevernas inställning till matematik och deras tidigare erfarenheter av och inställning till att använda datorer på matematiklektionerna. Vid ett inledande möte beslutades vilka matematiska områden som skulle behandlas i designexperimentet samt att artikelförfattarna skulle arbeta fram ett förslag på en första datoraktivitet. Det är denna datoraktivitet som delvis behandlas i Artikel 4. Var och en av uppgifterna i förslaget diskuterades sedan i forskningsteamet och justeringar gjordes utifrån lärarnas synpunkter. Dessutom diskuterades hur eleverna förväntades angripa de olika uppgifterna, utifrån olika tänkbara designval, och hypoteser ställdes angående vilka resonemang som skulle utvecklas. På detta vis utarbetades en ”conjectured local instruction theory”. Didaktiska variabler användes som designverktyg för att identifiera och tydliggöra viktiga val i samband med uppgiftsdesignen. Sju olika didaktiska variabler identifierades *a priori* utifrån forskningslitteratur, bland annat litteratur om elevers förståelse av exponential-funktioner.

Olika typer av data samlades in för att användas vid analysen av elevernas resonemang, i relation till de hypoteser som ställts och de didaktiska variabler som identifierats. Förutom att elevernas skriftliga arbeten samlades in, videofilmades ett elevpar i varje klass. Dessutom gjordes ljudinspelningar av lärarnas diskussioner med elever under arbetets gång. Efter var och en av lektionerna gjordes en kort intervju med läraren för att fånga hans/hennes spontana intryck. Vidare gjordes ljudinspelningar av forskarteamets möten.

Utöver de didaktiska variabler som identifierades *a priori* identifierades ytterligare 4 didaktiska variabler under analysarbetet. De didaktiska variablerna var viktiga i analysarbetet och vid revideringen av arbetsbladet, genom att de tydliggjorde viktiga designval och hur dessa val påverkade elevernas resonemang. För att underlätta analysen av elevernas resonemang gjordes dessutom en kategorisering av förväntade elevresonemang, vilka sedan användes för att klassificera de resonemang som utvecklades och för att upptäcka oväntade resonemang.

I artikel 4 behandlas, som tidigare nämnts, delar av den första cykeln i designexperimentet, d.v.s. en spekulativ fas, genomförandet av aktiviteten i fyra klasser samt en reflektiv fas. Under den reflektiva fasen gjordes ett antal revideringar av arbetsbladet samtidigt som nya hypoteser ställdes angående hur dessa revideringar kommer att påverka elevernas resonemang. Vid nästa iteration är sedan tanken att det nya arbetsbladet med tillhörande hypoteser ska testas. De teorier som utvecklades från den första iterationen handlar främst om hur olika designval antas ha påverkat de resonemang som utvecklades och hur nya val kan leda till förändrade resonemangsbanor.

Den forskningsdesign som används i artikel 1 kan inte kallas designexperiment, men den har likheter med designexperiment. Syftet var att skapa en modell som kan användas för att utveckla traditionella bevisuppgifter till mer öppna uppgifter som stimulerar elever att utforska, ställa hypoteser, verifiera, förklara och generalisera i en lärandemiljö med dynamiska matematikprogram. En första version av modellen utvecklades utifrån en litteraturgenomgång. Därefter applicerades modellen på en traditionell bevisuppgift vilket gav upphov till en följd av fem deluppgifter. Hypoteser ställdes om tänkbara resonemangsbanor och sätt att använda datorn, kopplat till de olika deluppgifterna. Detta kan jämföras med det Gravemeijer (2004) benämner ”conjectured local instruction theory”. Uppgiftsföljden testades sedan på två doktorander. Deras resonemang analyserades och jämfördes med de hypoteser som ställts kopplat till hur de olika deluppgifterna utformats. Denna analys resulterade i vissa revideringar av modellen. Att på detta sätt utnyttja högpresterande studenter vid design av uppgifter kan vara värdefullt och det är inte helt ovanligt (Alcock & Inglis, 2008). Forskningsdesignen som användes i artikel 1 innehöll alltså både en spekulativ och en reflektiv fas.

4.2 Videoinspelning som datainsamlingsmetod

Vid samtliga studier har videoinspelningar gjorts av elever/studenter som jobbar i par framför en gemensam dator. Det finns flera fördelar med denna typ av data. En fördel är naturligtvis att man fångar både ljud och bild. Visserligen är det elevernas/studenternas resonemang som har studerats, men det har varit viktigt i analysarbetet att även ha tillgång till deras agerande i övrigt. Framför allt har det varit viktigt att kunna observera hur de har pekat på datorns skärm på olika sätt för att förklara sina ståndpunkter. Detta har varit möjligt att fånga tack vare att de har filmats snett bakifrån. Det har även varit viktigt att kunna urskilja när datorn har använts och när arbetet istället har skett med papper och penna. Som ett komplement till videoinspelningarna gjordes även skärminspelningar med hjälp av *Camtasia*. Genom skärminspelningarna blev det möjligt att identifiera hur datorn användes mer i detalj.

En annan fördel med videoinspelningar som data jämfört med observationer är att man har möjlighet att se på det inspelade materialet vid upprepade tillfällen och även att analysera det utifrån olika utgångspunkter. Detta medför också att behovet av att bestämma hur data ska kategoriseras *a priori* minskar. I den studie som ligger till grund för artikel 3 var det viktigt att analysera studenternas resonemang förutsättningslöst utan förutbestämda kategorier. Powell, Francisco och Maher (2003) menar att ”Importantly, employing observational coding schemes decided upon prior to observations or videotape viewing may blind researchers and make it difficult to notice unanticipated behaviors” (s. 423).

Ytterligare en fördel med denna typ av data jämfört med observationer är att det är möjligt att göra transkriberingar som sedan kan användas för att illustrera, diskutera och motivera de tolkningar som gjorts. Denna möjlighet var extra betydelsefull när de data som ligger till grund för artikel 3 skulle analyseras, eftersom en ny analysmodell då behövde utvecklas (se sammanfattningarna av artikel 2 och artikel 3). I samtliga studier transkriberades väsentliga delar av videomaterialet ordagrant och vid behov infogades kommentarer inom hakparentes. Kommentarerna gällde vanligtvis hur datorn användes, t.ex. [drar i glidaren så att *B* = 0,5], eller hur någon elev/student pekade på skärmen. I samtliga studier användes sedan både det transkriberade materialet och videoinspelningarna vid analysarbetet. Dessutom samlades de skriftliga arbetena in för att kunna användas i analysen.

4.3 Etiska överväganden

I avhandlingen ingår flera empiriska studier där olika typer av data har samlats in. Samtliga deltagare i studierna har blivit informerade om syftet med respektive studie samt att deltagandet är frivilligt och att de när som helst har rätt att avbryta deltagandet. Informationen har i samtliga fall getts både muntligt och skriftligt och samtliga deltagare har lämnat in ett skriftligt samtycke. Både den studie som legat till grund för artikel 3 och det designexperiment som legat till grund för artikel 4 har granskats av den forskningsetiska kommittén vid Karlstads universitet.

Den studie där behovet av etiska överväganden varit störst är designexperimentet som legat till grund för artikel 4. Exempelvis diskuterades om videoinspelning av arbetet i klassrummet skulle göras eller ej. Trots de fördelar som finns med videoinspelning valde vi att inte göra detta eftersom datamaterial där ljud och bild kopplas ihop kan vara mer etiskt känsligt. Dessutom kan svårigheter uppstå om några elever bestämmer sig för att de inte vill delta i studien. Istället gjordes ljudupptagningar och fältanteckningar vid klassrumsobservationerna. Som tidigare nämnts filmades dessutom ett elevpar från varje klass med en kamera placerad snett bakifrån. Dessa elever fick information, både skriftlig och muntlig, om hur det filmade materialet skulle användas och de fick underteckna ett speciellt samtyckesformulär för filmningen.

Ett dilemma i samband med forskning på elever är att det kan vara svårt att veta vad det egentligen är som gör att de samtycker till att delta i en undersökning (David, Edwards, & Alldred, 2001; Hurley & Underwood, 2002). Förstår de verkligen att de kan tacka nej eller ser de undersökningen mer eller mindre som en del av skoldagen? Hur påverkas deras samtycke av de maktrelationer som normalt finns i skolan? Detta är några exempel på frågor som är viktiga att reflektera över. Det är lätt gjort att man som forskare endast fokuserar på att det är viktigt att få ett så litet bortfall som möjligt. De elever som deltog i studien var troligtvis väl inskolade i att det oftast är bäst att göra som man blir ombedd i skolan. Detta gör att de antagligen inte brukar reflektera över möjligheten att avstå från att delta i en undersökning. Denna möjlighet måste därför tydliggöras för eleverna. Att de har möjlighet att avbryta deltagandet när som helst om de så önskar är också något som troligtvis strider mot deras bild av hur det går till i skolan.

En annan faktor att beakta är risken för grupptryck. Speciellt då eleverna i studien arbetade i par fanns en risk att en situation skulle uppstå där en i paret egentligen vill avbryta samtidigt som hon/han upplever en press att fullfölja. Detta uppmärksammades vid något tillfälle varvid det var viktigt att återigen påpeka att deltagandet var frivilligt. Totalt bland de 4 klasser som deltog i studien var det 4 elever som valde att inte deltaga. Dessa elever deltog i lektionen, men deras lösningar samlades inte in och inga anteckningar gjordes om deras arbete. Även några av de elever som tillfrågades om att bli filmade, utifrån förslag från lärarna, valde att avstå. Dock fanns det alltid elever som lämnade sitt samtycke till att filmas.

5 Sammanfattning av artiklarna

5.1 Artikel 1

Fahlgren, M. & Brunström, M. (2014). A model for task design with focus on exploration, explanation, and generalization in a dynamic geometry environment. *Technology, Knowledge and Learning, 19*(3), 287–315.

Den frågeställning som legat till grund för artikel 1 är hur tillgången till dynamiska matematikprogram kan utnyttjas för att utveckla traditionella bevisuppgifter till mer öppna uppgifter som stimulerar till ett utforskande arbetssätt där själva beviset ingår som en naturlig del. Syftet med artikeln är att utveckla en modell som kan användas vid konstruktion av uppgifter som stimulerar studenter att utforska, ställa hypoteser, verifiera, förklara, bevisa och generalisera. Trots bevisens centrala roll inom matematik ligger inte fokus i denna artikel på själva bevisformuleringen utan på faserna före och efter denna. Modellen är speciellt utvecklad för geometriska problem, i första hand lokusproblem.

5.1.1 Modellen utvecklas utifrån en litteraturgenomgång

En första version av modellen utvecklades utifrån en genomgång av litteratur som behandlar (a) aktiviteter kopplade till fasen före bevis, (b) möjligheten att söka generaliseringar i fasen efter bevis samt (c) design av uppgifter i en lärandemiljö med dynamiska matematikprogram. En stor del av den litteratur som legat till grund för modellen finns refererad i kapitel 2 och upprepas därför inte här. Modellen ska främja ett logiskt flöde av aktiviteter utifrån följande faser:

1. Göra lämpliga datorkonstruktioner utifrån en beskriven matematisk situation
Modellen inleds med en kortfattad beskrivning där den matematiska situation som ska undersökas introduceras.

2. Undersöka en matematisk situation och formulera hypoteser
När konstruktionen är gjord kan själva undersökningen påbörjas. Två typer av ”dragging” som är användbara vid undersökning av geometriska lokusproblem är ”bound dragging” (den punkt som dras är bunden till något objekt, det kan till exempel vara en punkt på en ellips) och ”dragging with trace activated” (för att se hur en punkt rört sig i samband med ”dragging” sätts spår på punkten). När studenterna har funnit ett mönster eller en invariant som de tror gäller generellt är de redo att formulera en hypotes.

3. Bekräfta hypotesen
När en hypotes är formulerad ska studenterna utnyttja de möjligheter det dynamiska matematikprogrammet ger att bekräfta hypotesen och därmed att försäkra sig om att hypotesen gäller.

4. Förklara och bevisa hypotesen
En viktig del i modellen är att stimulera till bevis som bygger på förståelse. Weber och Alcock (2004) betonar att intuitiva och informella representationsformer och exemplifieringar kan användas av studenter för att förstå *varför* en hypotes är sann. De introducerar uttrycket ”semantic proof production” för att karakterisera bevis som konstrueras utifrån en sådan förståelse. För att stimulera till denna typ av bevis bör studenterna förklara varför hypotesen gäller innan de bevisar den.

5. Undersöka vidare för att hitta eventuella generaliseringar
En viktig del i modellen är att den ska stimulera studenter att utnyttja de möjligheter som dynamiska matematikprogram ger att söka vidare efter mer generella samband.

Denna första version av modellen användes för att, utifrån en traditionell bevisuppgift, designa ett konkret exempel, se tabell 1. I artikeln diskuteras exemplet ingående och hypoteser om tänkbara resonemangsbanor och sätt att använda datorn presenteras. Tack vare de verktyg som finns i *GeoGebra* är det relativt lätt att göra grundkonstruktionen och att upptäcka att den geometriska orten för *M* (the locus of *M*) är en ellips. En viktig anledning till att just detta exempel valdes är att möjligheterna att generalisera är stora. Resultatet är varken beroende av att det är mittpunkten, en brännpunkt eller en ellips. Istället handlar det om en likställighetsavbildning (homothety).

Tabell 1. *Ett exempel utarbetat utifrån första versionen av modellen*

Låt *P* vara en godtycklig punkt på en ellips. Låt *M* vara mittpunkten mellan *P* och en av ellipsens brännpunkter.

(a) Gör en lämplig konstruktion i *GeoGebra* och studera positionen för punkt *M* för olika positioner för punkt *P*. Ställ en hypotes.
(b) Använd *GeoGebra* för att bekräfta eller motbevisa din hypotes.
(c) Förklara med egna ord varför din hypotes är sann.
(d) Konstruera ett bevis.
(e) Gör nya liknande undersökningar. Ställ hypoteser, bekräfta eller motbevisa, förklara och bevisa.

5.1.2 Empirisk undersökning av modellen

Exemplet, och därmed även modellen, testades i en fallstudie med två doktorander i matematik. Doktorandernas arbete filmades och det filmade materialet transkriberades och analyserades. När doktorandernas arbete jämfördes med hypoteserna om hur uppgifterna skulle kunna genomföras framkom både likheter och en del oväntade resultat. Några likheter var att doktoranderna

- gjorde hjälpkonstruktioner (t.ex. nya linjer) för att undersöka och förklara geometriska egenskaper (detta gjordes i ännu större utsträckning än förväntat),
- utnyttjade enkelheten att testa olika exempel och nya idéer,
- reflekterade ytterligare när de skulle formulera sina hypoteser skriftligt,
- hittade alltmer generella samband genom att ändra premisserna i den ursprungliga beskrivningen (detta gjordes ännu mer systematiskt än förväntat).

Några av de mer oväntade observationerna var att doktoranderna

- hade bekräftat sin hypotes redan innan de kom till uppgift (b),
- inte såg någon större skillnad mellan uppgifterna (c) och (d),
- formulerade sina skriftliga svar kortfattat (exempelvis skrev de ”*Conjecture*: The locus of *M* is another ellipse!”),
- använde specialfall (cirkel) för att undersöka och bekräfta hypoteser.

5.1.3 Revidering av modellen

Resultat från fallstudien låg sedan till grund för viss revidering av modellen. Den reviderade modellen återges i tabell 2.

Tabell 2. *Den reviderade modellen, med de förändringar som gjorts i fet stil*

Beskrivning av den matematiska situationen

(a) Gör en lämplig konstruktion i [det dynamiska matematikprogram som används, t.ex. *GeoGebra*] och studera positionen för [ett beroende objekt, t.ex. en punkt] för olika positioner för [ett oberoende objekt]. **Formulera** en hypotes.
(b) **Är du övertygad om att din hypotes är sann? Om inte, försök att använda [aktuellt program] för att bekräfta hypotesen. Gå vidare till nästa uppgift när du är övertygad.**
(c) Förklara med egna ord varför din hypotes är sann
(d) Konstruera ett bevis
(e) **Undersök om din hypotes kan generaliseras. Genomför uppgifterna ovan utifrån nya premisser, genom att t.ex. ställa frågor som *vad händer om?* och *vad händer om inte?***

Nedan följer några motiveringar till revideringarna. Doktoranderna i fallstudien skrev kortfattade svar utan att lägga ner kraft på hur dessa formulerades. Ändringen i uppgift (a), ”formulera en hypotes” istället för ”ställ en hypotes”, är ett försök att betona vikten av att hypoteser formuleras tydligt (Edwards, 1997). I modellen är detta extra viktigt då svaret på uppgift (a) fungerar som utgångspunkt i övriga uppgifter och därmed ligger till grund för vidare reflektioner, inte minst i uppgift (e) där det gäller att undersöka nya premisser och söka generaliseringar.

Doktoranderna i fallstudien försäkrade sig om att deras inledande hypotes stämde innan de skrev ner den som svar på uppgift (a). När de kom till uppgift (b) ansåg de därför att de redan gjort uppgiften. Omformuleringen av uppgift (b) är gjord främst för att ge möjlighet att gå direkt till uppgift (c) om hypotesen bekräftats redan i samband med uppgift (a). När det gäller uppgifterna (c) och (d) fann vi ingen anledning att göra några justeringar utifrån fallstudien. Däremot var det intressant att studera hur doktoranderna använde *GeoGebra* för att göra hjälpkonstruktioner och undersöka specialfall samt hur de refererade till matematisk teori (definitionen av ellips) för att hitta lämpliga förklaringar. Dessa strategier kan vara användbara för lärare att hänvisa till när studenter är i behov av guidning.

När doktoranderna kom till uppgift (e) gick de systematiskt tillväga för att hitta mer generella samband. De återvände till den inledande beskrivningen och diskuterade vilka premisser som kunde varieras. På detta sätt lyckades de slutligen komma fram till att det varken behövde vara en mittpunkt, en brännpunkt eller en ellips utan att det handlade om en likställighetsavbildning. Förändringen av uppgift (e) är gjord för att ytterligare stärka betoningen av generaliseringsfasen och öka möjligheterna för studenter att variera premisserna systematiskt, på motsvarande sätt som doktoranderna gjorde.

Artikeln avslutas med en diskussion där modellen bland annat jämförs med Leungs modell (Leung, 2011). Vidare diskuteras modellens användbarhet utgående från ytterligare några exempel.

5.2 Artikel 2

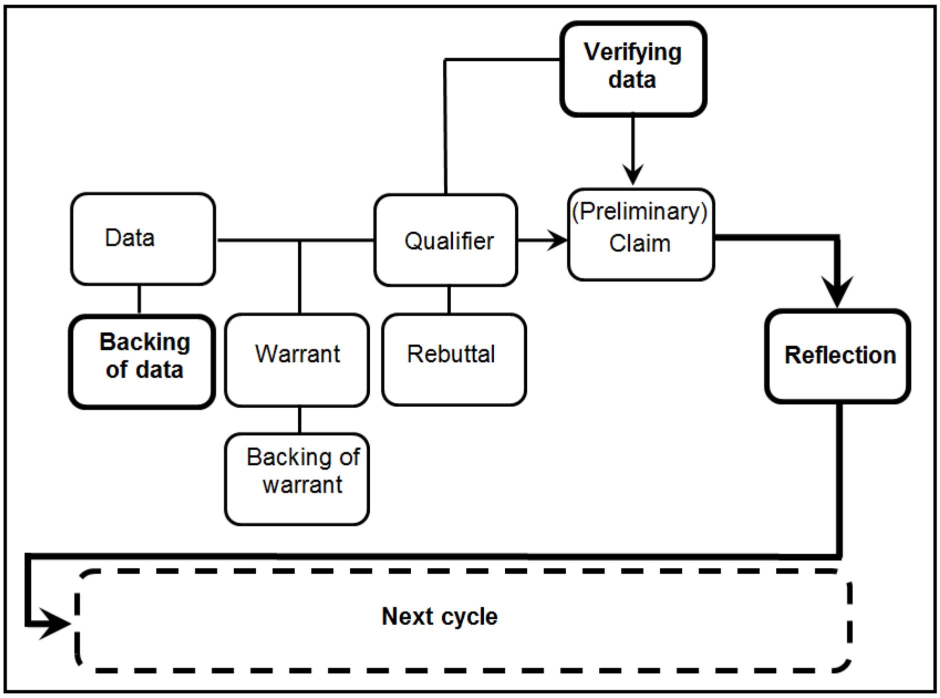
Brunström, M. (2015a). An expanded version of Toulmin’s model to analyse students’ mathematical reasoning in a dynamic software environment. *Manuscript submitted for publication.*

Bakgrunden till artikel 2 är att ett behov av en ny analysmodell för matematiska resonemang uppstod när de data som ligger till grund för artikel 3 skulle analyseras. En utökad version av Toulmins argumentationsmodell (Toulmin, 1958) utvecklades och användes för att analysera 12 olika resonemangssekvenser. Den nya modellen visade sig användbar för att identifiera och demonstrera viktiga egenskaper i studenternas resonemang, både när det gäller struktur och innehåll. En naturlig fråga blev därför om modellen även kan vara användbar för att analysera matematiska resonemang i andra liknande sammanhang.

I artikeln ges en överblick över olika studier där Toulmins modell har använts för att analysera matematiska resonemang. Vidare diskuteras och kritiseras hur modellen har använts i några av dessa studier. Därefter introduceras den utökade versionen av Toulmins modell och motiveringar ges till varför Toulmins ursprungliga modellen behövde utökas för att bli användbar i den aktuella studien, benämnd fall 1 i artikeln. Vidare demonstreras hur transkriberad data tolkas i modellen och några av de tolkningsproblem som uppstod diskuteras. Därefter prövas modellen i två ytterligare fall, benämnda fall 2 respektive fall 3. Nedan följer en kort sammanfattning av de delar av artikeln som behandlar den utökade versionen av Toulmins modell.

5.2.1 En utökad version av Toulmins modell

Toulmins originalmodell behövde utökas på olika sätt för att ge en rättvisande bild av de resonemang som utspelade sig i fall 1. I figur 3 presenteras den utökade modellen, med förändringarna i fet stil.



Figur 3. *Den utökade versionen av Toulmins modell, med förändringarna i fet stil*

En kort motivering till var och en av förändringarna följer nedan.

> *Verifying data*: För att modellen på ett tydligt sätt ska skilja mellan data som ligger till grund för en ny hypotes och data som används för att bekräfta en redan formulerad hypotes infördes den nya rubriken ”Verifying data”. På detta sätt inkluderas även en tidsaspekt i modellen, vilken gör det möjligt att urskilja hur hypoteser succesivt bekräftas. Motsvarande komplettering av

Toulmins modell har tidigare gjorts av Hollebrands, Conner och Smith (2010) och Smith (2010), även om de inte använder benämningen “verifying data”.

Backing of data: Tolkningar av det som hände på datorns skärm fungerade som data i många resonemang. För att modellen tydligt ska visa om studenter använder sina matematiska kunskaper för att bekräfta sina observationer infördes rubriken ”Backing of data”.

Reflection: Vid flera tillfällen, när studenterna just framfört en hypotes, började de reflektera ytterligare kring sitt arbete. Typiska uttalanden var ”Vad håller vi egentligen på med?” och ”Hur ska man förklara det?”. Dessa reflektioner gav ofta upphov till förnyade resonemang där studenterna tog fram ytterligare data och reviderade/förfinade sina hypoteser. Eftersom dessa metakommentarer verkade ha en avgörande betydelse för studenternas resonemang är det viktigt att de tydliggörs i modellen. Därför infördes den nya rubriken ”Reflection”.

Cyklisk process: För att kunna återge hur studenterna succesivt reviderade/förfinade sina hypoteser genom förnyade resonemang i en cyklisk process länkades cyklerna samman**.** På detta sätt inkluderas en tidsaspekt i modellen och det blir möjligt att återge hur hela resonemang utvecklar sig i ett och samma diagram.

Qualifier i moln (framgår inte av figur 3): Ibland framgick det att studenterna var osäkra på om en hypotes var sann eller ej utan att de utryckte detta explicit. För att kunna återge detta i modellen användes ”Qualifier” i moln. Moln har även tidigare använts i Toulmindiagram för att skilja forskares tolkningar från explicit uttryckta uttalanden, till exempel använde Hollebrands, Conner och Smith (2010) “warrants” i moln.

Final claim och preliminary claim: För att tydligt skilja den slutliga hypotesen (som även formulerades skriftligt) från de hypoteser som uttrycktes längs vägen infördes rubrikerna “Final claim” och “Preliminary claim”.

Det var långt ifrån självklart hur det transkriberade materialet skulle tolkas in i den utökade versionen av Toulmins modell. Modellen och olika tolkningar diskuterades vid två olika seminarier med kollegor inom SMEER (Science, Mathematics and Engineering Education Research) vid Karlstads universitet.

Några av de tolkningsproblem som uppstod under analysarbetet diskuteras i artikeln. Bland annat poängteras att valet av detaljnivå kan vara avgörande för hur det transkriberade materialet tolkas in i modellen. I den aktuella studien var det viktigare att kunna överblicka hela resonemangssekvenser än att täcka varje detalj i studenternas resonemang. Vidare diskuteras, utifrån några konkreta exempel, valet mellan att försöka sammanfatta flera uttalanden kortfattat med egna ord och att ordagrant återge studenternas uttalanden i diagrammen. Nackdelen med sammanfattningar är att forskaren måste göra ytterligare tolkningar, medan nackdelen med ordagrann återgivning är att diagrammen kan bli för välfyllda och svåra att överblicka.

För att undersöka modellens användbarhet prövades den på data från två andra studier, valda för att ge variation både vad gäller matematisk nivå och uppgiftstyp. Fall 2 består av delar av det resonemang mellan två doktorander som utgör fallstudien i artikel 1, medan fall 3 kommer från en studie där gymnasieelever som läser Matematik 1b löser problem med hjälp av *GeoGebra*. Det som är gemensamt för samtliga studier är att elever/studenter arbetar parvis och har tillgång till *GeoGebra*. Hur användbar modellen är i konkreta fall är naturligtvis beroende av syftet med analysen, men både i fall 2 och fall 3 visade sig modellen ha potential att tydliggöra intressanta aspekter i de resonemang som utvecklades. Dock var behovet att ha en utökad version av Toulmins modell mindre i fall 3. I artikeln diskuteras ytterligare tolkningsproblem som uppstod i samband med fall 2 och fall 3. Nedan följer några exempel där modellen främjade analysarbetet och synliggjorde viktiga aspekter i elevernas/studenternas resonemang.

5.2.2 Modellen synliggjorde viktiga resonemangsegenskaper

Modellen var användbar för att identifiera och illustrera hur studenterna använde datorn för att stödja sina resonemang. I fall 1 visar diagrammen tydligt att tolkningar av resultat på datorns skärm var den vanligaste formen av ”data” och ”verifying data”. Det framgår också tydligt att studenterna byggde sina resonemang på olika typer av observationer (se artikel 3). Distinktionen mellan ”data” och ”verifying data” gjorde det också möjligt att skilja mellan om datorn användes för att upptäcka eller bekräfta en hypotes. Även i fall 2, och viss mån i fall 3, synliggjordes intressanta aspekter av resonemangen tack vare den tydliggjorda relationen mellan ”data” och ”verifying data”. Bland annat framgår det tydligt hur doktoranderna i fall 2 använder ett specialfall (en cirkel) för att bekräfta en av sina hypoteser.

Den nya rubriken ”Backing of data” användes endast vid ett fåtal tillfällen, vilket i sig var ett intressant resultat. Det visar att observationer av resultat på datorns skärm vanligtvis accepterades utan vidare reflektion, vilket inte hade synliggjorts på samma sätt utan den nya rubriken. I fall 1 var det inte heller vanligt att hypoteser åtföljdes av någon ”warrant”, vilket även det är ett viktigt resultat som synliggjordes tack vare modellen. Det visar att studenterna sällan motiverade steget från data till hypotes.

När det gäller den nya rubriken ”Reflection” kan man naturligtvis hävda att det alltid handlar om någon typ av reflektion, även om den inte alltid uttrycks muntligt, när elever/studenter börjar söka ny data för att revidera/förfina en hypotes. Man kan diskutera valet av rubrik, exempelvis hade ”Meta reflection” varit ett alternativ. Oavsett rubrikval var det viktigt att ha en modell som gav möjlighet att tydliggöra vad som initierade övergången från en cykel till nästa. Ett intressant resultat som synliggjordes under rubriken ”Reflection” i fall 2, var att en del av doktorandernas resonemang kan kategoriseras som abduktivt. Genom att studera diagrammet till fall 2 kan olika typer av resonemang identifieras, först induktivt, sedan abduktivt och slutligen deduktivt.

Valet att binda ihop olika cykler och välja detaljnivå så att det blir möjligt att överblicka en hel resonemangssekvens har naturligtvis både fördelar och nackdelar. I fall 1, där modellen utvecklades, var det viktigt att få en överblick och en tidsdimension i diagrammen. På så vis blev det möjligt att analysera hur resonemangen utvecklade sig, inte minst hur hypoteser ofta förfinades i flera steg. Modellen erbjuder alltså en möjlighet att studera progressionen i de resonemang som analyseras. I fall 2 handlar progressionen istället främst om hur en matematiskt hållbar förklaring växer fram till den inledande hypotesen.

Sammanfattningsvis visar artikeln att den utökade versionen av Toulmins modell kan vara användbar för att analysera och illustrera matematiska resonemang mellan elever/studenter som jobbar i par i en lärandemiljö med dynamiska matematik-program. Samtidigt är det viktigt att påpeka att modellen endast har prövats i ett fåtal fall. Vidare demonstreras i artikeln ett antal problem som uppstod vid operationaliseringen av den utökade modellen. Dessutom påvisas olikheter när det gäller hur olika forskare har tolkat Toulmins modell. Med anledning av detta betonas vikten av att man som forskare noggrant redogöra för hur den modell man väljer att använda tolkas och operationaliseras.

5.3 Artikel 3

Brunström, M. (2015b). Students’ mathematical reasoning in a dynamic software environment. *Accepted, subject to revision in Nordic Studies in Mathematics Education.*

Samtidigt som tidigare forskning visar att dynamiska matematikprogram kan användas för att stimulera matematiska resonemang (se kapitel 2.4) råder det brist på forskning som fokuserar på strukturen och innehållet i de resonemang som utvecklas i en lärandemiljö med dynamiska matematikprogram (Smith, 2010). Syftet med denna studie är att identifiera karakteristiska egenskaper i de resonemang som utvecklas när studenter jobbar med utforskande aktiviteter, anpassade utifrån ett dynamiskt matematikprogram. Vidare syftar studien till att urskilja hur studenter använder *GeoGebra* för att stödja sina resonemang.

5.3.1 Studiens kontext

Sex universitetsstudenter från en klass som läste naturvetenskapligt basår ingick i studien. De hade tidigare använt *GeoGebra* för att undersöka matematiska samband och lösa problem under fyra lektioner. Dessutom använde deras lärare *GeoGebra* vid flera tillfällen för att demonstrera och förklara matematiska samband. Fyra uppgifter gällande hur olika parametrar påverkar grafen till funktionen $y = A \sin (Bx + C) + D$ användes i studien. De tre första uppgifterna gällde parametrarna A, B respektive C, medan det i den fjärde uppgiften gällde att avgöra vilka villkor som måste gälla för parametrarna för att y ska vara större än noll för alla x. Var och en av uppgifterna inleddes med en beskrivning av en lämplig konstruktion i *GeoGebra*, där glidare ingick som en viktig del.

Studenterna hade tidigare jobbat med de trigonometriska basfunktionerna, t.ex. $y = \sin x$, men inte med mer generella trigonometriska funktioner med parametrar. Uppgifterna skulle därför uppmuntra till ett undersökande arbetssätt och möjliggöra matematiska resonemang. Vidare förväntades studenterna formulera sina slutsatser skriftligt med egna ord. Däremot efterfrågades ingen förklaring, vilket gjorde det möjligt att undersöka förekomsten av mer spontana förklaringar.

Studenterna arbetade parvis vid en gemensam dator. Varje par genomförde samtliga 4 uppgifter, vilket gav totalt 12 resonemangssekvenser att analysera. Förutom att samtliga par videofilmades samlades studenternas skriftliga arbeten in för att kunna användas i analysen. En utökad version av Toulmins argumentationsmodell (Toulmin, 1958) utvecklades och användes i analysarbetet (se artikel 2).

5.3.2 Karakteristiska egenskaper i studenternas resonemang

Studenternas matematiska resonemang utvecklades i en *cyklisk process* där deras första preliminära hypotes förfinades/reviderades utifrån resultat från nya undersökningar. Detta upprepades ofta flera gånger innan de slutligen formulerade den hypotes som också utgjorde deras skriftliga svar. Elva av tolv resonemangssekvenser uppvisade denna struktur, med mellan två och fem cykler.

Övergången från en cykel till nästa initierades i drygt två tredjedelar av fallen av att studenterna stannade upp och började *reflektera* på ett mer övergripande plan. Reflektionerna kunde t.ex. handla om vad de egentligen höll på med, d.v.s. en slags metareflektion, eller hur upptäckter de gjort kunde förklaras eller formuleras skriftligt. Nästan hälften av reflektionerna handlade om hur hypoteser skulle formuleras, vilket tyder på att uppmaningen att formulera sig skriftligt med egna ord hade stor betydelse för studenternas resonemang.

Mer än hälften av de hypoteser som ställdes bekräftades med hjälp av *verifierande data*. Vanligtvis var dessa data av samma typ som de data hypotesen grundat sig på. Exempelvis kunde observationer av hur en parameter påverkar grafens utseende ligga till grund för en hypotes som sedan bekräftades med hjälp av ytterligare observationer.

Det förekom *få förklaringar*, vilket innebär att de resonemang som fördes sällan kopplades till den bakomliggande matematiken. Vanligtvis användes observationer av olika resultat på datorns skärm som data, utan att studenterna försökte använda sina matematiska kunskaper för att förstå varför resultaten uppstod. Vidare förklarades sällan de hypoteser som formulerades, varken genom att steget från data till hypotes motiverades eller via någon annan matematiskt grundad förklaring.

Alla tre paren använde *GeoGebra* för att göra olika typer av undersökningar, både för att komma fram till en hypotes och för att bekräfta en redan formulerad hypotes. Tolkningar av resultat på skärmen var tveklöst den typ av data som flest hypoteser grundade sig på. Studenterna använde *GeoGebra* i huvudsak på två olika sätt. Det ena sättet var att dra en av glidarna fram och tillbaka och observera hur grafen förändrades i stort. Denna mer globala utgångspunkt (”global view”) där den dynamiska kopplingen mellan parametervärde och graf var i fokus användes ofta i början av en undersökning för att få en överblick. Det andra sättet studenterna använde *GeoGebra* på var att fixera glidarna på speciella värden för att studera grafen mer i detalj (”local view”), exempelvis för att bestämma skärningspunkter eller extremvärden.

5.3.3 Diskussion om studiens resultat

Resultaten från studien ska ses som exempel på matematiska resonemang som kan utvecklas då elever/studenter jobbar parvis med undersökande uppgifter i en lärandemiljö med dynamiska matematikprogram. Det finns dock andra studier som bekräftar vissa resultat. Bristen på förklaringar då elever/studenter har tillgång till datorhjälpmedel har tidigare observerats av t.ex. Hollebrands m.fl. (2010), Smith (2010) och Drijvers (2003). Vidare bekräftar både studien av Hollebrands m.fl. och studien av Smith att elever/studenter gärna använder datorn för att bekräfta sina hypoteser.

Utifrån antagandet att det är lärorikt för elever/studenter att arbeta på ett sätt som, åtminstone delvis, påminner om hur många matematiker arbetar (t.ex. Burton, 2004; Chazan, 1990a; Lampert, 1990; Pólya, 1990a; Schoenfeld, 1992) identifierades både lovande och oroande egenskaper i studenternas resonemang. Den cykliska processen där hypoteser formuleras och förfinas är lovande, inte minst i ljuset av att de ovan nämnda forskarna lyfter fram hypotesernas centrala roll i matematiskt tänkande. Bland annat skriver Mason m.fl. (1982) att ”conjecturing on a small scale lies at the heart of mathematical thinking” (s. 64) samt att ”Conjecturing can be pictured as a cyclic process” (s. 64). Pólya (1990b) betonar att matematiker ofta gissar att ett samband gäller och sedan försäkrar sig om att det gäller innan de bevisar det. Studenterna i studien bevisade aldrig sina hypoteser, däremot formulerade de ofta hypoteser i ett tidigt skede (likt gissningar) som de sedan försökte bekräfta med hjälp av ytterligare data. Ett annat lovande resultat är de metareflektioner som fick studenterna att stanna upp och ibland resonera på ett nytt sätt. Schoenfeld (1992) betonar betydelsen av att, vid problemlösning, stanna upp och reflektera kring vad man egentligen håller på med. Han menar att metareflektioner utgör en viktig del av matematiskt tänkande.

Studenternas resonemang var ofta induktiva och visuella, men det rådde brist på matematiska resonemang av mer förklarande och analytisk karaktär, grundade i en förståelse av de bakomliggande matematiska begreppen. Studien bekräftar därmed att det finns en risk att denna typ av resonemang, starkt förknippad med matematik, missgynnas då dynamiska matematikprogram används (Drijvers, 2003; Healy & Hoyles, 1999; Hollebrands m.fl., 2010; Smith, 2010). Dock är det viktigt att komma ihåg att inga förklaringar efterfrågades i de uppgifter som gavs i studien. Det vore därför intressant med en jämförande studie där förklaringar efterfrågas. Ett forskningsområde som bör lyftas fram i detta sammanhang är forskning kring uppgiftsdesign, speciellt design av uppgifter som stimulerar olika typer av matematiska resonemang. En annan viktig faktor som påverkar i vilken utsträckning elever/studenter förklarar sina resultat med matematiskt grundade resonemang är de sociala och sociomatematiska normer som råder i klassrummet (Yackel & Cobb, 1996).

5.4 Artikel 4

Brunström, M. & Fahlgren, M. (in press). Designing prediction tasks in a mathematics software environment. *International Journal for Technology in Mathematics Education.*

Bakgrunden till artikel 4 är huvudsakligen att forskning visar att det finns behov av nya typer av uppgifter för att utnyttja de möjligheter som ny teknik erbjuder (Doorman, Drijvers, Gravemeijer, Boon, & Reed, 2012; Hitt & Kieran, 2009; Laborde, 2001). Artikeln fokuserar på design av ”prediction tasks” (se kapitel 2.5), speciellt ”prediction tasks” som främjar elevers resonemang om exponential-funktioner i en lärandemiljö med dynamiska matematikprogram. Syftet är att identifiera viktiga aspekter att beakta vid design av dessa uppgifter, med fokus på kopplingen mellan uppgiftsdesign och de resonemang som utvecklas.

5.4.1 Studiens kontext

Artikeln behandlar delar av den första cykeln i ett större designexperiment där artikelns båda författare bildade forskningsteam tillsammans med fyra gymnasielärare från två olika skolor. Fyra olika klasser, utan tidigare erfarenhet av dynamiska matematikprogram, som alla läste Matematik 1b medverkade i studien. Artikel 4 utgår från några av de uppgifter som ingick i det första arbetsbladet som arbetades fram, testades i de fyra klasserna och reviderades utifrån analysen av de elevresonemang som utvecklades.

Uppgifterna i arbetsbladet handlar om solroser som antas växa med en viss procent varje vecka. De första 7 uppgifterna handlar om en solros som är 50 cm när den mäts första gången (vecka 0) och sedan växer med 30 procent per vecka. Eleverna får räkna ut solrosens längd efter en vecka och sedan lägga in punkter som motsvarar solrosens längd efter 0 respektive 1 vecka i *GeoGebra*. Därefter ska de gissa var den punkt hamnar som motsvarar solrosens längd efter 2 veckor och förklara varför de gissat som de gjort. Sedan ska de beräkna solrosens längd efter 2 veckor och jämföra gissningen med det beräknade värdet samt försöka förklara eventuella skillnader. Därefter fortsätter aktiviteten på motsvarande sätt, där gissningar och förklaringar varvas med beräkningar och datorundersökningar. Förutom att stimulera till matematiska resonemang är det övergripande syftet med aktiviteten att introducera exponentiell tillväxt och att skapa situationer där linjärt tänkande elever hamnar i en kognitiv konflikt och ges möjlighet att lösa denna konflikt via matematiskt grundade resonemang.

Den forskningsdesign som användes beskrivs i kapitel 4.1.3. I fortsättningen av detta kapitel fokuseras dels på de didaktiska variabler som identifierades, både *a priori* och under analysarbetet, och dels på de viktigaste slutsatserna kopplat till dessa didaktiska variabler.

5.4.2 Didaktiska variabler

För att tydliggöra viktiga val i samband med uppgiftsdesignen identifierades ett antal didaktiska variabler. Följande sju didaktiska variabler, benämnda DV 1–DV 7, identifierades *a priori* utifrån forskningslitteratur:

> DV 1: Val av medium (är det t.ex. lämpligt att använda dator eller papper och penna eller både och för att lösa en viss uppgift).
>
> DV 2: ”Prediction task” eller inte.
>
> DV 3: Fråga efter en förklaring eller inte.
>
> DV 4: Val av representationsform för den funktion som studeras (t.ex. grafisk, algebraisk eller tabellform).

DV 5: Uppmuntra till lokalt eller globalt fokus då en funktion studeras, d.v.s. fokus på detaljer eller på funktionen i stort.

DV 6: Uppmuntra till fokus på sambandet mellan variablerna eller på hur variablerna samvarierar (”correspondence approach” eller ”covariation approach”).

DV 7: Specificera lämplig skala på koordinataxlarna eller inte.

DV 1–DV 3 bygger främst på litteratur om uppgiftsdesign med fokus på elevers matematiska resonemang (se kapitel 2), speciellt resonemang i en lärandemiljö med dynamiska matematikprogram. DV 4–DV 7 bygger på litteratur om undervisning och lärande av funktioner (se kapitel 3.3), speciellt exponentialfunktioner. Utöver de didaktiska variabler som identifierades *a priori* identifierades ytterligare 4 didaktiska variabler under analysarbetet:

DV 8: Val av numeriska värden (t.ex. värden som underlättar eller försvårar huvudräkning).

DV 9: Val av uppgiftsformulering, vid uppgifter där elever ombeds förklara, för att rikta deras fokus mot det som ska förklaras.

DV 10: Specificera gränser för en ”tillräckligt bra” gissning eller inte.

DV 11: Explicit referera till tidigare uppgifter i arbetsbladet eller inte.

De didaktiska variablerna, tillsammans med de kategoriseringar av förväntade elevresonemang som gjordes, var centrala i analysarbetet. När samtliga uppgifter analyserats gjordes följande något grövre kategorisering av elevresonemang för att få en bättre överblick över vilka typer av resonemang som förekom:

- Induktiva visuella resonemang
- Konceptuella visuella resonemang
- Induktiva symboliska resonemang
- Konceptuella symboliska resonemang

5.4.3 Diskussion utifrån de didaktiska variablerna

En didaktisk variabel som diskuterades i samband med samtliga uppgifter är DV 3, om en förklaring ska efterfrågas eller inte. I den reviderade versionen av arbetsbladet föreslås att ytterligare förklaringar efterfrågas, främst för att öka andelen konceptuella resonemang. De diskussioner som fördes angående DV 3 handlade även om att det är viktigt att det verkligen finns något att förklara då förklaringar efterfrågas, så att eleverna inte får en felaktig bild av vad det innebär att förklara i matematik. Detta kan tyckas självklart, men när det t.ex. gäller att förklara eventuella skillnader mellan en gissning och ett beräknat värde kan det vara svårt för elever att veta om skillnaden är så stor att en förklaring behövs eller inte.

Vi kunde även konstatera att många elever egentligen svarade med beskrivningar när förklaringar efterfrågades samt att förklaringarna ibland handlade om något annat än det vi tänkt oss när uppgiften formulerades. Analysen tydliggjorde att den exakta formuleringen av frågan är mycket viktig när förklaringar efterfrågas. Av denna anledning infördes den nya didaktiska variabeln, DV 9. Samtliga uppgifter där förklaringar efterfrågas fick revideras, vilket visar betydelsen av denna didaktiska variabel och hur svårt det är att formulera uppgifter, där förklaringar efterfrågas, på ett tillräckligt preciserat sätt.

Ett flertal didaktiska variabler, inte minst bland de som identifierades under analysarbetet, berör olika typer av ”scaffolding”. Diskussionerna handlade ofta om hur mycket guidning eleverna ska få i arbetsbladet. Med för lite guidning är risken stor att situationen i klassrummet blir ohållbar på grund av att alltför många elever kör fast. Detta fick ofta ställas mot risken att för mycket guidning kan göra att elevernas möjligheter till givande matematiska resonemang reduceras och att missuppfattningar inte synliggörs. Ett tydligt exempel där vi valde att inte guida eleverna är att vi inte vid något tillfälle specificerade lämplig skala på koordinataxlarna, DV 7. Istället uppmanades eleverna att vid behov göra lämpliga justeringar av skalan. Vi stärktes i dessa val av att flera givande resonemang uppstod vid situationer där skalan behövde justeras.

En av uppgifterna, uppgift 4, förändrades från grunden utifrån analysen av elevernas arbete. Analysen visade att ett relativt stort antal elever fortfarande tänkte linjärt (när det gällde solrosens längd som funktion av tiden) när de var klara med uppgiften. Detta trots att uppgiften var medtagen främst för att konfirmera för eleverna att solrosen växer mer och mer för varje vecka. Inte mindre än 6 olika didaktiska variabler var inblandade i revideringen vars syfte var att få eleverna att reflektera kring den bakomliggande matematiken, d.v.s. varför upprepad procentuell förändring (med konstant förändringsfaktor) leder till exponentiell tillväxt. Bland annat reviderades uppgiften så att fokus flyttades från solrosens längd till dess tillväxt, d.v.s. hur längden ändras. Denna revidering gjordes för att få eleverna att reflektera kring hur variablerna tid och längd samvarierar. Enligt (Confrey & Smith, 1994, 1995) gynnas elevers förståelse av exponentialfunktioner av en fokusering på hur variabler samvarierar. På motsvarande sätt som i uppgift 4 reviderades även andra uppgifter för att betona samvariationsaspekten och för att gynna konceptuella resonemang.

Även om det fanns behov av att revidera vissa uppgifter är den samlade bilden att uppgifterna gav upphov till matematiska resonemang både då gissningar och eventuella avvikelser mellan gissningar och undersökningsresultat skulle förklaras. Exempelvis förklarade drygt hälften av eleverna sin första gissning på ett sätt som motsvarade någon av de förväntade resonemangskategorierna. Vidare lyckades flera par som gissat linjärt förklara sina egna tankefel när de jämförde gissningen med det beräknade värdet.

6 Slutsatser

Som tidigare nämnts i introduktionen är det övergripande syftet med avhandlingen att undersöka hur dynamiska matematikprogram kan användas för att öka möjligheterna för elever att utveckla sin förmåga att föra matematiska resonemang. Fyra olika aspekter av syftet identifieras i introduktionen. I detta kapitel presenteras avhandlingens slutsatser utifrån dessa aspekter enligt följande: design av uppgifter som stimulerar till matematiska resonemang (6.1), utvecklandet av analysverktyg för att beskriva och analysera elevers resonemang (6.2), karakterisering av de resonemang som utvecklas när elever jobbar med olika uppgifter (6.3) och kartläggning av hur datorn används för att stödja dessa resonemang (6.4). Slutsatserna bygger på de olika delstudiernas resultat i förhållande till varandra och i förhållande till tidigare forskning.

6.1 Design av uppgifter som stimulerar till matematiska resonemang

Både artikel 1 och artikel 4 behandlar uppgiftsdesign, men utifrån olika utgångspunkter. I artikel 1 utvecklas, utvärderas och revideras en modell för hur man kan göra om traditionella bevisuppgifter till mer öppna undersökande uppgifter. Huvudresultatet i denna studie är själva modellen och de justeringar av modellen som gjordes utifrån analysen av doktorandernas arbete. Artikel 4 behandlar design av ”prediction tasks”, för att främja elevers resonemang om exponentialfunktioner. Huvudresultatet i denna studie är de didaktiska variabler som visade sig avgörande vid design, analys och revidering av uppgifterna. Trots olikheterna som finns mellan de båda studierna finns ett antal resultat som är intressanta att jämföra. Dessutom kan dessa resultat i några fall vara intressanta att jämföra med resultat från artikel 3. Nedan diskuteras resultaten utifrån fyra olika teman: gissningar och hypoteser, skriftligt formulerade tankar, förklaringar samt ”scaffolding”.

6.1.1 Gissningar och hypoteser

I artikel 4 fokuseras på en speciell typ av uppgifter, ”prediction tasks”, där eleverna börjar med att göra en gissning som sedan jämförs med resultat från en beräkning eller undersökning. Även om flera uppgifter behövde revideras på ett eller annat sätt visade sig grundidén, att utgå från en genomtänkt gissning, ge upphov till resonemang av olika slag, däribland matematiskt grundade resonemang. Att det kan vara fördelaktigt att låta elever förutse eller gissa ett resultat innan situationen undersöks vidare betonas av flera forskare (Arcavi & Hadas, 2000; Kasmer & Kim, 2012; Laborde, 2001). Kasmer och Kim (2012) föreslår att förutsägelser eller gissningar ska betraktas som en speciell resonemangsaspekt med potential att bidra till ökad matematisk förståelse.

En intressant koppling till artikel 1 är att doktoranderna började med att gissa vad resultatet skulle bli innan de påbörjade själva undersökningen, trots att någon gissning inte efterfrågades. Enligt Pólya (1990b) ingår gissningar som en viktig del i matematikers sätt att arbeta. Han betonar att matematiker ofta gissar att ett matematiskt samband gäller innan de, efter att ha försäkrat sig om att det verkligen gäller, försöker bevisa sambandet. Denna arbetsgång stämde väl in på doktoranderna i artikel 1.

Ju mer underbyggd en gissning är desto mer får den karaktären av en hypotes. En skillnad mellan den modell som presenteras i artikel 1 och Leungs modell (Leung, 2011) är att en hypotes efterfrågas i början i vår modell och i slutet i Leungs modell. När en hypotes eller en gissning formuleras tidigt kan den sedan ligga till grund för elevers reflektioner (Kieran & Saldanha, 2008). Dessa reflektioner kan sedan leda till nya undersökningar och revideringar av hypotesen (Lin m.fl., 2012). Även i artikel 3 visade det sig att studenterna formulerade inledande hypoteser i ett tidigt skede, ibland till och med innan de påbörjade själva undersökningen. Därefter testade de och förfinade dessa hypoteser, ofta flera gånger.

Slutsats: Sammantaget visar de studier som legat till grund för denna avhandling att uppgifter som inbjuder till tidigt ställda hypoteser eller genomtänkta gissningar kan stimulera till matematiska resonemang där dessa hypoteser/gissningar bildar utgångspunkt.

6.1.2 Skriftligt formulerade tankar

En designprincip som har använts genomgående i denna avhandling är att elever ska formulera sina tankar skriftligt (t.ex. Baccaglini-Frank & Mariotti, 2010; Kieran & Saldanha, 2008). Tack vare den utökade versionen av Toulmins modell framgick tydligt att studenterna i artikel 3 reflekterade och resonerade extra tack vare att de skulle formulera sina slutsatser skriftligt, med egna ord. Uttalanden som ”Hur ska man förklara det då, med egna ord?” och ”Vad ska vi skriva?” var vanligt förekommande och de ledde ofta till nya reflektioner och ibland även till nya undersökningar. Om uppmaningen att formulera slutsatserna skriftligt, med egna ord, inte funnits hade troligtvis resonemangen många gånger avbrutits tidigare och slutsatserna hade varit mindre genomtänkta. Även för doktoranderna i artikel 1 var det faktum att de skulle skriva ner sina slutsatser viktigt för deras resonemang, inte minst då detta ibland fick dem att reflektera vidare i nya banor. Ett tydligt exempel är när de ska formulera en generalisering gällande en godtycklig punkt *inne* i ellipsen. I samband med att de skriver ner denna slutsats, som de egentligen har kommit fram till långt tidigare, säger de plötsligt ”actually what about outside?”.

Även eleverna i artikel 4 uppmanades att formulera sig skriftligt. En anledning till detta var att eventuella missuppfattningar skulle synliggöras då skriftligt formulerade gissningar jämfördes med undersökningsresultat. Detta i sin tur för att öka möjligheterna för eleverna att reda ut sina missuppfattningar. En annan anledning till att eleverna uppmanades att formulera sig skriftligt var att deras slutsatser och förklaringar skulle kunna bilda utgångspunkt för en metadiskussion i klassen.

Slutsats: Genom dessa studier har vi ytterligare stärkts i uppfattningen att det är viktigt att elever får formulera gissningar, hypoteser, slutsatser och förklaringar skriftligt. Dels kan det faktum att de ska formulera sig skriftligt leda till nya lärorika resonemang och dels kan den skriftligt formulerade gissningen/hypotesen/slutsatsen bli föremål för ytterligare reflektioner och nya undersökningar.

6.1.3 Förklaringar

Två didaktiska variabler som visade sig avgörande vid design, analys och revidering av uppgifterna i artikel 4 handlar om förklaringar. Den ena av dessa gäller huruvida en förklaring ska efterfrågas eller inte, medan den andra gäller *hur* frågan ska formuleras för att rikta studenternas fokus på det som ska förklaras. Den sistnämnda didaktiska variabeln identifierades under analysarbetet, då det visade sig att många elever förklarade andra saker än de som efterfrågades. Detta ledde i flera fall till att frågorna omformulerades i ett försök att göra dem mer preciserade. Vikten av att formulera preciserade frågeställningar har även poängterats av Sinclair (2003), som menar att för vagt formulerade frågor kan leda till triviala elevsvar. Ett annat intressant resultat är att många elever svarade med beskrivningar istället för förklaringar. Detta visar på ett behov av att diskutera vad som egentligen menas med en förklaring och vad skillnaden är mellan en förklaring och en beskrivning. I detta sammanhang spelar de sociomatematiska normer som råder i klassrummet (Yackel & Cobb, 1996) en viktig roll.

Den didaktiska variabeln huruvida en förklaring ska efterfrågas eller inte hade stor betydelse i artikel 4. För att öka andelen matematiskt grundade resonemang reviderades arbetsbladet så att ytterligare förklaringar efterfrågas. Däremot efterfrågas inte några förklaringar i uppgifterna i artikel 3, vilket kan vara en av anledningarna till att studenternas resonemang till stor del saknade kopplingar till bakomliggande matematisk teori. Valet att inte efterfråga förklaringar gjordes i detta fall för att undersöka om studenterna trots detta skulle förklara sina hypoteser. Det hade varit intressant att jämföra med en liknande studie där förklaringar efterfrågas.

En tanke med den modell som presenteras i artikel 1, där hypoteser ska förklaras med egna ord innan de bevisas, är att fokus ska hamna på frågan varför en hypotes är sann. Detta för att öka chanserna att bevis konstrueras utifrån förståelse, eller som Weber & Alcock (2004) uttrycker det ”semantic proof production”. En intressant iakttagelse i denna studie är att doktoranderna betraktade sin första hypotes som bevisad när de hade kommit fram till en förklaring. För dem var uppgift (c) ”förklara” och uppgift (d) ”bevisa” i stort sett samma uppgift.

Medan gymnasieeleverna i artikel 4 hade svårt att se skillnad mellan att beskriva och förklara såg alltså doktoranderna i artikel 1 ingen större skillnad mellan att förklara och bevisa. Detta är intressant ur ett designperspektiv med tanke på att ord som beskriv, förklara och bevisa ofta används i olika uppgifter. I de nationella provens muntliga del för Matematik 2, 3 och 4 på gymnasiet är en av bedömningsgrunderna hur väl eleven beskriver och förklarar sina tankegångar. I den bedömningsmatris som används framgår det att en redovisning med tyngdpunkt på beskrivningar ger ett lägre betyg än om det även förekommer tillräckligt med förklaringar (Institutionen för tillämpad utbildningsvetenskap, Umeå Universitet, n.d.).

Slutsats: Vid design av uppgifter i en lärandemiljö med dynamiska matematikprogram spelar de frågor där förklaringar efterfrågas en avgörande roll, inte minst för att matematiskt grundade resonemang ska främjas. Avgörande designval handlar om när förklaringar ska efterfrågas och hur frågorna kan göras tillräckligt preciserade. Det är dessutom nödvändigt att diskutera med elever vad det innebär att förklara i matematik.

6.1.4 ”Scaffolding”

Flera didaktiska variabler som identifieras i artikel 4 handlar om olika typer av ”scaffolding”. Vi kunde observera hur en låg grad av ”scaffolding” ofta försatte elever i situationer som gav upphov till matematiska resonemang samtidigt som det kunde göra att elever blev sittande utan att komma vidare. Detta gjorde att en stor del av våra diskussioner i samband med revideringen av arbetsbladet kom att handla om graden av ”scaffolding”. Samtliga didaktiska variabler som identifierades under analysarbetet visade sig ha koppling till ”scaffolding” på ett eller annat sätt. Eftersom ett huvudsyfte med de uppgifter vi designade var att stimulera matematiska resonemang försökte vi hålla fast vid en låg grad av ”scaffolding” i möjligaste mån.

Denna typ av ställningstaganden förekom även vid utarbetandet och revideringen av modellen i artikel 1. När ett öppet problem ska formuleras måste man ofta ta ställning till graden av öppenhet. Den föreslagna modellen hade gått att göra mer öppen genom att exempelvis byta ut ”study the position of …” mot ”search for mathematical properties”. Vid revideringen av uppgift (e), valde vi att skriva om uppgiften för att leda in studenterna på ett systematiskt sätt att arbeta för att söka efter generaliseringar. Här valde vi alltså att lägga in en typ av ”scaffolding” för att gynna en viss arbetsgång. Idén till förändringen kom från det systematiska sätt på vilket doktoranderna arbetade för att göra problemet alltmer generellt.

Hur mycket ”scaffolding” som är lämpligt att lägga in i en uppgift måste avgöras från fall till fall beroende på många olika faktorer, t.ex. målet med uppgiften och elevernas matematiska förkunskaper. Dessa val är många gånger svåra, samtidigt som de kan vara helt avgörande för hur väl en uppgift kommer att fungera. Liknande ställningstaganden diskuteras av Sinclair (2003) som menar att studenternas motivation att genomföra olika undersökningar kan minska om man ger för mycket information, samtidigt som för lite information kan göra uppgifter för svåra.

Slutsats: En viktig princip för att uppgifter ska stimulera till matematiska resonemang är att hålla nere graden av ”scaffolding” så långt som möjligt.

6.2 Analysverktyg för att analysera matematiska resonemang i en lärandemiljö med ett dynamiskt matematikprogram

De empiriska data som ligger till grund för denna avhandling kommer från tre olika studier. På grund av studiernas olika karaktär har behov funnits av olika typer av analysverktyg. Dock har den studie som beskrivs i artikel 1 och den som beskrivs i artikel 4 vissa likheter. I detta avsnitt diskuteras först förutsägelser av resonemangsbanor och didaktiska variabler och därefter den utökade versionen av Toulmins modell.

6.2.1 Förutsägelser av resonemangsbanor och didaktiska variabler

Både artikel 1 och artikel 4 har fokus på design av uppgifter och i båda studierna har ett första designförslag testats empiriskt och sedan reviderats utifrån en analys av de resonemang som utvecklades. I dessa studier har uppgifter designats med syfte att gynna vissa resonemangsbanor. Därför har det vid uppgiftsdesignen varit viktigt att försöka förutse, för var och en av uppgifterna, vilka möjligheter till resonemang som ges. Som tidigare nämnts motsvarar dessa förutsägelser eller hypoteser det Gravemeijer (2004) benämner ”conjectured local instruction theory”.

I artikel 4 låg dessa hypoteser till grund för en kategorisering av förväntade elevresonemang som sedan användes som utgångspunkt vid klassificeringen av de resonemang som uppstod. I denna studie analyserades stora mängder data, både filmat material och skriftliga redovisningar. Det var därför viktigt att kunna klassificera elevernas resonemang utifrån olika, någorlunda övergripande, resonemangskategorier. I artikel 1, där endast ett pars arbete analyserades, gjordes ingen kategorisering. Däremot användes förutsägelserna som jämförelsematerial för att se vilka möjligheter till resonemang som realiserades samt om några oväntade resonemang uppstod.

Det var alltså uppgiftsspecifika analysverktyg, i form av genomtänkta förutsägelser av resonemangsbanor, som utvecklades för att analysera matematiska resonemang i båda dessa studier. I artikel 4 var även de didaktiska variabler som identifierades, både *a priori* och under själva analysarbetet, viktiga vid analysen. Även om dessa inte utgjorde analysverktyg för elevernas resonemang, så var de viktiga för att tydliggöra kopplingen mellan de resonemang som utvecklades och de designval som gjordes.

Slutsats: Att använda en kombination av förutsägelser av resonemangsbanor och didaktiska variabler vid design, analys och revidering av uppgifter visade sig vara mycket användbart i den studie som låg till grund för artikel 4 och bör kunna vara användbart även i andra liknande studier.

6.2.2 En utökad version av Toulmins modell

I den studie som presenteras i artikel 3 är inte fokus på design av uppgifter, även om speciella uppgifter designades för att ingå i studien. I studien gjordes inte heller några kategoriseringar *a priori* eller förutsägelser angående vilka typer av resonemang som skulle kunna utvecklas. Istället var det viktigt att analysera de resonemang som uppstod, både till struktur och till innehåll, mer förutsättningslöst utan förutbestämda kategorier. Detta, bland annat, för att minska risken att inte upptäcka oväntade resonemang (Powell m.fl., 2003). Det var också viktigt att analysera resonemangen på en relativt detaljerad nivå eftersom studien syftar till att identifiera karakteristiska egenskaper i resonemangen och dessutom att urskilja hur studenterna använder *GeoGebra* för att stödja sina resonemang.

De flesta modeller för att analysera matematiska resonemang som föreslås av olika forskare bygger på någon typ av fördefinierade kategorier, t.ex. Harel och Sowder (1998), Balacheff (1988), Stylianides (2008) och Lithner (2008). För att analysera de data som ligger till grund för artikel 3 behövdes en mer öppen modell och dessutom en modell som ger möjlighet att analysera såväl resonemangens struktur som deras innehåll. Eftersom sökandet efter en lämplig modell inte gav önskat resultat utvecklades ett nytt analysverktyg i form av en utökad version av Toulmins modell (Toulmin, 1958). Modellen visade sig användbar för att urskilja viktiga egenskaper i studenternas resonemang, både när det gäller struktur och innehåll. För att undersöka modellens användbarhet i andra studier testades den i ytterligare 2 fall, dels för att analysera delar av resonemanget mellan doktoranderna i artikel 1 och dels för att analysera en sekvens från designexperimentets tredje och sista datoraktivitet. Jämför man dessa båda fall var det främst vid analysen av doktorandernas arbete som de utökningar som gjorts av Toulmins originalmodell var väsentliga. Den utökade versionen av Toulmins modell diskuteras relativt utförligt i kapitel 5.2, varför endast en sammanfattande slutsats presenteras här.

Slutsats: Den utökade versionen av Toulmins modell har visat sig användbar för att analysera matematiska resonemang mellan elever/studenter som använder ett dynamiskt matematikprogram för att utforska matematiska samband. Några möjligheter som modellen ger, förutom att den kan ge en god bild av resonemangens struktur, är att den kan tydliggör (a) vilka hypoteser som ställs och hur de utvecklas, (b) vilken typ av data dessa hypoteser grundas på, vilket kan visa hur datorn används, (c) om och i så fall på vilket sätt hypoteserna bekräftas med ytterligare data, vilket även det kan visa hur datorn används, (d) hur matematiskt grundade resonemangen är (förekomst av och innehåll i ”backing of data” och ”warrant”) samt (e) vilka reflektioner som leder till att nya undersökningar och resonemang initieras. Ett problem med modellen är att det ibland kan vara svårt att avgöra hur olika uttalanden ska kategoriseras.

6.3 Olika typer av resonemang som utvecklas i en lärandemiljö med dynamiska matematikprogram

Tre olika studier har genomförts där de matematiska resonemang som utvecklas i en lärandemiljö med dynamiska matematikprogram har studerats. Trots att studierna skiljer sig åt vad gäller deltagarnas matematiska nivå och vilka typer av uppgifter som har använts finns det intressanta jämförelser att diskutera. Nedan följer en diskussion utifrån två av huvudresultaten i den studie som presenteras i artikel 3. Det första resultatet visar på en möjlighet och det andra på en risk med dynamiska matematikprogram. Det första är att resonemangen i artikel 3 ofta utvecklades i en cyklisk process och det andra att det vanligtvis saknades matematiskt grundade förklaringar till de upptäckter som gjordes.

6.3.1 Resonemang utvecklas i en cyklisk process

I artikel 3 är ett av huvudresultaten att studenterna formulerade hypoteser som de sedan undersökte vidare och reviderade/förfinade i en cyklisk process. I artikeln poängteras de likheter som finns mellan detta sätt att angripa ett problem och det sätt på vilket många matematiker arbetar (t.ex. Mason m.fl., 1982). Detta ses som ett lovande resultat utifrån antagandet att elever behöver få uppleva ett mer matematiskt arbetssätt (e.g. Burton, 2004; Chazan, 1990a; Lampert, 1990; Pólya, 1990a; Schoenfeld, 1992). Utifrån detta antagande var det även positivt att övergången till en ny cykel vid flera tillfällen initierades av metareflektioner som kunde få studenterna att resonera i nya banor. Betydelsen av denna typ av reflektioner vid matematisk problemlösning betonas av Schoenfeld (1992).

Även doktorandernas resonemang i artikel 1 var cykliskt, och dessutom på två olika nivåer. Förutom att deras förklaring till den ursprungliga hypotesen utvecklades via upprepade undersökningar av olika idéer i en cyklisk process, så innebar hela generaliseringsprocessen att nya undersökningar och resonemang ledde till alltmer generella hypoteser i en systematisk cyklisk process. Både modellen i artikel 1 och de uppgifter som användes i artikel 3 är formulerade för att locka studenter att utnyttja de möjligheter *GeoGebra* ger till ett undersökande arbetssätt, där hypoteser formuleras och undersöks vidare. På detta sätt fungerade uppgifterna som det var tänkt, vilket var ett viktigt resultat.

Slutsats: Dynamiska matematikprogram i kombination med lämpligt utformade uppgifter kan stimulera till matematiska resonemang där hypoteser formuleras och undersöks vidare i en cyklisk process.

6.3.2 Brist på matematiskt grundade resonemang

Ett resultat i artikel 3 är att studenternas resonemang grundade sig på visuella intryck som sällan förklarades eller kopplades till den bakomliggande matematiken. I många fall bestod hypoteserna av generaliseringar av upptäckta mönster gällande sambandet mellan en parameters värde och motsvarande grafs utseende. Dessa resonemang kan karakteriseras som induktiva visuella resonemang utan matematiskt grundade förklaringar. Även om förklaringar inte efterfrågades i studien, var bristen på förklaringar ett viktigt resultat. Det visar att risken är stor att elever/studenter inte ser något behov av att förklara de resultat som deras undersökningar ger eller av att förstå den bakomliggande matematiken. Denna risk har tidigare identifierats av bland andra Drijvers (2003) och Joubert (2013) samt av Healy och Hoyles (1999) som skriver att kraftfulla visuella intryck kan påverka studenter ”to solve problems simply by perception, without mobilizing any mathematical knowledge” (s. 60). Det finns dock studier som visar att elever/studenter kan bli motiverade att förklara hypoteser som de själva har ställt utifrån visuella intryck, i en lärandemiljö med dynamiska matematikprogram (Christou m.fl., 2004).

Även i studien som rapporteras i artikel 4 förekom induktiva visuella resonemang utan matematiskt grundade förklaringar. Dock förekom även andra typer av resonemang. Totalt identifierades fyra övergripande resonemangskategorier: induktiva visuella, konceptuella visuella, induktiva symboliska och konceptuella symboliska. Som tidigare nämnts gjordes flera revideringar av arbetsbladet med syfte att öka andelen konceptuella resonemang. Detta för att exempelvis öka chanserna för de linjärt tänkande eleverna att förstå varför det blir exponentiell tillväxt, d.v.s. att förstå den bakomliggande matematiken. Studien visar på ett behov av noggrant designade uppgifter för att elevernas arbete vid datorn ska leda till matematiskt grundade resonemang och ökad begreppsförståelse.

Det är intressant att jämföra den ovan nämnda risken, att elever/studenter inte ser något behov av att förklara de upptäckter de gör med datorns hjälp, med den risk som flera forskare har identifierat att tillgången till dynamiska matematikprogram kan göra att studenter inte ser något behov av matematiska bevis (Arcavi & Hadas, 2000; Chazan, 1993; Edwards, 1997). Detta eftersom de kan försäkra sig om att deras hypoteser är sanna genom att undersöka ett stort antal exempel på kort tid.

Slutsats: Resultat från artikel 3 och artikel 4 visar att det finns en risk att resonemang som utvecklas i en lärandemiljö med dynamiska matematikprogram i liten utsträckning kopplas till den bakomliggande matematiken.

6.4 *GeoGebra* kan användas för att stödja matematiska resonemang

I detta avsnitt diskuteras hur *GeoGebra* utnyttjades för att stödja olika matematiska resonemang. Två viktiga resultat från studierna är dels hur *GeoGebra* användes för att upptäcka och bekräfta hypoteser och dels hur elever/studenter byggde upp en förståelse för hur programmet kan användas.

6.4.1 GeoGebra används för att upptäcka och bekräfta hypoteser

Ett tydligt resultat, både i artikel 1 och artikel 3, är att doktoranderna/studenterna använde *GeoGebra* både för att upptäcka hypoteser och för att bekräfta redan ställda hypoteser. De utnyttjade den möjlighet som ges av programmet att på ett enkelt sätt undersöka olika exempel. Gemensamt för de båda studierna är också att doktoranderna/studenterna växlade mellan att studera mer övergripande egenskaper hos de konstruktioner de gjort och att fokusera på detaljer, d.v.s. de växlade mellan en ”local view” och en ”global view”. Ett resultat från artikel 4 är att elever ibland hade svårt att veta vilket fokus de skulle ha. Åtminstone två av de filmade paren drog felaktiga slutsatser på grund av att de hade fel fokus. De fokuserade mer lokalt än globalt vilket gjorde att de inte upptäckte det mönster som skulle synliggöras med uppgiften.

Både doktoranderna i artikel 1 och studenterna i artikel 3 kunde formulera inledande hypoteser tidigt tack vare användandet av *GeoGebra*. Studenterna i artikel 3 inledde ofta sina undersökningar genom att dra en av glidarna fram och tillbaka och observera hur grafen förändrades globalt. De utnyttjade alltså den möjlighet som finns tack vare glidarverktyget att dynamiskt studera kopplingen mellan parametervärde och graf och att därigenom få en snabb överblick över situationen (Drijvers, 2003). På detta sätt fick de ofta underlag för en första hypotes som sedan kunde ligga till grund för de fortsatta resonemangen. Utan glidarverktyget hade det visserligen varit möjligt att ta fram grafer med olika parametervärden, men inte att studera den dynamiska kopplingen och få en snabb överblick på samma sätt. Zbiek och Heid (2001) beskriver hur glidarverktyget kan stimulera till matematiska resonemang på följande sätt: ”The ease with which the slidergraph, unlike static graphing utilities, allow students to vary a single parameter quickly is the key to launching student reasoning” (ss. 684-685).

En nackdel med att använda glidarverktyget kan vara att det blir svårare att jämföra olika grafer eftersom man endast ser en graf åt gången. Detta kan avhjälpas genom att sätta spår på grafen och därigenom få ”a sheaf of graphs” (Drijvers, 2003), en möjlighet som inga studenter i studien utnyttjade. Ett annat potentiellt problem med glidarverktyget när man ska studera hur värdet på en parameter påverkar grafens utseende är att parametern finns representerad på tre ställen: formeln, grafen och glidaren. Risken är att den tredje representationen, glidaren, gör att fokus inte hamnar på kopplingen mellan formel och graf (Zbiek m.fl., 2007).

Det skulle vara intressant att jämföra studenter som har tillgång till glidarverktyget och studenter som inte har det, för att se hur resonemangen skiljer sig åt. Resultat tyder exempelvis på att studenterna i artikel 3 bekräftade sina hypoteser en eller flera gånger extra tack vare enkelheten att variera olika parametervärden med hjälp av glidaren. En liknande studie där gymnasieelever använde grafritande miniräknare (utan glidarverktyg) för att undersöka hur parametrarna b och c påverkar grafen till funktionen $y = x^2 + bx + c$ genomfördes av Bergqvist (2001). Resultat från denna studie visar att eleverna endast använde ett eller två exempel för att bekräfta sina hypoteser.

Slutsats: Resultat från artikel 1 och artikel 3 visar hur *GeoGebra* utnyttjades på olika sätt, dels för att få en snabb överblick och formulera en första hypotes och dels för att undersöka hypotesen vidare. Speciellt tyder resultat från artikel 3 på att glidarverktyget spelade en viktig roll för de resonemang som utvecklades, dels genom möjligheten att dra en av glidarna fram och tillbaka och observera hur grafen förändras globalt och dels genom möjligheten att snabbt och enkelt undersöka ett stort antal exempel på olika detaljnivå.

6.4.2 Betydelsen av ”Instrumental Genesis”

En intressant aspekt av hur doktoranderna använde *GeoGebra* är att de ofta gjorde olika hjälpkonstruktioner (t.ex. nya linjer) och undersökte specialfall (cirkeln) för att få idéer och för att hitta förklaringar till geometriska egenskaper. En förutsättning för att de skulle ha möjlighet att göra dessa konstruktioner var att de lärt sig grunderna i hur programmet fungerar och att de gjort själva grundkonstruktionen på egen hand. Det var tydligt vid några tillfällen att de gjorde nya konstruktioner eller hjälpkonstruktioner tack vare att det var så enkelt för dem. Vid ett tillfälle bestämde de sig för att testa en idé genom att göra en ny konstruktion ”just for fun”. Det hände också att de blev hindrade att testa idéer på grund av deras begränsade erfarenhet av programmet. Vid några tillfällen visste de helt enkelt inte hur den konstruktion de var i behov av skulle göras eller om den överhuvudtaget gick att göra i *GeoGebra*.

Som tidigare nämnts behandlar artikel 4 en liten del av ett större designexperiment. Det var tydligt hur de elever som deltog i designexperimentet tog alltfler egna initiativ ju mer de lärde sig använda programmet. Ett exempel framgår av fall 3 i artikel 2, där den utökade versionen av Toulmins modell används för att analysera en episod då ett av elevparen arbetar med den tredje och sista datoraktiviteten. Eleverna insåg att de kan testa en av sina hypoteser genom att först lägga in en punkt på den graf de studerar och sedan se till att punkten får önskad x-koordinat och läsa av y-koordinaten. Med mindre kännedom om programmet hade de sannolikt inte tagit detta initiativ till undersökning för att verifiera sin hypotes.

En princip som har legat till grund för samtliga studier är att elever själva ska göra de konstruktioner som behövs, ibland med hjälp av noggranna instruktioner och ibland mera fritt, beroende på hur komplicerade konstruktionerna är och hur stor erfarenhet eleverna har av det aktuella programmet. När de gör dessa konstruktioner lär de sig använda programmet, vilket medför att de succesivt kan utnyttja alltfler funktioner och hitta nya sätt att utnyttja programmet. På detta sätt främjas den process som brukar benämnas ”instrumental genesis” (Verillon & Rabardel, 1995), d.v.s. den process där ett verktyg för en individ utvecklas till ett användbart instrument.

Betydelsen av ”instrumentel genesis” har tidigare poängterats i ett stort antal studier (Artigue, 2002; Leung, 2011; Trouche, 2004) samtidigt som det är vanligt att elever får färdigproducerade konstruktioner att arbeta med (t.ex. Sinclair, 2003). Ruthven m.fl. (2008) genomförde fokusgruppsintervjuer med matematiklärare på olika skolor för att få en bild av lärares syn på användandet av dynamiska geometriprogram. Av intervjuerna framkom bland annat att tidsaspekten var avgörande för om lärarna skulle låta eleverna arbeta själva med det aktuella programmet och om de skulle få göra egna konstruktioner. Den tid det beräknades ta för eleverna att lära sig använda programmet vägdes mot möjligheten till matematiskt lärande. Det som beaktades var den direkta möjligheten till matematiskt lärande och inte möjligheten att längre fram kunna utnyttja programmet på ett mer avancerat sätt, t.ex. för att utforska och undersöka egna idéer.

Slutsats: Resultat från studierna visar att det är viktigt att understödja elevers ”instrumental genesis” genom att låta dem göra egna konstruktioner. Vid flera tillfällen blev det tydligt hur en kännedom om programmets möjligheter kan öppna upp för nya undersökningar och resonemang samtidigt som en begränsad erfarenhet av programmet kan göra att idéer inte undersöks vidare.

7 Diskussion

I detta kapitel diskuteras först avhandlingens bidrag och därefter frågor gällande avhandlingens kvalitet. Kapitlet avslutas med ett avsnitt om vidare forskning.

7.1 Avhandlingens bidrag

I detta avsnitt diskuteras först avhandlingens bidrag till undervisningspraktiken och därefter avhandlingens teoretiska bidrag.

7.1.1 Avhandlingens bidrag till undervisningspraktiken

Ett problem som lyfts fram på olika håll är att det finns ett glapp mellan den utbildningsvetenskapliga forskningen och den vardag som lärare och elever möter i skolan (t.ex. Burkhardt & Schoenfeld, 2003; Carlgren, 2011; The Design-Based Research Collective, 2003). Enligt Carlgren (2011) handlar forskningen i liten grad om de frågor som är centrala för lärarna. Ett syfte med denna avhandling har varit att bidra till det identifierade behovet av praktiknära forskning rörande hur dynamiska matematikprogram kan utnyttjas för att ge elever möjlighet att utveckla sin resonemangsförmåga.

I artikel 4 behandlas delar av den första cykeln i ett större designexperiment där artikelns båda författare bildade forskningsteam tillsammans med fyra gymnasielärare. Ett syfte med designexperiment är enligt Cobb m.fl. (2003) ”to investigate the possibilities for educational improvement by bringing about new forms of learning in order to study them” (s. 10). Cobb m.fl. menar att ett utmärkande drag för designexperiment är att de teorier som utvecklas ska vara direkt tillämpbara i undervisningen. Enligt Gravemeijer och Cobb (2006) kan designexperiment både leda till ”lokala teorier” bundna till en avgränsad del av matematiken och till teorier som går att tillämpa på olika områden.

De teorier som utvecklades i artikel 4 handlar främst om olika didaktiska variabler, med fokus på avgörande designval vid uppgiftskonstruktion, och deras påverkan på elevernas resonemangsbanor. Dessa teorier bör ha stor relevans för undervisningspraktiken på grund av uppgifters centrala roll i matematikundervisningen och det behov som finns av uppgifter och undervisningssituationer som stimulerar matematiska resonemang. Några av de didaktiska variablerna var mer generella medan andra var knutna till lärandemiljön med dynamiska matematikprogram och/eller ”prediction tasks” och/eller funktioner och grafer. Några designval som visade sig extra viktiga för hur resonemangen utvecklades gällde (a) om en förklaring ska efterfrågas eller inte, (b) hur frågan ska göras tillräckligt preciserad när en förklaring efterfrågas samt (c) hur mycket ”scaffolding” som ska byggas in i uppgiften. En didaktisk variabel, knuten till funktioner, som fick stor betydelse gällde om fokus ska läggas på sambandet mellan variablerna (correspondance approach) eller på hur variablerna samvarierar (covariation approach).

I designexperimentet utvecklades även tre datoraktiviteter, i form av arbetsblad med en följd av uppgifter. Dessa kommer förhoppningsvis spridas på olika sätt och användas direkt eller efter anpassning av olika lärare. Viss spridning har redan skett via föreläsningar och workshops, t.ex. på kurser inom lärarutbildningen och vid matematikbiennalen. Gravemeijer och Eerde (2009) kallar denna typ av spridning för en spin-off effekt av designforskning. De skriver ”To support teachers further, a set of exemplary instructional activities and materials may be produced – as a spin-off of the design research project – that teachers may adopt and adapt” (s. 512).

Den studie som ligger till grund för artikel 1 är inte del av ett designexperiment men den har stora likheter med studien i artikel 4. I båda fallen har litteraturstudier legat till grund för design av uppgifter som sedan har testats empiriskt och reviderats. Bakgrunden till artikel 1 är att artikelförfattarna läste en doktorandkurs i geometri. En övervägande del av de uppgifter som ingick i kursen var av typen ”Bevisa att …”. Bevisen gick ibland att genomföra rent algebraiskt utan att den bakomliggande geometrin behövde synliggöras eller förstås. Vid upprepade tillfällen använde vi *GeoGebra* för att förstå vad den sats som skulle bevisas egentligen handlade om. Dessutom kunde *GeoGebra* användas för att upptäcka generaliseringar av vissa satser. Den modell som utvecklas i artikel 1 är tänkt att kunna användas för att göra om traditionella bevisuppgifter till mer öppna uppgifter där elever/studenter själva får möjlighet att upptäcka det som ska bevisas och att sedan söka vidare efter generaliseringar. En viktig del i modellen är att hypoteser ska bekräftas och förklaras innan de bevisas, detta för att främja bevis som bygger på förståelse. Modellen är alltså tänkt att vara direkt användbar i undervisningen, även om den kan behöva anpassas för att bli användbar för ett större antal problem.

Två viktiga designprinciper som har bildat utgångspunkt i samtliga studier är dels att elever själva ska göra de datorkonstruktioner som behövs och dels att de ska formulera sina hypoteser och förklaringar skriftligt. Resultat från avhandlingens studier styrker dessa principer som båda har stor relevans för undervisningspraktiken. Vidare bidrar denna avhandling till undervisningspraktiken genom att den tydligt lyfter fram både möjligheter och risker när det gäller matematiska resonemang som utvecklas i en lärandemiljö med dynamiska matematikprogram. Det underlättar för lärare att utnyttja möjligheter och undvika risker när dessa är tydligt identifierade.

7.1.2 Avhandlingens teoretiska bidrag

När det gäller avhandlingens teoretiska bidrag vill jag främst lyfta fram det analysverktyg som har utvecklats, i form av en utökad version av Toulmins modell.

Anledningen till att ett nytt analysverktyg utvecklades var som tidigare nämnts att inget lämpligt analysverktyg hittades för den typ av resonemang som analyseras i artikel 3. Målet var att utveckla ett analysverktyg som gjorde det möjligt att analysera både resonemangens struktur och innehåll på en lagom detaljerad nivå utan fördefinierade resonemangskategorier. Den modell som utvecklades visade sig användbar för att analysera och illustrera matematiska resonemang mellan elever/studenter som använder ett dynamiskt matematikprogram för att utforska matematiska samband. De möjligheter modellen ger har tidigare diskuterats både i kapitel 5.2 och i kapitel 6.2.2. Även om modellen hittills endast har prövats i ett fåtal fall är resultaten lovande och den bör kunna vara användbar även i andra studier, antingen i sin nuvarande form eller efter ytterligare anpassningar utifrån respektive studies syfte och typ av data.

Det andra teoretiska bidraget som jag vill lyfta fram från artikel 2 är diskussionen kring hur Toulmins originalmodell har använts i olika studier. I artikeln betonas att det är ett problem att modellen tolkas olika av olika forskare. Speciellt kritiseras hur modellen har använts i tre konkreta fall (Inglis m.fl., 2007; Lavy, 2006; Whitenack & Knipping, 2002). Dessutom påvisas hur olikheter i sättet att tolka modellen kan leda till att likheter i forskningsresultat döljs. Jag hoppas att artikel 2 kan bidra till en diskussion om hur Toulmins modell tolkas och används inom matematikdidaktisk forskning. Inom naturvetenskapernas didaktik verkar modellen diskuteras i högre grad (Kelly & Takao, 2002; Rudsberg, 2014). Exempelvis diskuterar Kelly och Takao (2002) liknande problem som de som diskuteras i artikel 2, till exempel att modellen är svår att använda då längre resonemangssekvenser ska tolkas samt hur valet av detaljnivå i analysen påverkar hur ett resonemang tolkas i modellen. Kelly och Takao (2002) skriver: ”For example, one problem identified with Toulmin’s layout of arguments is the ambiguity of the categorical system. …. Yet in the context of actual argument, claims may serve as data in broader, more complex chains of reasoning” (ss. 315-316).

När det gäller de metoder som har använts vill jag även lyfta fram den kombination av förutsägelser av resonemangsbanor och didaktiska variabler som användes i artikel 4. Kombinationen tydliggjorde kopplingen mellan olika designval och möjliga resonemang och var därför värdefull genom hela designprocessen, d.v.s. vid design, analys och revidering av elevuppgifter. Att tydliggöra avgörande designval på detta sätt medverkar också till att forskningen kan kommuniceras tydligt. Cobb och Gravemeijer (2008) menar att det är ett problem att de olika tolkningar som forskare gör under ett designexperiment sällan görs synliga, de skriver ”Unfortunately, design researchers often fail to articulate the key constructs of what they use when making these interpretations” (s. 74). Även P. Bell (2004) betonar problemet att detaljer i forskningsprocessen ofta stannar inom forskar-gruppen och därmed inte blir synliga. I artikel 4 har vi försökt att synliggöra forskningsprocessen genom att fokusera på den första iterationen och beskriva den mer i detalj. Även i artikel 1 ges en detaljerad beskrivning av en första iteration med design, analys och revidering.

7.2 Diskussion om forskningens kvalitet

Två vanliga kriterier som brukar användas vid diskussionen om forskningskvalitet är reliabilitet och validitet. Dessa båda begrepp härrör dock från en kvantitativ forskningstradition och deras tillämpbarhet på kvalitativ forskning har ifrågasatts (Bryman, 2011). Inom den kvalitativa forskningen har dels försök gjorts att anpassa de båda begreppen för att de ska passa även för kvalitativ forskning och dels har olika alternativa kvalitetskriterier tagits fram (Bryman, 2011). Schoenfeld (2007) menar att tre kvalitetsfrågor som är relevanta för alla studier, oavsett om de är kvantitativa eller kvalitativa, är frågor som gäller trovärdighet (”trustworthiness”), generalitet eller räckvidd (”generality or scope”) samt betydelse (”importance”). I detta avsnitt kommer frågor som gäller trovärdighet och generalitet/räckvidd att diskuteras. För frågan om betydelse hänvisas till kapitel 7.1.

Trovärdighet handlar bland annat om hur väl olika resultat beskrivs och förklaras samt om noggrannhet och exakthet och att studierna ska vara upprepningsbara (Schoenfeld, 2007). Som redan diskuterats i kapitel 7.1.2 har vi försökt att beskriva och förklara forskningsprocessen på ett tydligt sätt i artikel 1 och i artikel 4, genom att relativt detaljerat behandla en första iteration med design, analys och revidering. I dessa studier tolkades och analyserades doktorandernas/elevernas resonemang gemensamt av de båda artikelförfattarna. I de fall där vi hade olika uppfattningar diskuterade vi oss fram till en gemensam tolkning.

De resultat som presenteras i artikel 3 bygger på analyser gjorda med hjälp av den utökade versionen av Toulmins modell, vilket gör att resultatens trovärdighet är direkt beroende av hur modellen har använts och hur väl modellen och användandet förklaras. I artikel 2 och artikel 3 har det därför varit viktigt att noga beskriva och förklara hur modell har använts. Detta har varit extra viktigt då det visat sig att Toulmins modell tolkas olika av olika forskare. För att öka säkerheten när det gäller modellens användande diskuterades, som tidigare nämnts, modellen och olika tolkningar vid två seminarier med kollegor inom SMEER (Science, Mathematics and Engineering Education Research) vid Karlstads universitet. Därefter är det dock artikelförfattaren själv som har gjort alla tolkningar, även om tolkningsproblem i vissa fall har diskuterats med kollegor. Ett problem med att skriva artiklar där en så pass komplicerad modell används som analysverktyg är det textbegränsade utrymmet som gäller för artiklar i olika tidsskrifter.

En annan aspekt av trovärdighet som Schoenfeld (2007) lyfter fram är ”Multiple Sources of Evidence” (s. 87). Det som stärker trovärdigheten utifrån denna aspekt är att olika typer av data samlades in under designexperimentet, se kapitel 4.1.3. De resultat som presenteras i artikel 4 bygger därför på olika typer av data. I övriga studier däremot bygger resultaten främst på de videoinspelningar som gjorts, även om de skriftliga arbetena i viss mån har använts. Det som ändå kan sägas stärka vissa resultat utifrån denna aspekt av trovärdighet är att tidigare forskning har kommit fram till liknande resultat. Detta gäller inte minst den identifierade risken att de resonemang som utvecklas i en lärandemiljö med dynamiska matematikprogram i stor utsträckning saknar koppling till den bakomliggande matematiken.

När det gäller generalitet betonar Schoenfeld (2007) att detta begrepp inte enbart ska tolkas som möjligheten att dra generella slutsatser. En fråga han ställer i samband med generalitet är ”What situations or contexts does the research really apply to?” (s. 81). Frågan är alltså när forskningen är tillämpbar. Trots att inga generella slutsatser kan dras från de studier som ingår i avhandlingen kan ändå dess generalitet, i form av räckvidd eller tillämpbarhet, anses vara god. I avhandlingen identifieras både möjligheter och risker som är viktiga att beakta när dynamiska matematikprogram integreras i undervisningen. Vidare anser jag att de båda studierna med fokus på uppgiftsdesign har hög tillämpbarhet. Argument för detta har redan framförts i kapitel 7.1.

7.3 Vidare forskning

I introduktionen beskrivs det övergripande problem som legat till grund för mitt val av forskningsområde, nämligen att dagens dynamiska matematikprogram är en till stor del outnyttjad resurs när det gäller att ge elever möjlighet att utveckla resonemangsförmåga. Inom detta problemområde finns behov av forskning som fokuserar på olika aspekter, exempelvis olika frågor kopplat till uppgiftsdesign, ”instrumental genesis” och lärarnas orkestrering av klassrummet. Meningen med detta avsnitt är inte att ge en övergripande bild av vilken forskning som behövs inom detta problemområde. Istället kommer jag dels att beskriva några planer för fortsatt forskning inom ramen för designexperimentet som legat till grund för artikel 4 och dels ge förslag till fortsatt forskning utifrån frågor som har aktualiserats under avhandlingsarbetet.

7.3.1 Fortsatt forskning i det pågående designexperimentet

Som tidigare nämnts behandlar artikel 4 delar av den första cykeln i ett större designexperiment. Det arbetsblad där de uppgifter som diskuteras i artikeln ingår har reviderats och är klart för att testas i en ny cykel. Detsamma gäller för ytterligare två arbetsblad som också har genomgått den första cykeln. Dessutom finns planer på att analysera de data som samlades in under dessa lektioner med fokus på andra frågeställningar, exempelvis frågor kopplat till lärarnas arbete under lektionerna. En intressant fråga gäller vilken typ av frågor lärarna fick och hur de valde att besvara dessa frågor.

Lektionen efter var och en av de tre ”datorlektionerna” ingick också som en viktig del i designexperimentet. Där var fokus på hur det som skedde under datorlektionerna kunde följas upp på ett bra sätt. Under dessa lektioner gjordes ljudinspelningar och klassrumsobservationer. Detta innebär att det finns en stor mängd data som väntar på att analyseras, exempelvis med fokus på de val lärarna gjorde under dessa lektioner.

7.3.2 Forskningsfrågor som aktualiserats under avhandlingsarbetet

Ett resultat i artikel 3, men även i viss mån i artikel 4, är att de resonemang som utvecklas i stor utsträckning saknar matematiskt grundade förklaringar. Frågan hur uppgifter bör designas för att främja matematiskt grundade resonemang har därför varit central i avhandlingen. I artikel 4 diskuteras detta ingående för en viss typ av uppgifter, ”prediction tasks”, inom ett speciellt område, introduktion av exponentialfunktioner. Bland de didaktiska variabler som identifieras är några knutna till den aktuella kontexten medan andra är mer allmänna. Liknande forskning med fokus på uppgiftsdesign som främjar matematiskt grundade resonemang i en lärandemiljö med dynamiska matematikprogram behövs inom olika områden av matematiken. På så sätt kan områdesspecifika didaktiska variabler identifieras.

Ett relativt nytt verktyg, som kan ha stor påverkan på elevers sätt att arbeta och resonera, är glidarverktyget. I studien bakom artikel 3 studeras hur studenterna använder detta verktyg och i kapitel 6.4.1 diskuteras både möjligheter och risker med verktyget. Jag ser ett behov av fortsatt forskning kring hur detta verktyg påverkar elevers sätt att resonera, liknande den forskning som redan finns när det gäller ”dragging” där olika ”dragging modalities” har identifierats (Arzarello m.fl., 2002).

Vidare har ett behov av forskning för att utveckla analysverktyg för att analysera elevers matematiska resonemang i en lärandemiljö med dynamiska matematikprogram identifierats. Ett förslag till analysverktyg har utarbetats i form av en utökad version av Toulmins modell, men modellen har endast prövats i ett fåtal fall. Det behövs därför fortsatt forskning, både för att utvärdera modellens förtjänster och brister och för att eventuellt vidareutveckla modellen och anpassa den utifrån olika behov.

8 English summary

This thesis consists of four articles and an interconnecting text, the capstone. The articles are all written in English while the capstone is written in Swedish. All four articles are included in the second part of this thesis. This chapter presents a short summary of the capstone in English.

8.1 Introduction and background

In this section the research area is introduced under the following sub-headings: Mathematical reasoning, Dynamic mathematics software, and Task design.

8.1.1 Mathematical reasoning

The view of what it means to master mathematics has changed over recent decades. Several descriptions have been made of the different competencies needed to master mathematics (e.g. Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001; NCTM, 2000; Niss, 2003). This change is also reflected in mathematics curricula in many countries (Goos, Galbraith, Renshaw, & Geiger, 2003). In all the frameworks mentioned above mathematical reasoning is emphasised as an important competency. It is also well documented that mathematical reasoning fosters mathematical understanding (e.g. Ball & Bass, 2003; Krummheuer, 1995; NCTM, 2000). The *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000) stated that “Being able to reason is essential to understanding mathematics” (p. 56).

Despite this agreement on the importance of mathematical reasoning there is no consensus on its definition (Yackel & Hanna, 2003). In this thesis a broad conception of mathematical reasoning is used, including activities like predicting, identifying patterns, conjecturing, justifying, generalizing, explaining, and proving. This view includes deductive, inductive, and abductive reasoning, and covers reasoning which is formal or informal and intuitive. This is in line with the notion of “Adaptive reasoning” used by Kilpatrick et al (2001) as well as the way in which reasoning is conceived in several other documents concerning school mathematics (e.g. NCTM, 2000; Stylianides, 2008).

Mathematics teaching in Swedish schools has recently been inspected, resulting in reports covering both the compulsory school (Skolinspektionen, 2009) and the upper secondary school (Skolinspektionen, 2010). Findings from these inspections show that textbooks have a dominant role in school mathematics and that students spend most of the time practicing routine procedures. There is usually not much time spent on activities like problem solving, mathematical communication or mathematical reasoning.

8.1.2 Dynamic mathematics software

The availability of computers in schools is increasing and today many schools provide students with a computer of their own (Grönlund, 2014; Valiente, 2010). There is also an increase in available software developed to facilitate the teaching and learning of mathematics. One interesting kind of software is *dynamic mathematics software.* A main feature of dynamic mathematics software is that it makes it possible for students to create different kinds of mathematical objects that can be altered dynamically, e.g. by dragging free objects or using a slider tool. Dynamically linked multiple representations of mathematical objects are offered and students can interact with the computer to investigate mathematical relations. Several authors emphasize the affordances provided by dynamic mathematics software for students to explore mathematical relations, to pose and verify conjectures and to explain their results (e.g. Arcavi & Hadas, 2000; Baccaglini-Frank & Mariotti, 2010; Christou, Mousoulides, Pittalis, & Pitta-Pantazi, 2004; Hanna, 2000). Nevertheless, according to Smith (2010), there is a lack of research focusing on the structure and content of students' mathematical reasoning in a dynamic software environment.

8.1.3 Task design

The increased availability of different kinds of technology in mathematics classrooms offers new possibilities, but it requires change in teaching and learning practice (Drijvers, Doorman, Boon, Reed, & Gravemeijer, 2010; Pierce & Ball, 2009). For example there is a need for different kinds of task which will utilize the affordances provided by new technology (Doorman et al., 2007; Hitt & Kieran, 2009; Laborde, 2001). Various task design principles to promote mathematical reasoning in a dynamic software environment are suggested in the literature.

One suggestion to promote explorative work and conjecturing is to use *open problems* (Baccaglini-Frank & Mariotti, 2010; Furinghetti & Paola, 2003; Mogetta, Olivero, & Jones, 1999). In such problems students are supposed to investigate some mathematical relation and to formulate one or more conjectures based on this investigation. The importance of designing tasks asking students explicitly to formulate these conjectures is emphasized in the literature (Arzarello & Robutti, 2010; Baccaglini-Frank & Mariotti, 2010; Leung, 2011). Further, it is recommended to request students to formulate their conjectures in writing so as to make it explicit for further reflection (Baccaglini-Frank & Mariotti, 2010; Kieran & Saldanha, 2008). When a conjecture is stated it could be considered verified by the examination of several examples (e.g. Marrades & Gutierrez, 2000). The possibility for students to convince themselves of the truth of their conjecture in this way also entails a risk that they do not see any need to explain their results (Drijvers, 2003; Hadas, Hershkowitz, & Schwarz, 2000; Joubert, 2013). De Villiers

(1999) suggests an emphasis on the question *why* a conjecture is true to foster explanatory reasoning. Moreover, it can be instructive for students to investigate the situation further to find related results or a more generalized conjecture (Chazan, 1990; Christou et al., 2004; Yerushalmy, 1993).

A specific type of task, denoted *prediction task*, is recommended by several researchers (Arcavi & Hadas, 2000; Kasmer & Kim, 2012; Laborde, 2001). In prediction tasks students are supposed to first make a prediction about the situation under consideration and then investigate whether that prediction holds true. After that they are supposed to reflect on the outcome, particularly if the prediction is found to be incorrect.

8.2 The aim of the thesis

The overall aim of this thesis is to investigate how the use of dynamic mathematics software could increase opportunities for students to develop their mathematical reasoning ability. It will contribute to knowledge in this area by focusing on task design in a dynamic software environment and by studying the reasoning that emerges when students work on tasks in such an environment. Based on this aim four different aspects have been treated: (a) design of tasks that foster student reasoning, (b) development of analytical tools to analyse mathematical reasoning, (c) characterization of the reasoning that emerges when students are working with different tasks, and (d) identification of the ways in which students use the software to support their reasoning

8.3 Research approach

There are both similarities and differences in the approaches used in the different studies in this thesis. Article 4 is based on the first iteration of a design experiment and the approach used in Article 1 has certain features in common with design experiments. In both studies tasks were designed and a "conjectured local instruction theory" (Gravemeijer, 2004) was developed and then examined empirically. Further, the tasks and the local instruction theories were revised in the light of the empirical results. In Article 4 the design tool of *didactical variables* was employed to articulate important design choices and to analyse them after empirical testing (Ruthven, Laborde, Leach, & Tiberghien, 2009). The identification of didactical variables was important to clarify the link between design choices and the reasoning that emerged.

In all the studies comprising the thesis students were video recorded with a camera placed at an angle behind them to capture both the screen and student gestures. Further, *Camtasia* was used to give detailed information on how students used the computer. Video data were transcribed and then analysed in ways appropriate for each study. For Article 1 and Article 4 the organising framework used for data analysis is described in the paragraph above. The data in Article 3 were analysed using an expanded version of Toulmin's model, developed especially for this data analysis. The expanded version of Toulmin's model is discussed thoroughly in Article 2.

8.4 The articles in the thesis

The first article suggests a model for task design with a focus on exploration, explanation, and generalization. This model aims, first, to promote semantic proof production and then, after the proof has been constructed, to encourage further generalizations. The model was primarily developed to suit the use of dynamic environments in tackling geometrical locus problems. A first version of the model was constructed in the light of previous literature. This initial model was used to design a concrete example of such a task situation which was tested in action through a case study with two doctoral students. Findings from this case study were used to guide revision of the initial model.

The second article elaborates on an expanded version of Toulmin's model of argumentation. The model was first developed to analyse the reasoning presented and discussed in Article 3, i.e. 12 reasoning sequences performed by students working in pairs with explorative tasks in a dynamic software environment. Since the model served well to discern and illustrate characteristic features in students' reasoning, the question arose of whether it could also be useful in other similar cases. The paper addresses this question, by examining the model using data from two additional studies, varying in the types of task and level of mathematics concerned.

The third article focuses on students' mathematical reasoning when working in pairs with exploratory tasks in a dynamic software environment. Three student pairs used *GeoGebra* to explore how the different parameters influence the graph of the function $y = A \sin (Bx + C) + D$. The students were supposed to formulate their conclusions in their own words in writing. The aim of the study was to discern characteristic features of students' mathematical reasoning and to pinpoint how they used the software to support their reasoning.

The fourth article concerns the design of prediction tasks to foster student reasoning about exponential functions in a mathematics software environment. The paper draws on the first iteration of a design experiment performed in four tenth grade classes. The research process pinpointed key didactical variables that proved crucial in the design of tasks as well as in the process of analysis and revision.

8.5 Conclusions

In this section the main conclusions from the thesis are summarized. The four different aspects that have been highlighted will be used as sub-headings.

8.5.1 Design of tasks that foster student reasoning

Taken together, the studies in this thesis show that tasks in which students are invited to pose conjectures or predictions for subsequent investigation can foster mathematical reasoning, drawing on these conjectures/predictions. For instance, the prediction tasks in Article 4 gave rise to mathematical reasoning both when students explained their predictions and when they explained any discrepancies between predictions and investigation results. The advantage of letting students predict an outcome before investigating the situation further has also been emphasized by several researchers (Arcavi & Hadas, 2000; Kasmer & Kim, 2012; Laborde, 2001). Both the doctoral students in Article 1 and the students in Article 3 posed early conjectures that most often formed a basis for their subsequent reasoning. In the model for task design presented in Article 1, the request "formulate a conjecture" is stated in the first task. In Leung's model (Leung, 2011), on the other hand, this request is stated in the last mode, the "situated discourse mode".

The studies in the thesis support the view that students should formulate their predictions, conjectures and explanations in writing (Baccaglini-Frank & Mariotti, 2010; Kieran & Saldanha, 2008). On several occasions it was observed that students hesitated and started to reflect further in response to a request to formulate their thoughts in writing. Moreover, the written answers could be subject to additional reflections and new investigations.

When designing tasks for a dynamic software environment, design choices concerning when and how to ask for explanations are crucial. These choices are particularly important when designing tasks aimed to promote conceptual and explanatory reasoning. It was evident from the study presented in Article 4 that the wording is crucial when formulating tasks asking for explanations. The problem is to make the tasks sufficiently pointed to avoid misunderstandings about what to explain. This problem has also been discussed by Sinclair (2003).

Another important issue to consider when designing tasks concerns how much scaffolding to offer. A high degree of scaffolding may reduce the opportunities for reasoning and increase the risk that misconceptions remain invisible and unresolved. A low degree of scaffolding, on the other hand, could result in a classroom filled with frustrated students not knowing what to do. In this balancing act, the results from Article 4 indicate that it is important to keep the degree of scaffolding as low as possible to achieve tasks that foster mathematical reasoning.

8.5.2 Development of analytical tools to analyse mathematical reasoning

The combination of conjectured local instruction theory and didactical variables in the design, analysis and revision of tasks proved to be very useful in the study reported in Article 4. Seven didactical variables were identified *a priori*, informed by research literature, and four were identified during the analysis process. The didactical variables were useful to elucidate the link between design choices and reasoning trajectories, both conjectured and observed. Thus, the use of didactical variables as a design tool in design experiments could be recommended for other similar studies.

The expanded version of Toulmin's model proved to be useful for analysing students' mathematical reasoning when exploring mathematical relations in a dynamic software environment. Besides providing an overview of the reasoning structure, the model has the potential to clarify (a) the claims stated and how they evolve, (b) the type of data these claims are based on, and hence how the computer is used, (c) if and how claims are verified by additional data, also showing how the computer is used, (d) if the reasoning is based on mathematical considerations (existence and content of "backing of data" and "warrant") and (e) the reflections initiating new investigations and additional reasoning. However, one problem with the model is that it sometimes can be difficult to determine how to categorize utterances or sections of reasoning.

8.5.3 Characterization of students' mathematical reasoning in a dynamic software environment

The thesis confirms that appropriately designed tasks in a dynamic software environment can promote mathematical reasoning. Results, particularly from the study reported in Article 3, show that exploratory tasks in this environment can promote mathematical reasoning in which conjectures are formulated, examined and refined in a cyclic process. This result is promising, assuming that it is instructive for students to work in a way more consistent with the way many mathematicians work (e.g. Burton, 2004; Pólya, 1990; Schoenfeld, 1992). However, the reasoning performed in the study reported in Article 3 often displayed a lack of more conceptual and explanatory reasoning. Further, this lack of conceptual and explanatory reasoning was partly confirmed by the study reported in Article 4. Hence, these results are in line with results from other studies showing that there is a risk that students do not reflect on the mathematics involved when using dynamic software to explore and conjecture (e.g. Drijvers, 2003; Healy & Hoyles, 1999; Joubert, 2013).

8.5.4 Students' use of the software to support their reasoning

In the studies reported in Article 1 and Article 3 *GeoGebra* was used, first to investigate the situation broadly to formulate an initial conjecture, and then to investigate the situation further in different ways so as to verify or revise the conjecture. In both studies students' focus of attention shifted between a global and a local view. Results from Article 3 indicate that the slider tool was crucial for how the reasoning evolved. The students utilized both the possibility to drag one of the sliders back and forth to observe the global change of the graph, and the possibility to easily examine a large number of examples both with a global and a local view. According to Zbiek and Heid (2001) "The ease with which the slidergraph, unlike static graphing utilities, allow students to vary a single parameter quickly is the key to launching student reasoning" (pp. 684-685).

Results from the studies show that it is important to support students' instrumental genesis by letting them learn to make their own constructions. On several occasions, it was observed that knowledge of the capabilities of the software promoted further explorations and associated reasoning. It was also observed that a limited experience with the software sometimes hindered ideas from being examined further.

Referenser

Alcock, L., & Inglis, M. (2008). Doctoral students’ use of examples in evaluating and proving conjectures. *Educational Studies in Mathematics, 69*(2), 111-129.

Arcavi, A., & Hadas, N. (2000). Computer mediated learning: An example of an approach. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 5*(1), 25-45.

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7*(3), 245-274.

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in cabri environments. *ZDM, 34*(3), 66-72.

Arzarello, F., & Robutti, O. (2010). Multimodality in multi-representational environments. *ZDM, 42*(7), 715-731.

Baccaglini-Frank, A., & Mariotti, M. A. (2010). Generating conjectures in dynamic geometry: The maintaining dragging model. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 15*(3), 225-253.

Baccaglini-Frank, A. (2011). Abduction in generating conjectures in dynamic geometry through maintaining dragging. In M. Pytlak, T. Rowland & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the seventh congress of the European society for research in mathematics education* (pp. 110-119). Rzeszów: University of Rzeszów.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils’ practice of school mathematics. In D. Pimm (Ed.), *Mathematics, teachers and children* (pp. 216-235). London: Hodder & Stoughton.

Ball, D. L., & Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. In J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 27-44). Reston, VA: NCTM.

Bell, A. W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics, 7*(1), 23-40.

Bell, P. (2004). On the theoretical breadth of design-based research in education. *Educational Psychologist, 39*(4), 243-253.

Bergqvist, T. (2001). *To explore and verify in mathematics*. Doctoral thesis, Umeå: Umeå University.

Bergqvist, T., Lithner, J., & Sumpter, L. (2008). Upper secondary students' task reasoning. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 39*(1), 1-12.

Boesen, J. (2006). *Assessing mathematical creativity – comparing national and teacher-made tests, explaining differences and examining impact*. Doctoral thesis, Umeå: Umeå university.

Borwein, J. M. (2012). Exploratory experimentation: Digitally-assisted discovery and proof. In G. Hanna, & M. De Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education* (pp. 69-96). Dordrecht: Springer.

Borwein, J. M., & Bailey, D. H. (2004). *Mathematics by experiment: Plausible reasoning in the 21st century*. Natick, MA: AK Peters.

Bottino, R. M., & Kynigos, C. (2009). Mathematics education & digital technologies: Facing the challenge of networking European research teams. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 14*(3), 203-215.

Bryman, A. (2011). *Samhällsvetenskapliga metoder* (2nd ed.). Malmö: Liber.

Burkhardt, H., & Schoenfeld, A. H. (2003). Improving educational research: Toward a more useful, more influential, and better-funded enterprise. *Educational Researcher, 32*(9), 3-14.

Burton, L. L. (2004). *Mathematicians as enquirers: Learning about learning mathematics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Carlgren, I. (2011). Forskning ja, men i vilket syfte och om vad? Om avsaknaden och behovet av en 'klinisk' mellanrumsforskning. In S. Eklund (Ed.), *Lärare som praktiker och forskare - om praxisnära forskningsmodeller* (pp. 64-79). Stockholm: Stiftelsen SAF i samverkan med Lärarförbundet.

Carlson, M. P. (1998). A cross-sectional investigation of the development of the function concept. In A. Schoenfeld, J. Kaput & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education III* (pp. 114-162). Providence, RI: American Mathematical Society.

Carlson, M. P., & Thompson, P. W. (2005). The reflexive relationship between individual cognition and classroom practices: A covariation framework and problem solving research informs calculus instruction. Paper presented at the *Annual Meeting of the American Educational Research Association.* Montreal, Quebec.

Chazan, D. (1990a). Quasi-empirical views of mathematics and mathematics teaching. *Interchange, 21*(1), 14-23.

Chazan, D. (1990b). Students' microcomputer-aided exploration in geometry. *Mathematics Teacher, 83*(8), 628-635.

Chazan, D. (1993). High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics, 24*(4), 359-387.

Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., & Pitta-Pantazi, D. (2004). Proofs through exploration in dynamic geometry environments. *International Journal of Science and Mathematics Education, 2*(3), 339-352.

Cobb, P., Confrey, J., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher, 32*(1), 9-13.

Cobb, P., & Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. In A. E. Kelly, R. A. Lesh & J. Y. Baek (Eds.), *Handbook of design research methods in education: Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching* (pp. 68-95). New York, NY: Routledge.

Confrey, J., & Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics, 26*(2-3), 135-164.

Confrey, J., & Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(1), 66-86.

David, M., Edwards, R., & Alldred, P. (2001). Children and school-based research: 'Informed consent' or' educated consent'? *British Educational Research Journal, 27*(3), 347-365.

De Villiers, M. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras, 24*(1), 17-24.

De Villiers, M. (1999). The role and function of proof with sketchpad. In M. De Villiers (Ed.), *Rethinking proof with the geometer's sketchpad* (pp. 3-10). Emeryville, CA: Key Curriculum Press.

Doorman, M., Drijvers, P., Dekker, T., van den Heuvel-Panhuizen, M., de Lange, J., & Wijers, M. (2007). Problem solving as a challenge for mathematics education in The Netherlands. *ZDM, 39*(5), 405-418.

Doorman, M., Drijvers, P., Gravemeijer, K., Boon, P., & Reed, H. (2012). Tool use and the development of the function concept: From repeated calculations to functional thinking. *International Journal of Science and Mathematics Education, 10*(6), 1243-1267.

Drijvers, P. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment: Design research on the understanding of the concept of parameter*. Doctoral thesis, Utrecht: Utrecht University.

Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H., & Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool: Instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 75*(2), 213-234.

Edwards, L. D. (1997). Exploring the territory before proof: Student's generalizations in a computer microworld for transformation geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 2*(3), 187-215.

Ellis, A., Ozgur, Z., Kulow, T., Williams, C., & Amidon, J. (2012). Quantifying exponential growth: The case of the jactus. In R. Mayes, R. Bonillia, L. L. Hatfield & S. Belbase (Eds.), *WISDOMe monographs: Vol. 2. quantitative reasoning: Current state of understanding* (pp. 93-112). Laramie, WY: University of Wyoming.

Even, R. (1998). Factors involved in linking representations of functions. *The Journal of Mathematical Behavior, 17*(1), 105-121.

Ferrara, F., Pratt, D., & Robutti, O. (2006). The role and uses of technologies for the teaching of algebra and calculus. In A. Gutiérres, & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education. past, present and future* (pp. 237-274). Rotterdam: Sense Publishers.

Fuglestad, A. B. (2007). Teaching and teachers' competence with ICT in mathematics in a community of inquiry. In J. H. Woo, H. Lew C., P. Kyi-Sik & S. Don-Yeop (Eds.), *Proceedings of the 31st conference of the international group for the psychology of mathematics education* (pp. 249-258). Seoul: PME.

Furinghetti, F., & Paola, D. (2003). To produce conjectures and to prove them within a dynamic geometry environment: A case study. In N. A. Pateman, B. J. Doherty & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the twenty seventh annual conference of the international group for the psychology of mathematics education* (pp. 397-404). Honolulu, HI: PME.

Gill, M., & Boote, D. (2012). Classroom culture, mathematics culture, and the failures of reform: The need for a collective view of culture. *Teachers College Record, 114*(12), 1-45.

Goos, M., Galbraith, P., Renshaw, P., & Geiger, V. (2003). Perspectives on technology mediated learning in secondary school mathematics classrooms. *The Journal of Mathematical Behavior, 22*(1), 73-89.

Granberg, C., & Olsson, J. (2015). ICT-supported problem solving and collaborative creative reasoning: Exploring linear functions using dynamic mathematics software. *The Journal of Mathematical Behavior, 37,* 48-62.

Gravemeijer, K. (2004). Local instruction theories as means of support for teachers in reform mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 105-128.

Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. In J. van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney & N. Nieveen (Eds.), *Educational design research* (pp. 17-51). London: Routledge.

Gravemeijer, K., & van Eerde, D. (2009). Design research as a means for building a knowledge base for teachers and teaching in mathematics education. *The Elementary School Journal, 109*(5), 510-524.

Green, K. H. (2008). Using spreadsheets to discover meaning for parameters in nonlinear models. *The Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 27*(4), 423.

Grönlund, Å. (2014). *Att förändra skolan med teknik: Bortom "en dator per elev"*. Örebro: Örebro University.

Hadas, N., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. B. (2000). The role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics, 44*(1-2), 127-150.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics, 44*(1), 5-23.

Hansson, Ö. (2006). *Studying the views of preservice teachers on the concept of function*. Doctoral thesis, Luleå: Luleå University of Technology.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In A. H. Schoenfeld, J. Kaput & E. Dubinsky (Eds.), *Issues in mathematics education: Vol. 7. research in collegiate mathematics education, III* (pp. 234-283). Providence, RI: American Mathematical Society.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 805-842). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Healy, L., & Hoyles, C. (1999). Visual and symbolic reasoning in mathematics: Making connections with computers? *Mathematical Thinking and Learning, 1*(1), 59-84.

Healy, L., & Hoyles, C. (2002). Software tools for geometrical problem solving: Potentials and pitfalls. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6*(3), 235-256.

Herheim, R. (2010). Communication and learning at computers: An overview. *Nordic Studies in Mathematics Education, 15*(2), 69-94.

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics, 24*(4), 389-399.

Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. In P. Nesher, & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition: A research synthesis by the international group for the psychology of mathematics education* (pp. 70-95). Cambridge: Cambridge University Press.

Hitt, F., & Kieran, C. (2009). Constructing knowledge via a peer interaction in a CAS environment with tasks designed from a Task–Technique–Theory perspective. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 14*(2), 121-152.

Hohenwarter, M., & Jones, K. (2007). Ways of linking geometry and algebra: The case of *GeoGebra*. In D. Küchemann (Ed.), *Proceedings of British society for research into learning mathematics* (pp. 126-131). Northampton: University of Northampton.

Hollebrands, K. F., Conner, A. M., & Smith, R. C. (2010). The nature of arguments provided by college geometry students with access to technology while solving problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(4), 324-350.

Hölzl, R. (2001). Using dynamic geometry software to add contrast to geometric situations–a case study. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6*(1), 63-86.

Hoyles, C., Noss, R., Vahey, P., & Roschelle, J. (2013). Cornerstone mathematics: Designing digital technology for teacher adaptation and scaling. *ZDM, 45*(7), 1057-1070.

Hurley, J. C., & Underwood, M. K. (2002). Children's understanding of their research rights before and after debriefing: Informed assent, confidentiality, and stopping participation. *Child Development, 73*(1), 132-143.

Inglis, M., Mejia-Ramos, J. P., & Simpson, A. (2007). Modelling mathematical argumentation: The importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics, 66*(1), 3-21.

Institutionen för tillämpad utbildningsvetenskap, Umeå Universitet. (n.d.). Nationella kursprov i matematik 2-4: Information om den muntliga delen. Retrieved from http://www.edusci.umu.se/np/np-2-4/muntligt/

Jones, K. (2000). Providing a foundation for deductive reasoning: Students' interpretations when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations. *Educational Studies in Mathematics, 44*(1-2), 55-85.

Joubert, M. (2013). Using computers in classroom mathematical tasks: Revisiting theory to develop recommendations for the design of tasks. In C. Margolinas (Ed.), *Task design in mathematics education: Proceedings of ICMI study 22* (pp. 69-77). Oxford: Retrieved from https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00834054v3

Kasmer, L. A., & Kim, O. (2012). The nature of student predictions and learning opportunities in middle school algebra. *Educational Studies in Mathematics, 79*(2), 175-191.

Katz, V. J. (1998). *A history of mathematics*. New York, NY: Addison-Wesley.

Kelly, G. J., & Takao, A. (2002). Epistemic levels in argument: An analysis of university oceanography students' use of evidence in writing. *Science Education, 86*(3), 314-342.

Kieran, C., & Saldanha, L. (2008). Designing tasks for the co-development of conceptual and technical knowledge in CAS activity: An example from factoring. In W. B. Glendon, & M. K. Heid (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Volume 2, cases and perspectives* (pp. 393-414). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Knuth, E. J. (2000). Student understanding of the cartesian connection: An exploratory study. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(4), 500-507.

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. In P. Cobb, & H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229-269). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Laborde, C. (2001). Integration of technology in the design of geometry tasks with cabri-geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6*(3), 283-317.

Laborde, C. (2007). The role and uses of technologies in mathematics classrooms: Between challenge and modus vivendi. *Canadian Journal of Math, Science & Technology Education, 7*(1), 68-92.

Lagrange, J., & Psycharis, G. (2014). Investigating the potential of computer environments for the teaching and learning of functions: A double analysis from two research traditions. *Technology, Knowledge and Learning, 19*(3), 255-286.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal, 27*(1), 29-63.

Lavy, I. (2006). A case study of different types of arguments emerging from explorations in an interactive computerized environment. *The Journal of Mathematical Behavior, 25*(2), 153-169.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research, 60*(1), 1-64.

Leung, A. (2011). An epistemic model of task design in dynamic geometry environment. *ZDM, 43*(3), 325-336.

Lin, F., Yang, K., Lee, K., Tabach, M., & Stylianides, G. (2012). Principles of task design for conjecturing and proving. In G. Hanna, & M. De Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education* (pp. 305-325). New York, NY: Springer.

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 67*(3), 255-276.

Mackrell, K., Maschietto, M., & Soury-Lavergne, S. (2013). The interaction between task design and technology design in creating tasks with cabri elem. In C. Margolinas (Ed.), *Task design in mathematics education: Proceedings of ICMI study 22* (pp. 81-89). Oxford: Retrieved from https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00834054v3

Mancosu, P. (2000). On mathematical explanation. In E. Grosholz, & H. Breger (Eds.), *The growth of mathematical knowledge* (pp. 103-119). Dordrecht: Kluwer.

Margolinas, C. (Ed.). (2013). *Task design in mathematics education: Proceedings of ICMI study 22*. Oxford: Retrieved from https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00834054v3

Marrades, R., & Gutierrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics, 44*(1), 87-125.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1982). *Thinking mathematically*. London: Addison-Wesley.

Mogetta, C., Olivero, F., & Jones, K. (1999). Providing the motivation to prove in a dynamic geometry environment. *Proceedings of the British society for research into learning mathematics* (pp. 91-96). Lancaster: St Martin's University College.

Monaghan, F. (2005). 'Don't think in your head, think aloud': ICT and exploratory talk in the primary school mathematics classroom. *Research in Mathematics Education, 7*(1), 83-100.

Moschkovich, J., Schoenfeld, A. H., & Arcavi, A. (1993). Aspects of understanding: On multiple perspectives and representations of linear relations and connections among them. In T. A. Romberg, E. Fennema & T. P. Carpenter (Eds.), *Integrating research on the graphical representation of functions* (pp. 69-100). New York, NY: Routledge.

Mullis, I. V., & Martin, M. O. (2013). *TIMSS 2015 assessment frameworks.* Boston, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center.

Natsheh, I., & Karsenty, R. (2014). Exploring the potential role of visual reasoning tasks among inexperienced solvers. *ZDM, 46*(1), 109-122.

NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. In A. Gagatsis, & S. Papastavridis (Eds.), *3rd Mediterranean conference on mathematical education* (pp. 115-124). Athens: The Hellenic Mathematical Society.

Otte, M. (2006). Learning difficulties resulting from the nature of modern mathematics: The problem of explanation. In J. Maasz, & W. Schloeglmann (Eds.), *New mathematics education research and practice* (pp. 75-94). Rotterdam: Sense Publishers.

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics, 66*(1), 23-41.

Pehkonen, E. (1997). Introduction to the concept “open-ended problem”. In E. Pehkonen (Ed.), *Use of open-ended problems in mathematics classroom*. (pp. 7-11). Helsinki: University of Helsinki.

Pierce, R., & Ball, L. (2009). Perceptions that may affect teachers’ intention to use technology in secondary mathematics classes. *Educational Studies in Mathematics, 71*(3), 299-317.

Pierce, R., Stacey, K., Wander, R., & Ball, L. (2011). The design of lessons using mathematics analysis software to support multiple representations in secondary school mathematics. *Technology, Pedagogy and Education, 20*(1), 95-112.

Pólya, G. (1990a). *Mathematics and plausible reasoning, volume 1: Induction and analogy in mathematics*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Pólya, G. (1990b). *How to solve it* (2nd ed.). Harmondsworth: Penguin Books.

Powell, A. B., Francisco, J. M., & Maher, C. A. (2003). An analytical model for studying the development of learners’ mathematical ideas and reasoning using videotape data. *The Journal of Mathematical Behavior, 22*(4), 405-435.

Rudsberg, K. (2014). *Elevers lärande i argumentativa diskussioner om hållbar utveckling*. Doctoral thesis, Uppsala: Uppsala University.

Ruthven, K. (2008). The interpretative flexibility, instrumental evolution, and institutional adoption of mathematical software in educational practice: The examples of computer algebra and dynamic geometry. *Journal of Educational Computing Research, 39*(4), 379-394.

Ruthven, K. (2012). Constituting digital tools and materials as classroom resources: The example of dynamic geometry. In G. Gueudet, B. Pepin & L. Trouche (Eds.), *From text to 'lived' resources* (pp. 83-103). New York, NY: Springer.

Ruthven, K., Hennessy, S., & Deaney, R. (2008). Constructions of dynamic geometry: A study of the interpretative flexibility of educational software in classroom practice. *Computers & Education*, *51*(1), 297-317.

Ruthven, K., Laborde, C., Leach, J., & Tiberghien, A. (2009). Design tools in didactical research: Instrumenting the epistemological and cognitive aspects of the design of teaching sequences. *Educational Researcher, 38*(5), 329-342.

Santos-Trigo, M., & Espinosa-Perez, H. (2002). Searching and exploring properties of geometric configurations using dynamic software. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 33*(1), 37-50.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York, NY: MacMillan.

Schoenfeld, A. H. (2007). Method. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 69-107). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), 1-36.

Sierpinska, A. (2004). Research in mathematics education through a keyhole: Task problematization. *For the Learning of Mathematics, 24*(2), 7-15.

Sinclair, M. P. (2003). Some implications of the results of a case study for the design of pre-constructed, dynamic geometry sketches and accompanying materials. *Educational Studies in Mathematics, 52*(3), 289-317.

Skolinspektionen. (2009). *Undervisningen i matematik - utbildningens innehåll och ändamålsenlighet* (Rapport No. 2009:5). Stockholm: Skolinspektionen.

Skolinspektionen. (2010). *Undervisningen i matematik i gymnasieskolan* (Rapport No. 2010:13). Stockholm: Skolinspektionen.

Skolinspektionen. (2012). *Satsningarna på IT används inte i skolornas undervisning* (Rapport No. 2011:2928). Stockholm: Skolinspektionen.

Skolverket. (2000a). Ämnet matematik: Kursplaner för gymnasieskolan 2000. Retrieved from http://ncm.gu.se/media/kursplaner/gym/Gym2000.pdf

Skolverket. (2000b). *Grundskolan kursplaner och betygskriterier 2000*. Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2011a). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011*. Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2011b). *Läroplan, examensmål och gymnasiegemensamma ämnen för gymnasieskola 2011*. Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2012). Kommentarer till ämnesplan matematik. Retrieved from www.skolverket.se

Skolverket. (2013). *It-användning och it-kompetens i skolan* (Rapport No. 386). Stockholm: Skolverket.

Smith, R. C. (2010). *A comparison of middle school students' mathematical arguments in technological and non-technological environments.* Doctoral thesis, Raleigh, NC: North Carolina State University.

Stephan, M., & Rasmussen, C. (2002). Classroom mathematical practices in differential equations. *The Journal of Mathematical Behavior, 21*(4), 459-490.

Stylianides, G. J. (2008). An analytic framework of reasoning-and-proving. *For the Learning of Mathematics, 28*(1), 9-16.

The Design-Based Research Collective. (2003). Design-based research: An emerging paradigm for educational inquiry. *Educational Researcher, 32*(1), 5-8.

Thompson, J., & Martinsson, T. (1991). *Matematiklexikon*. Falun: Wahlström & Widstrand.

Thompson, J. (1996). *Matematiken i historien*. Lund: Studentlitteratur.

Toulmin, S. (1958). *The uses of argument.* Cambridge: Cambridge University Press.

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 9*(3), 281-307.

Valiente, O. (2010). *1-1- in education: Current practice, international comparative research evidence and policy implications* (OECD Education Working Papers No. 44). Paris: OECD Publishing.

Verillon, P., & Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of though in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education, 10*(1), 77-101.

Viirman, O. (2014). *The function concept and university mathematics teaching*. Doctoral thesis, Karlstad: Karlstad University.

Walton, D. N. (1990). What is reasoning? What is an argument? *The Journal of Philosophy, 87*(8), 399-419.

Weber, K., & Alcock, L. (2004). Semantic and syntactic proof productions. *Educational Studies in Mathematics, 56*(2-3), 209-234.

Weber, K., Maher, C., Powell, A., & Lee, H. S. (2008). Learning opportunities from group discussions: Warrants become the objects of debate. *Educational Studies in Mathematics, 68*(3), 247-261.

Whitenack, J. W., & Knipping, N. (2002). Argumentation, instructional design theory and students' mathematical learning: A case for coordinating interpretive lenses. *The Journal of Mathematical Behavior, 21*(4), 441-457.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458-477.

Yackel, E., & Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. In J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 227-236). Reston, VA: NCTM.

Yerushalmy, M. (1993). Generalization in geometry. In J. L. Schwarz, M. Yerushalmy & B. Wilson (Eds.), *The geometric supposer, what is it a case of?* (pp. 57-84). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Zbiek, R. M., Heid, M. K., Blume, G. W., & Dick, T. P. (2007). Research on technology in mathematics education: A perspective of constructs. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 1169-1207). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Zbiek, R. M., & Heid, M. K. (2001). Dynamic aspects of function representations. In H. Chick, K. Stacey & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI on the future of the teaching and learning of algebra* (pp. 682-689). Melbourne: The University of Melbourn

Matematiska resonemang i en lärandemiljö med dynamiska matematikprogram

Det övergripande syftet med avhandlingen är att undersöka hur dynamiska matematikprogram kan användas för att öka möjligheterna för elever/studenter att utveckla sin förmåga att föra matematiska resonemang. Detta görs dels genom att fokusera på design av uppgifter i en lärandemiljö med dynamiska matematikprogram och dels genom att studera och karakterisera de resonemang som utvecklas när elever/studenter jobbar med olika uppgifter i denna miljö. För att analysera resonemangen i en av studierna utvecklades ett nytt analysverktyg i form av en utökad version av Toulmins modell.

Resultat från en av studierna i avhandlingen visar att dynamiska matematikprogram i kombination med utforskande uppgifter kan stimulera till matematiska resonemang där hypoteser formuleras, undersöks och förfinas i en cyklisk process. Samtidigt visar samma studie att de resonemang som utvecklas i stor utsträckning saknar matematiskt grundade förklaringar. Detta resultat bekräftas till viss del av ytterligare en studie. Frågan hur uppgifter bör designas för att främja matematiskt grundade resonemang har därför varit central i avhandlingen. Två av artiklarna behandlar uppgiftsdesign, men utifrån olika utgångspunkter.

ISBN 978-91-7063-623-3

ISSN 1403-8099

DOKTORSAVHANDLING | Karlstad University Studies | 2015:12