

# Inmatning av matematiska uttryck i en digital miljö

Examensarbete på programmet *Civilingenjör och lärare* inom området  
Teknik och lärande

Andreas Green

Stockholm 2011



Skolan för datavetenskap och kommunikation (CSC) – Medieteknik och grafisk produktion (Media)

Examinator: Johan Stenberg, KTH - Medieteknik och grafisk produktion (Media)

Handledare: Stefan Hrastinski, KTH - Medieteknik och grafisk produktion (Media)

Biträdande handledare: Niclas Larson, SU - Institutionen för matematikämnet och naturvetenskapsämnenas didaktik

Författarens e-postadress: andreas.green@gmail.com

Utbildningsprogram: Civilingenjör och lärare, 300 hp

Omfattning: 12 786 ord inklusive bilagor

Datum: 2011-04-21

# Sammanfattning

Inom matematikämnet har e-bedömningar, aktiviteter där digitala tekniker används för att bedöma studenters kunskaper, inte utvecklats i samma takt som e-bedömningar inom andra områden. Detta beror sannolikt på det stora inslag av symboler och icke-standardiserade tecken som karakteriserar matematiskt språk och särskiljer det från traditionellt skriftspråk. Ett problem som har noterats i samband med e-bedömningar inom matematik är att inmatningen av matematiska uttryck i ett digitalt system i många fall varit långsam och svår att begripa. Den här rapporten syftar till att undersöka tre kategorier av inmatningsmetoder utifrån aspekterna snabbhet, korrekthet och upplevd lätthet för att på så sätt skapa en bild av vilken av teknikerna som lämpar sig bäst att implementera i en e-bedömningsapplikation riktad mot den svenska gymnasieskolan. För att uppnå syftet har jag granskat tre familjer av tekniker genom att låta gymnasieelever genomföra inmatningar av matematiska uttryck och analysera dessa inmatningar baserat på inmatningstid, korrekthet och upplevd lätthet.

Resultaten visar på att det finns tydliga skillnader mellan de undersökta teknikerna med avseende på samtliga undersökta aspekter. Noterbart är att medelvärdet för genomförandetiden sett över samtliga tekniker och uttryck är 1 minut och 32 sekunder vilket satt i relation till den verksamhet teknikerna är tänkta att konkurrera med, att skriva matematiska uttryck med papper och penna, är högt. Andra noterbara resultat är att av undersökningens totalt 127 inmatade uttryck så var 49,6 % av dessa inte korrekt inmatade med den här rapportens syn på korrekthet. Trots att ingen av dagens tekniker är perfekt finns det bra inslag att bygga vidare på. Bland dessa kan nämnas ASCIIMathML's, av eleverna upplevda, naturliga inmatning och dess förmåga att avgöra om ett uttryck tolkas matematiskt eller ej samt Math Input Panels förslag på alternativa uttryck, goda korrektionsmöjligheter och dess likhet med traditionell inmatning. Det finns också frågor av mer praktisk karaktär som rör exempelvis licenser och exportering av data man behöver adressera innan man beslutar sig för en specifik inmatningsteknik för en applikation.

**Nyckelord:** E-bedömningar, digitala bedömningar och inmatning av matematiska uttryck.

# Abstract

E-assessment, activities in which digital techniques are used to assess students' knowledge, in mathematics is an area that has not developed as fast as e-assessments in other areas. This is likely caused by the large elements of symbols and non-standard characters, which is characteristic of mathematical language and distinguishes it from ordinary written language. One problem that has arisen is that the input of mathematical expressions in a digital system in many cases has been slow and difficult to comprehend. This report aims to investigate three categories of input methods from three different aspects: speed, correctness and perceived ease in order to get an idea of which of the technologies are best suited to implement in an e-assessment application directed against the Swedish upper secondary school. To meet this objective three interrelated techniques were investigated by allowing upper secondary school students to use these techniques to input mathematical expressions and analyze these entries based on time, correctness and perceived ease.

The results show that there are clear differences between the studied techniques for all examined aspects. Notably, the average time viewed over all techniques and expressions is 1 minute and 32 seconds which in relation to the activity these techniques are meant to compete with, writing mathematical expressions with pen and paper, is high. An additional notable finding is that in this survey a total of 127 expressions were processed and of those 49.6 % were not properly entered with this report's view of correctness. Although none of today's technologies are perfect, there are good elements to build on. These include ASCIIMathML's perceived ease and its ability to determine whether an expression is mathematically or not and Math Input Panels suggested alternative expressions, good correction ability and its similarity to traditional input. There are also questions of a more practical nature relating to things such as licenses and export of data which need to be addressed before deciding on a specific input technology for an application.

**Keywords:** E-assessment, computer-based assessments and input of mathematical expressions.

# Innehållsförteckning

Sammanfattning.....	iii
Abstract.....	iv
Innehållsförteckning.....	v
Terminologi.....	vii
1 Introduktion.....	1
1.1 Inledning.....	1
1.2 Syfte.....	2
1.3 Frågeställning.....	2
1.4 Tidigare forskning.....	3
1.4.1 Bedömningar inom matematikämnet.....	3
1.4.2 E-bedömningar.....	4
1.4.3 E-bedömningar inom matematik.....	6
1.4.4 Utmaningar vid e-bedömningar inom matematik.....	6
2 Metod.....	16
2.1 Observationer.....	16
2.2 Intervjuer.....	16
2.3 Urval.....	17
2.4 Särskild hänsyn.....	18
2.5 Genomförande.....	18
3 Resultat.....	20
3.1 Snabbhet.....	20
3.2 Korrekthet.....	23
3.3 Upplevd lätthet.....	24
4 Diskussion.....	26
4.1 Sammanfattning av resultat.....	26
4.2 Slutsatser.....	29
4.3 Förslag till framtida forskning inom området.....	31

4.4	Felkällor .....	32
5	Källförteckning.....	34
	Bilaga A: Implementation av ASCIIMathML .....	37
	Bilaga B: Resultat med avseende på tid grupperat på uttryck och teknik .....	38
	Bilaga C: Resultat med avseende på korrekthet grupperat på uttryck och teknik .....	43
	Bilaga D: Referensuttryck .....	51
	Bilaga E: Informationsbrev .....	53

# Terminologi

I en rapport av denna typ är det ofrånkomligt att använda termer och begrepp kopplade till det område rapporten avhandlar. För att underlätta för läsare som inte är insatta i området redovisar jag nedan kort några av de mest centrala begreppen. Jag kommer i rapporten använda begreppen i enlighet med nedanstående definitioner.

## **E-bedömningar**

Termen e-bedömningar rymmer flera olika aktiviteter där digitala tekniker används för bedömningar. Bland dessa ryms aktiviteter som design och leverans av prov och uppgifter, rättning (av datorer eller av människor assisterade av t.ex. skannrar) och alla processer som rör rapportering, lagring och överföring av data kopplat till bedömningar.

## **Datorbaserade bedömningar**

Datorbaserade bedömningar används i den här rapporten för bedömningar som till fullo levereras och rättas av en dator. I stort är termerna e-bedömningar och datorbaserade bedömningar synonyma.

## **Bärbar pekdator**

En bärbar pekdator, Tablet PC på engelska, är en bärbar dator med pekskärm som är utrustad med en penna och handskriftigenkänning för att skriva direkt på pekskärmen [1].

## **Appletprogram**

Termen används för små program med begränsad funktionalitet som körs antingen på en webbsida eller lokalt på en användares dator.

# 1 Introduktion

## 1.1 Inledning

Matematikkunskaperna hos svenska ungdomar har under det senaste decenniet försämrats, inte bara i relation till sig själva utan också i förhållande till hur det ser ut internationellt [2][3]. Dessa rön stämmer väl överens med resultaten av det diagnostiska prov nyintagna studenter vid Kungliga Tekniska Högskolan i Stockholm fått genomföra sedan 1997. Där har man, med undantag av 2009 års resultat som var det bästa på åtta år, sett en kraftig nedgång i lösningsfrekvens av uppgifter från kring 55 % 1997 till lägstanoteringen 42 % 2002 [4][5]. Vad som också är mycket besvärande är att resultatförsämringen varit störst inom problemområden som ligger nära det innehåll som ingår i grund- och gymnasieskolan. Anmärkningsvärt är också att andelen studenter med "svaga" resultat (högst fyra lösta uppgifter av 14) de senaste åren legat mellan 25 och 30 % att jämföra med 10 % kring sekelskiftet.

Under de senaste 25 åren har användandet av datorbaserade hjälpmedel i undervisning och för bedömningar ökat [6]. På grund av matematikämnets speciella karaktär, framför allt användandet av symboler och möjligheten till oändligt många men matematisk lika talrepresentationer, har datorbaserade hjälpmedel inom matematik inte slagit igenom i samma utsträckning [7]. E-bedömningar, en aktivitet där digitala tekniker används för bedömningar, erbjuder vissa klara fördelar för studenter. Bland dessa kan nämnas möjligheten att använda sig av dem oavsett tid och plats, möjlighet att genomföra provningar själv i studiesyfte, skräddarsydd (och omedelbar) återkoppling och att svar rättas opartiskt mot givna kriterier [8].

I kapitel 1.4 kommer jag att granska vilken plats e-bedömningar kan tänkas fylla inom matematikämnet och redogöra för några svårigheter som uppstår när matematikämnet förflyttas till ett digitalt medium. Jag kommer att inrikta min undersökning på en av dessa svårigheter, inmatning av matematiska uttryck, och jämföra tre olika tekniker för inmatning av matematiska uttryck med hjälp av traditionella inmatningsenheter som t.ex. mus och tangentbord med avseende på snabbhet, intuitivitet och korrekthet. Då det visat sig att inmatning av matematiska uttryck varit en av de faktorer som hindrat utvecklandet och införandet av e-bedömningar inom matematik är min förhoppning är att denna kunskap kan spela en roll i skapandet av nya och väl fungerande produkter för e-bedömningar inom matematikämnet. Det i sin tur kan förhoppningsvis ha positiva effekter på matematikkunskaperna i stort.



## 1.2 Syfte

Tidigare forskning inom e-bedömningar har identifierat några av de hinder e-bedömningar inom matematik står inför. Denna forskning belyser framför allt problem inom områdena presentation av matematiskt språk i digitala miljöer, inmatning av matematiska uttryck i digitala miljöer, möjligheten att jämföra och beräkna uttryck och slutligen möjligheten att dela ut delpoäng vid ej komplett lösta matematiska problem. På senare tid har förslag på lösningar på delar av dessa problem presenteras i skiftande forum. MathML, ett märkspråk utvecklat av World Wide Web Consortium<sup>1</sup> (W3C), erbjuder presentation och semantik av matematiska uttryck direkt i webbläsaren och kopplingar till datoralgebrasystem erbjuder mycket kraftfulla möjligheter för att jämföra och beräkna uttryck.

I kapitel 1.4.4 diskuteras ett förslag till lösning på frågan om möjligheten att belöna elever med delpoäng på en uppgift. Den föreslagna lösningen har i teorin vissa begränsningar och det skulle behöva genomföras ytterligare forskning för att avgöra dess lämplighet.

När det kommer till inmatning av matematiskt språk är det inte lika självklart till vilken grad de föreslagna lösningarna som diskuteras i kapitel 1.4.4 verkligen fungerar som avsett och inte heller vilken av dem som ger den snabbaste och mest intuitiva inmatningen för en elev.

För att e-bedömningar inom matematik ska kunna ta nästa steg i sin utveckling behöver samtliga av de problem som existerar idag överkommas och den här rapporten syftar till att undersöka en del av detta komplexa problem.

## 1.3 Frågeställning

För att uppfylla syftet ovan bör följande frågeställning besvaras.

Vilken av de tre familjerna av inmatningstekniker som beskrivs i kapitlet *utmaningar vid e-bedömningar inom matematik* lämpar sig bäst för användande i en e-bedömningsapplikation inom matematik riktad mot den svenska gymnasieskolan? Lämpligheten är framför allt baserad på teknikens prestanda med avseende på:

- Hur snabbt inmatningen av ett matematiskt uttryck kan ske.
- Till vilken grad inmatningen är korrekt.
- Med hur stor upplevd lätthet inmatningen sker.

---

<sup>1</sup> <http://www.w3.org/Consortium/>

## 1.4 Tidigare forskning

### 1.4.1 Bedömningar inom matematikämnet

Att bedöma elevers kunskaper är en viktig del av varje verksam lärares uppgifter och anses generellt vara en väsentlig del av undervisning och lärande. Ofta upptas en stor del av både lärares och elevers tid med olika former av bedömningar och dessa spelar en stor roll i att bestämma vad elever lär sig [9].

Bedömningar är också en av de bästa metoderna för att identifiera inom vilka områden en student behöver extra stöd och kan i vissa fall också ingjuta en önskan att fördjupa sina kunskaper hos studenten om prövningen kopplas till lämpliga resurser och bra återkoppling kan ges vid rätt tillfälle [10].

I allmänhet brukar man dela in bedömningar i tre olika kategorier beroende på vilket syfte bedömningen har: diagnostisk, formativ och summativ. Diagnostiska bedömningar används vanligen i inledningen av en kurs för att fastställa kunskaper och färdigheter hos enskilda elever likväl som för en hel undervisningsgrupp. Formativa bedömningar är en bedömningsform vars främsta syfte är att stimulera fortsatt lärande genom att lyfta fram studentens styrkor och svagheter. För att det ska fungera krävs det att studenten får muntlig eller skriftlig återkoppling på sin prestation. Formativa bedömningar används, vanligen, inte för betygsättning utan är en form av "bedömning för lärande". Slutligen används den summativa bedömningen som en form av slutlig bedömning av en students prestationer och leder vanligtvis fram till ett intyg över kunskaper och färdigheter, exempelvis ett betyg.

Bedömningar inom matematik kan definieras som identifiering och värdering av elevers kunskaper, insikter, förståelser, färdigheter, insatser, prestationer och förmågor inom matematik [11] här refererat från [12]. Denna definition stämmer väl överens med Boesens [13] tolkning över hur *Läroplan för de frivilliga skolformerna* (Lpf94), som introducerades i Sverige 1994, har påverkat vår syn på kunskap. Boesen hävdar att fokus skiftat från en processinriktad kunskap till en mer begreppsmässig kunskap. Detta avspeglar sig inte bara i vilka ämnesområden som behandlas i undervisning utan också vilka kompetenser som anses viktiga och vilka kvalitativa kompetenser som eftersträvas i undervisningen. Som exempel på vilka kompetenser som kan avses nämner Boesen förmågan att resonera, modellera, generalisera, kommunicera och kritiskt granska.

Det verkar dock som att bedömningar inom matematik idag domineras av ett fokus på fakta och förmågor (kopplade till beräkningsfärdigheter) och elevers förmåga att reproducera dessa vid behov [12]. Utöver att det är ett uppenbart

problem att prövningar inom matematik till viss del inte bedömer rätt kvaliteter kan det även få konsekvenser för hur en person uppfattar vad det innebär att tänka matematiskt.

Boesen [13] kallar den teknik många elever använder sig av för att lösa dessa processinriktade problem för *imitative reasoning*. Det här sättet att resonera, eller lösa problem på, bygger på att eleven söker efter liknande exempel eller lösningar där antingen hela eller delar av lösningen kan återskapas ifrån. Boesen konstaterar att det finns en klar skillnad mellan prov skapade av lärare lokalt på skolan och de nationella proven i fråga om i vilken grad *imitative reasoning* kan användas för att lösa uppgifterna. Dessa skillnader förklaras av att: (i) lärarna har en begränsad medvetenhet om skillnader i resoneringsförmågor, (ii) låga förväntningar på studenternas förmågor och (iii) viljan att få godkända elever, något som upplevdes lättare om man uteslöt vissa typer av uppgifter från proven.

Angående punkt (iii) skulle man kunna tänka sig att dessa typer av uppgifter inte nödvändigtvis behöver vara svårare att lösa än andra uppgifter utan att den förväntade ökade svårighetsgraden beror på en ovana att arbeta med den typen av problem. Här skulle det t.o.m. kunna vara så att metoden *teaching to the test* skulle kunna ha gynnsamma effekter så länge som uppgifterna som studeras kräver samma förmågor för att lösas som de som kommer på prövningar [12].

#### 1.4.2 E-bedömningar

Qualifications and Curriculum Development Agency (QCDA), tidigare QCA, gav 2005 ut en rapport som identifierade de tre största drivkrafterna för e-bedömningar som kostnadsbesparingar, att implementera läroplaner och möjligheten att ge omedelbar återkoppling till studenterna [6]. Andra fördelar som brukar nämnas i diskussioner kring e-bedömningar är en allmän effektivisering av verksamheten och tidsbesparingar. När man byter medium för en prövning finns det alltid en fara att man påverkar precisionen och syftet med bedömningen om man anpassar den för att passa tekniken. Det är således viktigt att syftet får styra utformningen av bedömningen och att mediet finns där för att om något förbättra kvaliteten på prövningen [14].

Att införa e-bedömningar kan ha en mer radikal påverkan på utbildningssystemet än att bara sättet bedömningar går till på byts. Det skulle kunna påverka hur hela utbildningssystemet är uppbyggt och förändra hur vardagen ser ut för anställda och studenter som är verksamma där [10].

Om examinationer kan tas på begäran eller när en lärare anser att en student är redo skulle individer i utbildningsväsendet kunna gå igenom kurser och

utbildningar snabbare när de når goda kunskaper inom vissa områden av kurs- och läroplaner. Det här representerar en stor utmaning för utbildningssystemet men kan öka motivationen hos unga att stanna i detsamma. Om e-bedömningar finns tillgängliga för formativa bedömningar har man funnit stöd för att studenter frivilligt gör om provningar och att tillgängligheten av dessa prov kan hjälpa till att etablera mer regelbundna studievänor [10].

Frågor som identifierats som potentiella hinder för att e-bedömningar ska slå igenom på bred front är bland annat pedagogik (författande, rättning, rapportering), validitet och trovärdighet, tekniska aspekter (tillförlitlighet och säkerhet i mjukvara och hårdvara), examineringsprocesser och rättsliga frågor som plagiat, datasäkerhet och immateriella rättigheter [14].

För att bedöma kunskaper och förståelse används vanligen olika typer av frågor som sträcker sig från objektiva frågor, som flervalsfrågor eller svar av typen sant/falskt, till mer subjektiva frågor som kräver öppna, konstruerade svar [14]. Många digitala bedömningssystem som existerar idag fokuserar på flervalsfrågor då frågor med ett korrekt svar är lättare att rätta. Många uppgiftsformuleringar har traditionellt varit av en annan typ där exempelvis fritextsvar varit tillåtna och det är inte säkert att en bearbetning av frågan till flervalstyp uppfyller samma mål som tidigare. En vanlig invändning mot e-bedömningssystem är att de inte klarar av att bedöma högre kunskaper och en tvekan om de klarar av att hantera frågor som prövar alla typer av kursmål. Även om det är möjligt att skriva flervalsfrågor som testar högre kunskaper är det på inga sätt enkelt. Det finns många fallgropar som måste undvikas: skapa rimliga felaktiga svar, undvika "baklängesarbete", ta med gissningar i beräkningen osv. [6]. Det är dock viktigt att komma ihåg att flervalsfrågor ofta används för bedömningar när papper och penna används och konsten att skriva goda flervalsfrågor är exakt den samma oavsett medium.

Hur e-bedömningar kommer påverka undervisande lärares arbetsbörda diskuteras mycket, exempelvis i JISC-rapporten [10], och det är väldokumenterat att den stora ansträngningen som krävs kring provningar förflyttas till innan provning med e-bedömningar till skillnad från efter för traditionella provningar med papper och penna. Bland faktorerna som nu ligger innan provningstillfället finns med e-bedömningar provutveckling, kontroll så att frågor är jämbördiga med "pappersmotsvarigheter" och testkörningar av systemet. Som ett ytterligare led i att minska arbetsbördan kommer skapandet av uppgiftsbanker att behöva diskuteras. Kring detta aktualiseras frågor om tekniska standarder för kompatibilitet mellan system, immateriella rättighetsfrågor med mera som är viktiga att diskutera.

### 1.4.3 E-bedömningar inom matematik

Den moderna eran av e-bedömningar inom matematik inleddes 1985 på Heriot-Watt universitetet då ett projekt som kallades Computer Aided Learning in Mathematics (CALM) startades [15]. För varje avsnitt som skulle behandlas skapades material för teori, olika exempel och provningar. Man såg snabbt att studenter ofta arbetade sig igenom provdelen av systemet för att bedöma sina egna kunskaper. Proven var baserade på frågor från en uppgiftsbank och kunde varieras med slumpmässiga parametrar i varje uppgift. Systemet krävde att studenterna skulle ange sitt svar på problemet via ett enradstextfält med en syntax som liknade programmeringsspråket Pascal.

Det kan tyckas märkligt att vissa av de mer objektiva ämnesområdena som matematik och naturvetenskap påvisar några speciella tekniska utmaningar när man försöker införa e-bedömningar. Användandet av formler och symboler är inte trivialt när man använder ett konventionellt tangentbord. Problemet uppstår både vid presentation av formler och symboler som en del av en fråga men framför allt när man vill att studenter ska ge dessa som en del av sina svar. En enkel lösning på problemet skulle vara att utforma frågan i form av en flervalsfråga men man riskerar då att ändra frågans karaktär till att kräva igenkänning och urvalsformåga istället för förståelse och konstruktion [14]. Att ändra sin önskade fråga p.g.a. bekvämlighet eller för att det tekniska ramverket kräver det bör undvikas i möjligaste mån. Hermans [16] argumenterar för vikten av att en allmän standard som tillåter inmatning av matematiskt språk via tangentbordet som är lätt att lära sig för studenter.

### 1.4.4 Utmaningar vid e-bedömningar inom matematik

#### **Presentation av matematiskt språk**

Matematik är ett språk i sig och häri ligger en av svårigheterna med att använda sig av matematik i digitala applikationer. Formler, uttryck och ekvationer kan innehålla bråkstreck, exponenter, index och olika specialtecken som integraltecken och summasympboler. Vissa av dessa, som tecknen för addition och subtraktion finns i den vanliga teckenuppsättningen på en dator. Andra, som  $\infty$  och  $\leq$  existerar i den utökade teckenuppsättningen. Problemet är att långt ifrån alla tänkbara matematiska symboler finns där. Jag kommer i följande avsnitt gå igenom några av teknikerna som existerar för att presentera matematiskt innehåll på en webbsida.

Under slutet på 70-talet och stora delar av 80-talet växte typsättningssystemet TeX fram med två huvudsakliga mål: att tillåta vem som helst att skapa högkvalitativa böcker med en rimlig insats och att erbjuda ett system som

kommer att ge exakt samma resultat på alla datorer, nu och i framtiden. TeX blev snabbt en populär metod för att konstruera komplexa matematiska formler. Med tiden ökade behovet att visa TeX på webben. Goossens och Rahtz [17] går igenom några av teknikerna som existerar för att konvertera TeX till någonting som en webbläsare klarar av att visa. LaTeX2HTML och TeX4ht konverterar TeX till bilder vilka kan visas upp i en webbläsare. Problemet är att varje formel, uttryck eller ekvation kommer att bestå av en separat bildfil. Metoden att visa matematiska uttryck i form av en bildfil får till för inte så länge sedan anses vara standard. Detta trots att tekniken bryter mot några av webbens fundamentalprinciper: åtkomst, användbarhet och läsaroberoende. Om man använder en konventionell webbläsare kommer sannolikt sidan att visas korrekt men om man använder en text- eller Braillesläsare kommer sidan inte att visas riktigt. Även på en traditionell dator kan en användares preferenser styra att ett dokument ska visas i en annan textstorlek eller med alternativa färger, någonting som inte är möjligt för webbläsaren att korrigera om innehållet ligger i bilder [18]. Ett annat program, TTH, gör om uttryck i TeX till ren HTML som visas direkt i webbläsaren genom att använda HTML-tabeller och helt vanliga tecken. Andra tekniker för att översätta TeX direkt i webbläsaren via insticksprogram och appletprogram har också existerat med nackdelen att användare själva måste ladda ner och installera det aktuella insticksprogrammet.

I figur 1 ses ett exempel på syntaxen för ett matematiskt uttryck skrivet i TeX och i figur 2 det renderade matematiska uttrycket i form av en bild.

```
-{p \over 2} \pm \sqrt{{p^2 \over 4} - q}
```

Figur 1 - Matematiskt uttryck skrivet i TeX

$$-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Figur 2 – Renderat TeX-uttryck i form av en bildfil

MathML är ett XML-baserat format för att beskriva matematisk notation och fånga både dess struktur och innehåll. Målet med MathML är att möjliggöra för matematik att bli hanterad på webben på samma sätt som HTML fungerar för text [19]. Att fånga både struktur och innehåll innebär med andra ord att MathML inte bara ska klara av att presentera matematiskt innehåll på en skärm utan också kunna erbjuda en djupare form av betydelsebärande element i syntaxen. Bakom MathML står den internationella gemenskapen W3C där medlemsorganisationer och allmänheten arbetar tillsammans för att utveckla standarder för webben.

Specifikationen för MathML definierar två set av element och attribut: Presentation MathML och Content MathML.

Presentation MathML fokuserar på presentationen av ett matematiskt uttryck och består av ca 30 element och 50 attribut. Alla element inleds med ett m följt av ett tecken som representerar vilken typ av data elementet symboliserar: `<mi>p</mi>` för variabler, `<mo>+</mo>` för operatorer eller `<mn>13</mn>` för tal. Dessa är kombinerade med layoutelement som `<mrow>` - en rad, `<msup>` - potenser och `<mfrac>` - bråk. Det existerar också *entities* för bokstäver som  $\pi$  (`&pi;`), symboler som högerpil (`&RightArrow;`) och vissa osynliga tecken som multiplikationstecknet mellan ett tal och en variabel (`&InvisibleTimes;`). Nedan, i figur 3, ses ett exempel på hur syntaxen för samma exempel som i figur 1 anges i Presentation MathML.

```

<math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML">
  <mrow <!-- inleder en ny rad -->
    <mo>-</mo> <!-- -: en operator -->
      <mfrac>
        <mrow>
          <mi>p</mi> <!-- p: en variabel -->
        </mrow>
        <mrow>
          <mn>2</mn> <!-- 2: ett tal -->
        </mrow>
      </mfrac>
    <mo>&PlusMinus;</mo>
    <msqrt>
      <mfrac>
        <mrow>
          <msup>
            <mi>p</mi>
            <mn>2</mn>
          </msup>
        </mrow>
        <mrow>
          <mn>4</mn>
        </mrow>
      </mfrac>
    <mo>-</mo>
    <mi>q</mi>
  </msqrt>
</mrow>
</math>

```

Figur 3 - Presentation MathML för den allmänna lösningsformeln för andragradsekvationer.

$$-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Figur 4 – Rendering utförd av Firefox 3.6 baserat på Presentation MathML

Content MathML fokuserar på den egentliga innebörden av ett uttryck. En central komponent i Content MathML är `<apply>`-elementet som representerar en funktion eller en operator som ska appliceras på en variabel eller tal. Content MathML uttrycket `<apply><sin/><ci>x</ci></apply>` kommer representera funktionen  $\sin(x)$  medan `<apply><plus/><ci>x</ci><cn>5</cn></apply>` representerar  $x+5$ .

Content MathML innehåller mer information om det matematiska uttrycket och kan därför fungera som ett format för att utväxla data mellan olika matematiska applikationer. Emellertid är mängden matematik som ryms i syntaxen något begränsad. Valet mellan Presentation MathML och Content MathML beror på vilka områden av matematik som berörs men också på vilka krav som ställs på hur dokumentet ska hanteras senare.

Tack vare att MathML är XML-baserad som andra W3C-specifikationer är den helt integrerbar med vanliga webbt tekniker och löser därför ett av de stora problem som TeX led av, presentation av ett matematiskt uttryck på webben. MathML är exempelvis kompatibel med CSS som därför kan användas för att styra hur det matematiska uttrycket ska presenteras i termer av textstorlek och färg utan att ändra i den ursprungliga koden.

MathML som språk är inte lika kompakt som TeX och lämpar sig mindre bra för att skapas manuellt utan kräver någon form av mjukvara för generering.

### **Inmatning av matematiskt språk**

Om man ser bortanför användandet av flervalfrågor kommer man ställas inför svårigheten att tillåta studenter att mata in matematiska uttryck via traditionella inmatningsenheter som tangentbord och mus.

En viktig aspekt av inmatningen som lyfts fram av Pitcher, Goldfinch och Beevers [20] är att den bör hjälpa till att undvika typografiska fel genom att allt medan studenten skriver sitt svar översätta det till ett matematiskt uttryck, på det sättet får studenten omedelbar feedback på hur systemet tolkar indata. Ta följande exempel som illustration varför det är viktigt. En student har löst ett problem korrekt och insett att svaret på problemet är  $\frac{1}{2x}$  men anger som svar

$1/2x$  vilket sannolikt kommer att tolkas som  $\frac{1}{2}x$ . Direktöversättningen kan troligtvis inte ersätta den text studenten skriver *on the fly* utan att förvirra den som skriver texten utan bör visas i anslutning till inmatningsrutan. En schematisk bild för att illustrera hur det skulle kunna se ut ses nedan.



<code>V=(4pi r^3) / 3</code>	$V = \frac{4\pi r^3}{3}$
------------------------------	--------------------------

Figur5 - Direktöversättning av matematiska formler

På olika håll har det praktiserats olika syntax för inmatning av matematiska uttryck. Ett större projekt som heter Alice Interactive Mathematics (AIM) som delvis integrerades med datoralgebrasystemet Maple använde ren Maplesyntax för inmatning av matematiska uttryck. En nackdel med att använda Maplesyntax är dels att studenterna måste lära sig den [21], en inte helt naturlig del av gymnasiestudier, och att man riskerar att studenterna utnyttjar systemet på ett sätt det inte var avsett för t.ex. genom att ange ett relevant Maplekommando istället för den tänkta lösningen på problemet. Exempelvis skulle en student

kunna ange `int(x^2, x=0..3)` för att beräkna integralen  $\int_0^3 x^2$  [16].

En annan tänkbar metod för inmatning är att använda ASCIIMathML<sup>2</sup>. ASCIIMathML är en teknik som fungerar genom att JavaScript-kod omvandlar en miniräknarlik syntax till MathML. Syntaxen består av tecken som återfinns på vanliga tangentbord och följer en logisk uppbyggnad av t.ex. parenteser för att hålla samman respektive separera delar av uttryck, understreck för index och insättningstecken för exponenter. En fullständig listning av syntax och konstanter finns publicerad på ASCIIMathML's hemsida<sup>3</sup>.

<code>int_0^3 x^2 dx`</code>	$\int_0^3 x^2 dx$
------------------------------	-------------------

Figur6 - Exempel på ASCIIMathML-syntax

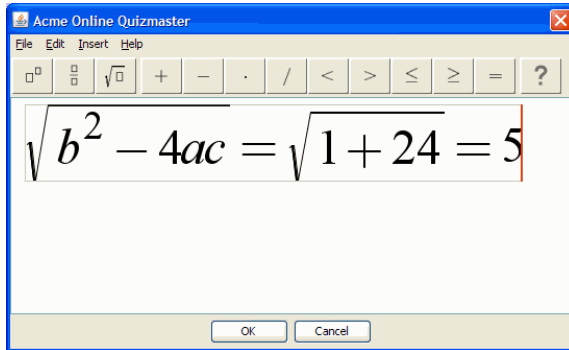
Ett tredje, och något annorlunda, sätt att mata in matematiska uttryck skulle kunna vara ett grafiskt verktyg med knappar och menyer för insättning av vanliga matematiska symboler och tecken. Verktuget skulle kunna bestå av olika vyer beroende på komplexitetskrav på matematiken. Ett exempel på denna metod är den kommersiella utvecklingssviten MathFlow (tidigare WebEQ) som tillverkas av Design Science<sup>4</sup>. Många av försöken att integrera den här typen av grafiska verktyg i en webbkontext har gjorts med hjälp av appletprogram med de nackdelar det medför i form av behov av insticksprogram och

<sup>2</sup> <http://www1.chapman.edu/~jipsen/mathml/asciimath.html>

<sup>3</sup> <http://www1.chapman.edu/~jipsen/mathml/asciimathsyntax.html>

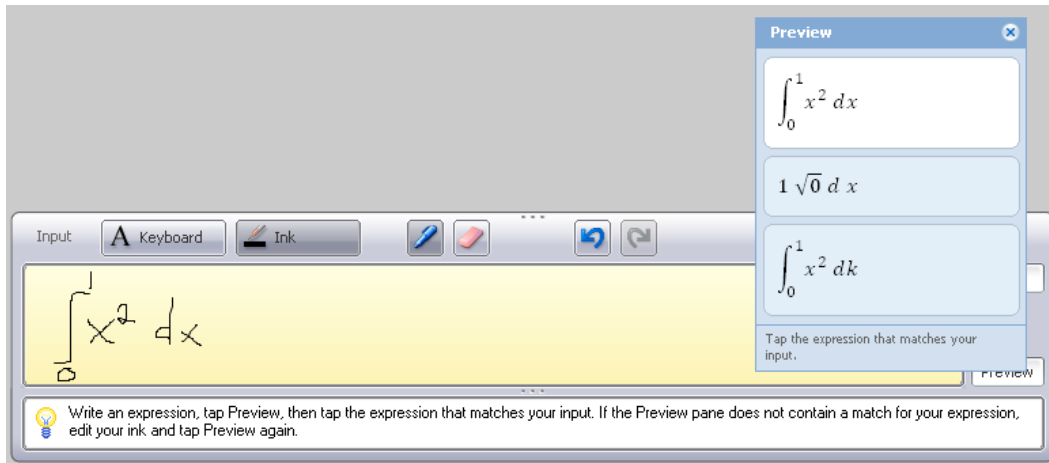
<sup>4</sup> <http://www.dessci.com/en/products/mathflow/default.htm>

säkerhetsrelaterade frågor. Med dagens teknik i form av JavaScript/AJAX och på lite sikt även HTML5 borde det vara möjligt att utforma ett liknande verktyg i rena webbstandarder och således kunna integreras på ett bra sätt i en webbapplikation.



Figur7 - Grafisk inmatning av matematiska uttryck

Slutligen tänkte jag beröra möjligheten att mata in matematiska uttryck genom att skriva matematiska uttryck direkt med musen eller med en penna på en bärbar pekdator. Tekniken finns redan i kommersiella applikationer som MathType, Microsoft Math och nu också inkluderat som en del av Windows 7 i form av Math Input Panel. Teknikens stora fördel är dess likhet med hur man skriver matematiska uttryck med papper och penna, den metod som på något sätt är den mall vi jämför alla digitala tekniker med. Den stora frågan är om man tillräckligt enkelt kan mata in uttryck med hjälp av bara musen och i vissa fall bara med den lilla styrplatta många laptops är utrustade med. I studier av Mattecoach och Läxcoach, två projekt med inriktning mot att stödja elevers matematikstudier med läxhjälp via Internet, har man funnit fördelar med att ansluta en bärbar pekdator till datorn för att på så sätt kunna rita med en digital penna istället för den traditionella datormusen [22]. Flera av dessa tekniker erbjuder grafisk hjälp i form av förslag på hur uttrycket ska tolkas.



Figur8 – Inmatning av integral

Oavsett vilken metod som används måste det finnas ett skydd i systemet för att dels skydda mot att studenter utnyttjar systemets kraft för egen vinning som i Mapleexemplet och dels för att skydda mot vad som kallas för *injections* på engelska. Att skadlig kod "injiceras" i systemet via inmatningsformulär för att förstöra eller utnyttja systemet på andra sätt än de avsedda.

### Delpoäng på uppgift

I en traditionell bedömningsituation som sker efter en prövning som genomförts med papper och penna delas delpoäng normalt ut för svar som inte är helt korrekta men trots allt innehåller något mått av förståelse för problemet. E-bedömningar fungerar ofta så att ett svar till ett problem antingen är rätt eller fel och om det är fel delas inga poäng ut. Det uppstår härmed en risk för att en elevs resultat skulle skilja sig beroende på i vilket medium provet skrevs. Följande illustrativa exempel är hämtat från en undersökning av Ashton, Beevers, Korabinski och Youngson [23].

Bestäm tangentens ekvation för funktionen  $g(x) = x^2 + 3x + 5$  när  $x = 1$ .

Bedömningsmatrisen för en bedömning i pappersformat hade kunnat likna nedanstående:

- 1 poäng för att känna till att man behöver bestämma derivatan av  $g(x)$
- 1 poäng för att bestämma  $g'(x)$
- 1 poäng för att beräkna lutningen av tangenten
- 1 poäng för att bestämma tangentens ekvation

En elev som besvarar uppgiften korrekt,  $y = 5x + 4$ , genom följande resonemang hade blivit belönad med fyra poäng oavsett om prövningen skett via papper eller dator.

$$g'(x) = 2x + 3$$

Lutningen på tangenten är således  $g'(1) = 5$

Slutligen måste ekvationen för tangenten till  $g(x)$  när  $x = 1$  vara  $y = 5x + 4$

Om vi istället antar att eleven fört följande resonemang

$$g'(x) = 2x + 3$$

Lutningen på tangenten är således  $g'(1) = 4$

Slutligen måste ekvationen för tangenten till  $g(x)$  när  $x = 1$  vara  $y = 4x + 5$

Om bara det slutgiltiga svaret bedöms, som ofta sker i olika former av e-bedömningar, hade eleven inte erhållit några poäng för sin lösning. I en traditionell prövning på papper å andra sidan hade sannolikt eleven blivit belönad med tre av fyra möjliga poäng.

En möjlig lösning som diskuteras av Ashton, Beevers, Korabinski och Youngson [23] är införandet av möjligheten att dela in problemet i flera mindre delar (*steps*). Om eleven som utför prövningen väljer att se delproblemen kan inte längre full poäng på uppgiften nås. Författarna framhåller dock risken att inte samtliga lärdomar blir bedömda då det ofta blir så att man avslöjar lösningsstrategin genom att bryta ner frågan i mindre problem. I uppgiften om funktionens tangent gavs den första poängen för att eleven kände till strategin att derivera funktionen. Det tillkommer också en ytterligare aspekt av problemlösandet som inte uppstår i en traditionell bedömning nämligen att elevens ställs inför valet att låta bli att använda steg-funktionaliteten och på det sättet riskera att inte få några poäng alls om hon gör ett misstag eller att använda den men att då veta att hon inte kan få full poäng på uppgiften. Författarnas undersökning finner ingen skillnad mellan resultaten på en e-bedömning utformad med möjligheten till delpoäng med hjälp av steg i förhållande till en traditionell prövning skriven på papper.

### Jämföra och beräkna uttryck

I fall med flervalsfrågor är det enkelt att avgöra om det svarsalternativ en student angett är korrekt eller ej. Mer konventionella uppgifter kräver möjligheten att beräkna och jämföra matematiska uttryck [24]. En del i en e-bedömningsapplikation kommer bestå i att avgöra om det svar studenten matat in i form av en textsträng överensstämmer med det som är angett av uppgiftsskaparen. Det normala förfarandet för att jämföra två strängar är att jämföra strängen tecken för tecken och se om de överensstämmer. Givet en uppgift kring en funktion av en variabel där svaret givet av uppgiftsskaparen är

$x^2 - 1$  borde godkända studentsvar rimligtvis vara  $x \times x - 1$ ,  $(x-1)(x+1)$ ,  $(x+1) \times (x-1)$  och så vidare. Man inser snabbt att en traditionell strängjämförelse inte är möjlig när det kommer till matematiska uttryck. Teoretiskt skulle det kunna finna oändligt många svar till ett problem och således är det inte heller möjligt att registrera dessa i systemet.

En möjlig lösning på problemet som presenteras bl.a. av Beevers, Foster, McGuire och Renshaw [24] respektive Pitcher, Goldfinch och Beevers [20] är vad de kallar strängberäkning och går ut på att ett antal punkter väljs ut i ett givet intervall. För varje punkt beräknas värdet av studentens svar och jämförs med värdet av samma punkt beräknad utifrån det korrekta svaret. Antalet punkter som behövs för jämförelsen har diskuterats [20] och man kom fram till att de ursprungliga elva punkterna som användes i en tillämpning är onödigt stort. Vissa andra applikationer använder sig av fem punkter men troligtvis är en slumpvis punkt vald i ett lämpligt intervall tillräckligt.

En annan, och mer sofistikerad, angreppsmetod som presenteras av Sangwin [8] är att använda sig av ett datoralgebrasystem. Pondera följande uppgift, "*Derivera  $(x-1)^3$  med avseende på  $x$* ". Svaret som angivits till frågan av uppgiftskonstruktören är  $3 \times (x-1)^2$ . Systemet kommer då med hjälp av ett datoralgebrasystem kunna jämföra det korrekta svaret och studentssvaret rent algebraiskt och ge rätt också för exempelvis  $3x^2 - 6x + 3$ . En klart mer solid konstruktion än strängberäkningsmetoden. I själva verket hade uppgiftskonstruktören i sitt svar kunnat ange att en viss funktion skulle deriveras och på så sätt inte själv behöva utföra deriveringen. Denna egenskap gör det möjligt att skriva helt slumpmässiga frågor genom att skapa en funktion eller variabel och sedan låta den ingå i svaret direkt eller via en beräkning som datoralgebrasystemet utför. En fördel, utöver möjligheten för studenter att lösa liknande problem många gånger, är att det minskar risken för att studenter ska kopiera varandras svar. Under formativa bedömningar kan man tänka sig att det pågår diskussioner mellan studenter om en lämplig lösningsmetod snarare än korrekta svar. I traditionella bedömningar när studenter har identiska problemformuleringar anses ofta den typen av samtal som fusk.

Begränsningar existerar givetvis. Bara de matematiska egenskaper som kan beräknas med hjälp av datoralgebrasystemet kan implementeras. Beroende på vilket datoralgebrasystem som används täcks olika områden in men många kommersiella datoralgebrasystem kan hantera stora områden av grundläggande matematik som algebra, integralkalkyl, linjär algebra och differentialekvationer

vilket sannolikt täcker in all matematik som undervisas i den svenska gymnasieskolan. När det kommer till uppgifter som berör bevis eller resonemang blir uppgiften att automatiskt jämföra svar svår. Problem som berör enklare algebra, vilket det ofta handlar om i gymnasieskolan, uppstår det ibland problem då datoralgebrasystem jämför två uttryck algebraiskt trots att det i vissa enklare tillämpningar inte är det som efterfrågas, exempelvis en uppgift som innehåller en lydelse som kräver ett svar i enklast möjliga bråkform. Ett datoralgebrasystem gör normalt ingen skillnad på  $\frac{1}{2}$  och  $\frac{3}{6}$ . Detta borde dock rimligtvis gå att lösa genom att markera i systemet att ett identiskt svar måste anges [8].

## 2 Metod

### 2.1 Observationer

I syfte att svara på hur interaktionen mellan elev och teknik fungerar (m.a.p. snabbhet och korrekthet) avser jag att utföra en serie observationer där elever får arbeta med inmatning av matematiska uttryck. Att använda observation som undersökningsform har den fördelen att man kan se vad som faktiskt händer och inte bara, som fallet är t.ex. vid en intervju, hur människor *uppfattar* verkligheten. Bell [25] påminner dock om riskerna för skevhet eller feltolkningar om man som ensam observatör forskar inom sitt eget professionsområde. Då parametrarna jag ska undersöka är enkelt kvantifierbara (uttryck  $x$  tog  $y$  sekunder att mata in med metod  $z$  respektive att avgöra om inmatningen överensstämmer med originaluttrycket eller inte) tänker jag mig att jag kan minimera risken för skevhet genom att genomföra icke-deltagande observationer av användandet. En icke-deltagande observation går ut på att den som observerar inte interagerar med undersökningsobjektet på något annat sätt än att observera. Det faktum att delar av mina undersökningsfrågor är enkelt kvantifierbara bör också resultera i en god validitet i just dessa frågor. En ytterligare intressant buseffekt observationerna kan ge är möjligheten att dokumentera om metoderna genererar återkommande eller liknande problem för eleverna.

### 2.2 Intervjuer

Jag nämner ovan att observationer skiljer sig från intervjuer på det sätt att observationer bättre återger det som faktiskt händer till skillnad från hur människor uppfattar verkligheten. När det kommer till den sista parametern, upplevd lätthet, i min undersökning är det precis det jag är ute efter, hur eleverna själva upplever inmatandet. Jag avser därför att i anslutning till observationstillfället också genomföra en kortare intervju med eleverna för att få ta del av deras uppfattning. Bell [25] lyfter fram som en ytterligare fördel med intervjuer att man lättare kan följa upp idéer som uppstår under tiden jämfört med exempelvis enkäter. Detta kan lämpa sig väl i detta fall då en elev möjligen kan komma med förslag på förbättringar eller helt nya angreppssätt tack vare en ny syn på problemet. Då det är viktigt att hålla intervjun fokuserad kring de områden jag redan valt att fokusera på kommer det troligtvis lämpa sig väl att använda sig av en strukturerad till semi-strukturerad intervju. Några av problemen med intervjuer är dels att de är tidskrävande, både i planerings-, utförande- och analysfasen dels, i likhet med observationer, att det finns en inbyggd risk för skevhet men jag hoppas att medvetenheten om att risken finns

ska vara tillräcklig för att jag ska kunna hantera frågan på ett tillfredsställande sätt.

## 2.3 Urval

Så snart man avser att utföra en undersökning och inte har möjlighet att undersöka samtliga individer ur en population ställs man inför problemet med urval. Då jag på inga sätt kommer ha möjlighet att undersöka mina frågeställningar mot Sveriges samlade gymnasister (nästan 400 000 elever) kommer även jag att behöva göra ett urval av dessa. Jag tror att det framför allt är två faktorer som påverkar ens uppfattning om teknikerna jag vill undersöka. Den ena är vilken matematisk kunskap man har. Ju högre kunskap i matematik desto mindre kognitiv kraft går åt att förstå och tolka matematiska uttryck och följaktligen kan mer kraft läggas på att förstå och tillämpa tekniken. Den andra faktorn är vilken vana man har av att arbeta med datorer och andra tekniska hjälpmedel, förenklat tänker jag mig att man på gymnasienivå kan översätta det till programtillhörighet. Av dessa anledningar kommer jag att hålla dessa faktorer konstanta i undersökningen.

Undersökningen kommer att genomföras på en gymnasieskola i centrala Stockholm. Skolan tillhandahåller utbildningar på det naturvetenskapliga programmet, samhällsvetenskapliga programmet, teknikprogrammet och byggprogrammet. Skolan har ca 500 elever där det samhällsvetenskapliga programmet är det största följt av teknikprogrammet och det naturvetenskapliga programmet.

Urvalet kommer ske genom att lotta fram 25 elever ur två klasser med elever i årskurs 2 på teknikprogrammet. Anledningen till att urvalet kommer att ske ur dessa klasser är delvis av praktiska skäl. Via skolan där undersökningen kommer att ske har jag tillgång till dessa elever under viss lektionstid varje vecka. Att få ett mer blandat urval genom att lotta elever ur exempelvis godtycklig klass på skolan kommer att komplicera genomförandet av undersökningen till en sådan grad att jag inte anser att vinsterna överväger fördelarna. Det skulle också göra det omöjligt att hålla den formella matematiska kunskapen och det tekniska kunnandet statiska genom undersökningen.

Även om urvalet består av 25 elever kommer undersökningen bara att omfatta de 20 först valda. Resterande fem elever är reserver vars deltagande i studien är beroende på om någon av de 20 ordinarie deltagarna väljer att inte delta i undersökningen.



## 2.4 Särskild hänsyn

En särskild svårighet när man ska genomföra en undersökning i en skola är det faktum att deltagarna i studien potentiellt är omyndiga. Bell [25] påpekar att det generellt vid undersökningar är viktigt att ge skriftlig information till alla deltagare om vad undersökningen handlar om, varför man vill intervjua dem, vilken typ av frågor som ska ställas och vad man kommer att göra med den information man får fram. I fallet med omyndiga personer blir denna del extra viktig och dialogen kommer med nödvändighet att riktats till elevernas vårdnadshavare. Ett informationsbrev<sup>5</sup> skickades hem till vårdnadshavare för samtliga elever som var under 18 år där jag dels informerade om studien och dels bad att få deras skriftliga godkännande att deras son eller dotter skulle få delta i studien.

## 2.5 Genomförande

Efter det att eleverna som slumpmässigt valts ut accepterat att delta i undersökningen kommer samtliga elever delta i en gemensam presentation av undersökningen och vad det innebär att delta i en vetenskaplig studie. I och med att delar av syftet är att undersöka hur intuitivt gränssnittet för inmatning är kommer eleverna inte i förväg att få arbeta med teknikerna. I samband med presentationen kommer jag också att förklara hur undersökningen kommer gå till i större detalj. Det är viktigt att belysa vissa aspekter av hur en observation går till och att jag inte på något sätt bedömer deras insats utan att det är de olika teknikerna som granskas.

Vid ett senare tillfälle kommer eleverna som deltar i undersökningen en och en att kallas till det egentliga undersökningstillfället. Det kommer att ske vid en dator i en lugn miljö på skolan. Eleverna kommer att ges i uppdrag att mata in fyra stycken matematiska uttryck av varierande matematisk komplexitetsnivå för respektive inmatningsteknik. De matematiska uttrycken kommer att vara identiska för samtliga elever som deltar i studien. Ordningen i vilken eleverna utför respektive teknik kommer slumpas och därför (sannolikt) vara olika för eleverna.

---

<sup>5</sup> Se bilaga E

De uttryck som kommer användas i undersökningen är:

1.  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2.  $-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

3.  $f'(x) = (e^x + \pi)^{2/3}$

4.  $\frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x)$

Jag har medvetet valt uttryck och notationer som jag vet att eleverna är bekanta med för att undvika missförstånd på ett matematiskt plan. Det är viktigt att påminna eleverna om att det i första hand handlar om att uttrycken ska tolkas matematiskt korrekt av tekniken och i andra hand "se ut" som sina förlagor på papper. Som ett exempel på hur det kan behöva skilja sig stödjer inte ASCIIMathML osynliga multiplikationstecken som används i uttryck 1.

Jag har vidare valt uttryck som innehåller olika typer av matematiska svårigheter för att på så sätt se om det är någon specifik aspekt av det matematiska språket som vållar särskilda problem. Dessa svårigheter omfattar bland annat exponenter, icke-numeriska symboler och bråk.

Denna del av studien bedrivs som en icke-deltagande observation och eleverna kommer således få arbeta med inmatningen utan att interagera med mig eller någon annan. För att inte göra situationen onödigt stressande för eleven kommer jag inte att observera skärmen och eleven under själva genomförandet utan spelar in det som sker på skärmen och kan ta del av det vid ett senare tillfälle. När den här delen av undersökningen är över kommer jag genomföra en kortare intervju där eleven får chansen att redogöra för sina intryck av de olika teknikerna.

Konkret kommer jag att använda Microsoft Equation 3.0 som är en del av Microsoft Word 2010 för den ikonbaserade inmatningen, Microsoft Math Input Panel som är en del av Windows 7 för inmatningen med hjälp av ritverktyg och slutligen en egen implementation av ASCIIMathML's JavaScript<sup>6</sup>.

---

<sup>6</sup> Se bilaga A

## 3 Resultat

Undersökningen fokuserar på tre delområden (snabbhet, korrekthet och upplevd lätthet) för inmatning av matematiska uttryck och resultaten för dessa presenteras i respektive kapitel nedan. I hänvisningar till de matematiska uttryck som användes i undersökningen används numrering enligt nedan.

1.  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2.  $-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

3.  $f'(x) = (e^x + \pi)^{2/3}$

4.  $\frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x)$

### 3.1 Snabbhet

Med snabbhet avses den tid det tog för eleven från att inmatningen inleddes till det att eleven bedömde att inmatningen var slutförd.

I de fall där eleven avbrutit inmatningen av något skäl (t.ex. p.g.a. att eleven inte har förstått hur inmatningen ska gå till) innan inmatningen är slutförd kommer jag att bortse från mätvärdet vid beräkningar av läges- och spridningsmått. För samtliga tekniker och uttryck har jag beräknat lägesmått medelvärde och median, spridningsmått variationsbredd och kvartilavstånd samt noterat max- och minvärden. Dessa värden utgör tillsammans en bild över en tekniks snabbhet.

Urvalet varierar något mellan uttryck och tekniker med ett lägsta urval på 7 elever för ASCIIMathML och uttryck 2 beroende på att flera elever valde att avbryta sitt inmatningsförsök till ett urval på 11 för de flesta andra kombinationerna av tekniker och uttryck.

Bortsett från uttryck 2 var ASCIIMathML den snabbaste tekniken för inmatning för samtliga uttryck. Särskilt tydlig var skillnaden i tid för de olika teknikerna för uttryck 1 och 4.

För uttryck 1, se diagram 1, låg samtliga mätvärden för ASCIIMathML lägre än den undre kvartilen för Math Input Panel och med en median som var tre gånger så liten i förhållande till Math Input Panel. Jämfört med Microsoft Equation 3.0 var skillnaderna inte fullt så stora men fortfarande klart lägre för samtliga jämförelsevärden och med en variationsbredd som var ca 4 gånger så liten.

I stort erhölls liknande resultat för uttryck 1 och uttryck 4. I ordningen ASCIIMathML, Math Input Panel och Microsoft Equation 3.0 erhöles ett medianvärde på 39 s, 118,5 s och 59 s för uttryck 1. Motsvarande värde för uttryck 4 var 29 s, 64 s och 67 s. En noterbar avvikelse var att uttryck 1 tog förhållandevis lång tid att genomföra med Math Input Panel.

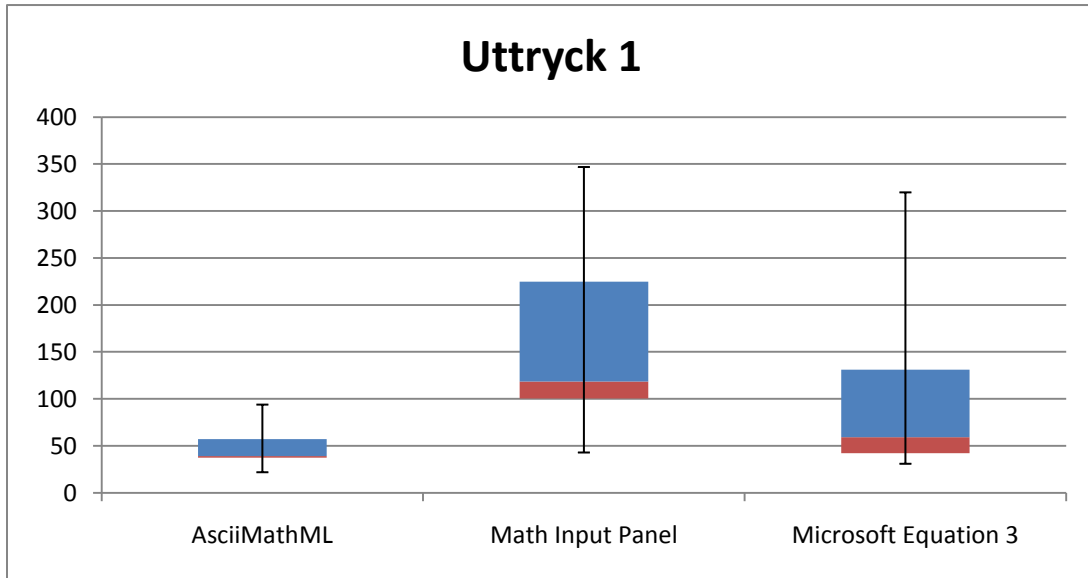


Diagram 1 - Lådagram över genomförandtid för uttryck 1

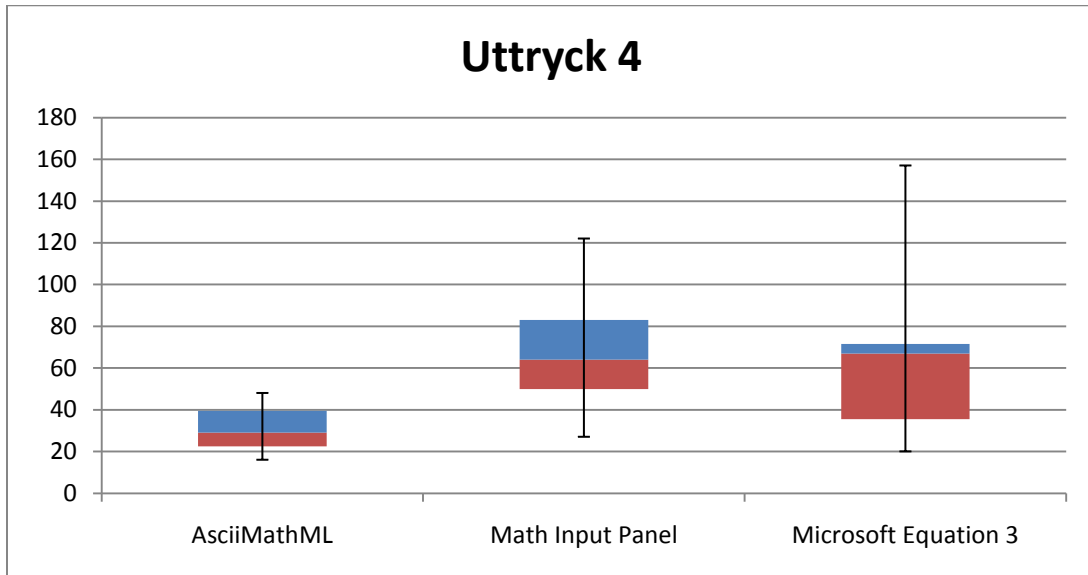


Diagram 2 - Lådagram över genomförandtid för uttryck 4.

Uttryck 2 särskiljer sig från övriga på så sätt att det var det enda uttrycket där inmatningstiden för ASCIIMathML inte var den lägsta. ASCIIMathML uppvisar

istället både det högsta maxvärdet och det högsta medelvärdet. Anledningar till detta diskuteras i kapitel 4.

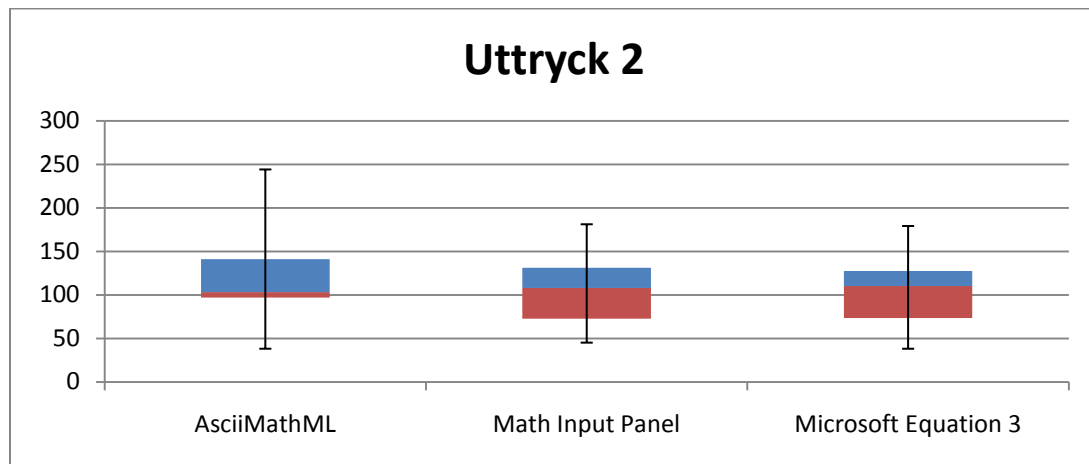


Diagram 3 - Lådagram över genomförandetid för uttryck 2

Sett över samtliga uttryck uppvisar resultaten en stor variationsbredd oavsett inmatningsteknik där dock ASCIIMathML har den lägsta variationsbredden med 228 sekunder, följt av Microsoft Equation 3.0 med 300 sekunder och Math Input Panel med 320 sekunder. Den genomsnittliga inmatningstiden för ett uttryck som ingick i undersökningen var precis över 92 sekunder. Sett till medelvärden presterade ASCIIMathML den snabbaste inmatningen med ett medelvärde på 68,5 sekunder, följt av Microsoft Equation 3.0 på 97,5 sekunder och Math Input Panel med 110 sekunder. Mindre aggregerad data för inmatningstid återfinns i bilaga B.

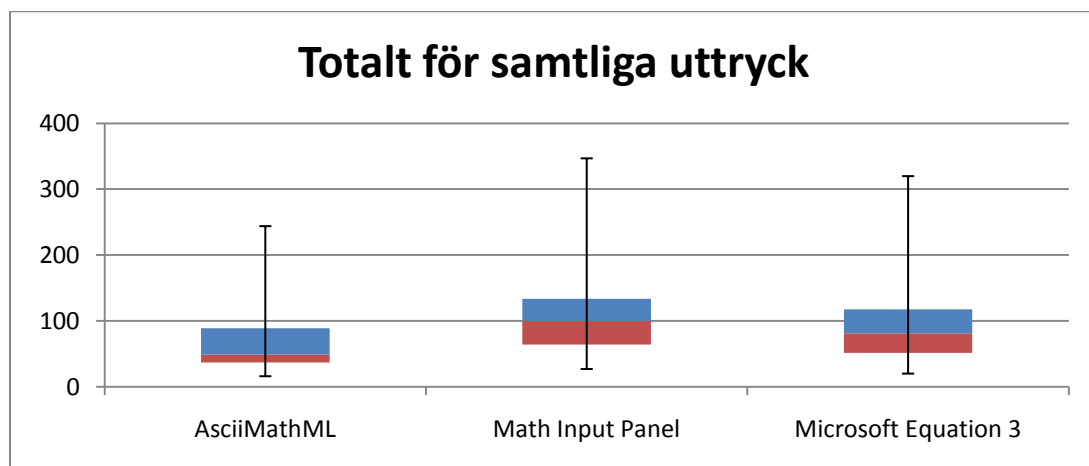


Diagram 4 - Lådagram över genomförandetid för samtliga uttryck

## 3.2 Korrekthet

För att ett uttryck ska anses vara korrekt inmatat ska det överensstämma med ett referensuttryck<sup>7</sup> som togs fram innan undersökningen inleddes. Referensuttrycket har använt samtliga tillgängliga funktioner i den aktuella tekniken för att vara så likt ursprungsuttrycket som möjligt med avseende både på utseende och innebörd.

Teknikerna skiljer sig här något åt. ASCIIMathML och Math Input Panel erbjuder båda en automatisk tolkning av uttrycket. Under tiden inmatningen sker bearbetar tekniken inmatningen och återger hur den tolkas. I ASCIIMathML ändrar det tolkade uttrycket färg beroende på om det tolkas matematiskt eller inte. Microsoft Equation 3.0 erbjuder inte den här typen av tolkning då det inte är framtaget för interaktion med ett bakomliggande system utan för inmatning av presentationsmatematik.

ASCIIMathML och Math Input Panel presterade relativt likvärdigt i termer av korrekthet med 61 % (ASCIIMathML) respektive 55 % (Math Input Panel) korrekt inmatade uttryck. Noterbart är att det vid fyra tillfällen, eller 9 %, av inmatningsförsöken med ASCIIMathML uppstod en situation där en elev fick avbryta inmatningen av ett uttryck då eleven inte förstod hur han eller hon skulle gå vidare.

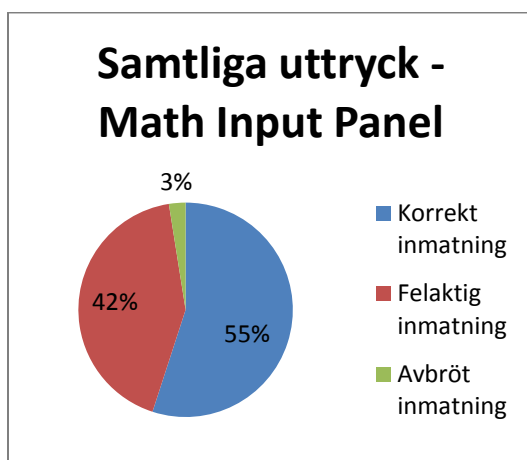


Diagram 5 - Korrekthet för samtliga uttryck inmatade med Math Input Panel

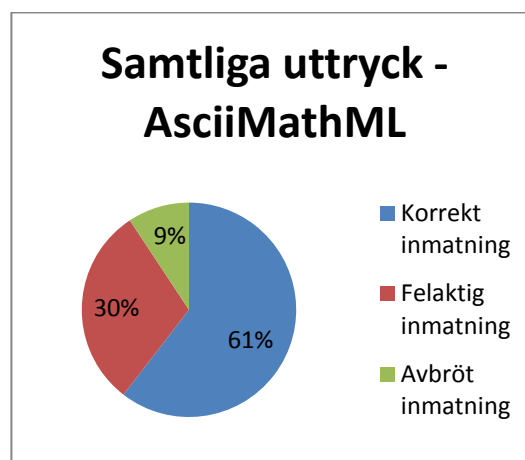


Diagram 6 - Korrekthet för samtliga uttryck inmatade med ASCIIMathML

<sup>7</sup> Se bilaga D.

Microsoft Equation 3.0 utmärker sig i negativ bemärkelse med 75 % felaktigt och 25 % korrekt inmatade uttryck. Felaktigheterna var relativt jämnt fördelade mellan uttryckens svårigheter så som exponenter, bråk och matematiska symboler.

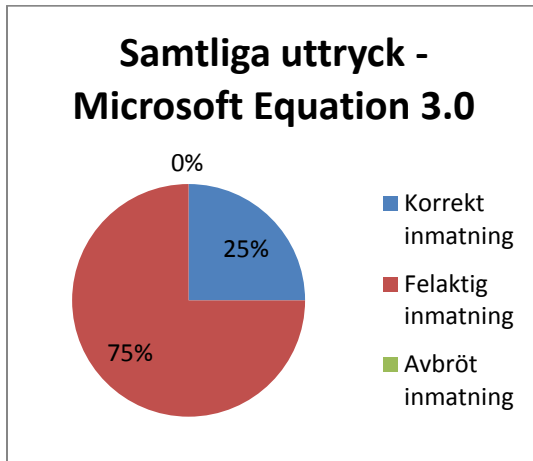


Diagram 7 - Korrekthet för samtliga uttryck inmatade med Microsoft Equation 3.0

### 3.3 Upplevd lätthet

Att mäta hur lätt, intuitivt eller naturligt en inmatningsteknik upplevs är inte lika enkelt som att mäta hur lång tid det tar eller om uttrycket blir korrekts eller inte. Vilken egenskap är det som ska kvantifieras, mätas och analyseras? I det följande redogör jag för vad som framkom i samtal med elever som just använt de tre teknikerna. För att strukturera data grupperar jag elevernas kommentarer på respektive teknik.

En åsikt som återkom i svaren från flera elever var att det var bra med den visuella bekräftelsen på hur uttrycket tolkades i ASCIIMathML. Trots att en liknande funktionalitet återfinns i Math Input Panel nämndes inte den i samma positiva ordalag. Flera elever upplevde att ASCIIMathML's syntax kändes naturlig och att "det blev rätt" utan att man behövde tänka på det. Den upplevda naturligheten verkar delvis vara kopplad till en vana av att använda tangentbord för inmatning. Flera elever återkommer i sina kommentarer till att det fungerar bra att bara skriva det man vill göra så blir det rätt. Noterbart i sammanhanget är dock att ASCIIMathML uppvisade överlägset flest avbrutna inmatningsförsök i de fall där elevernas första instinkt visade sig felaktig och de inte lyckades ta sig vidare.

Den gemensamma nämnaren för många elevkommentarer kring Math Input Panel var att det var svårt och tog lång tid att rita sitt matematiska uttryck med

musen. Trots detta framhåller några elever att det var roligt, att det går bra att korrigera sina inmatningar via gränssnittet och att man hela tiden blir bättre och bättre. En aspekt av Math Input Panel som en del elever tog upp var att algoritmen som tolkar uttrycket fortsätter att utföra förbättrade gissningar allteftersom man skriver, en teknik som kräver viss tillvänjning. Nu blev det så att elever stannade upp i sin inmatning och försökte korrigera sina inmatningar om de noterade att Math Input Panel tolkade uttrycket felaktigt. Ett ofta mödosamt arbete de möjligen hade sluppit om de bara hade fortsatt inmatningen. Några elever föreslår att man borde ha en penna och en ritplatta istället för en mus för att underlätta inmatningen. En elev började argumenterade muntligt med Math Input Panel då han enligt sig själv hade ritat ett perfekt  $\pi$ -tecken och Math Input Panel trots detta inte ville tolka det som ett  $\pi$ -tecken. Några elever diskuterade att systemet är väl känsligt och att många element som kan ingå i ett uttryck "ser likadana ut" så som t.ex. olika typer av parenteser, bokstaven c och så vidare. Generellt verkade eleverna uppfatta det som mer komplicerat att mata in bokstäver och symboler än siffror.

Två huvudsynpunkter som existerade kring Microsoft Equation 3.0 var för det första att det tar tid och var svårt att navigera och hitta det eleven letade efter i ikonmenyn. Ett elevomdöme lød: "Det är säkert jättepraktiskt när man har lärt sig det men det kommer att ta ett tag." För det andra blev flera elever osäkra kring om de "fick" använda tangentbordet eller om de var tvungna att använda det grafiska menysystemet t.ex. kring användandet av parenteser som existerar både på tangentbordet och bland ikonerna.



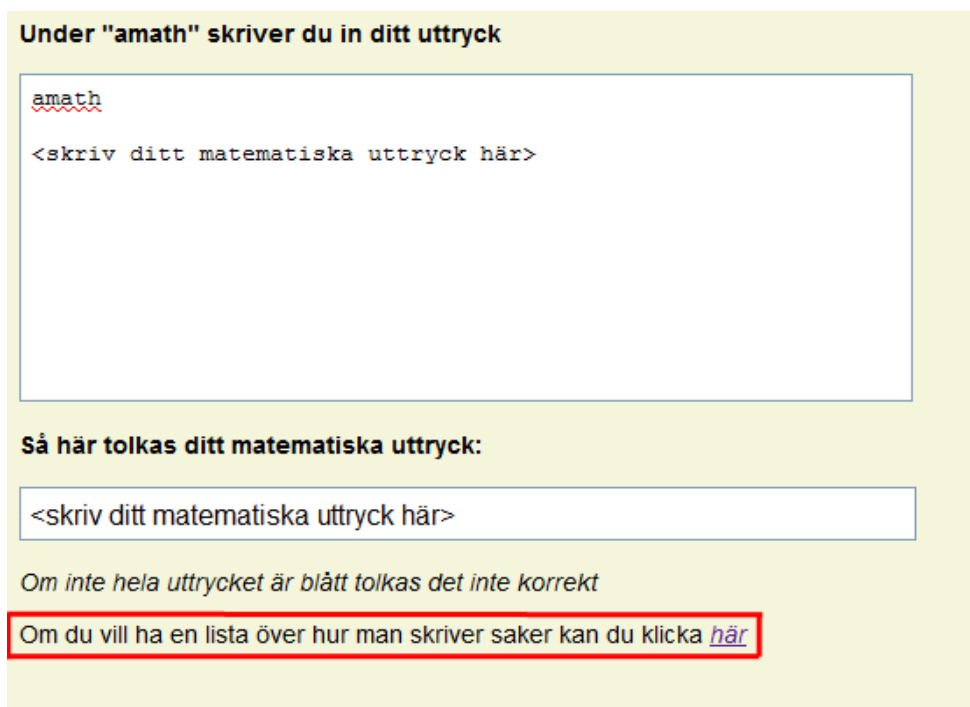
# 4 Diskussion

## 4.1 Sammanfattning av resultat

I det följande kapitlet diskuterar jag några av resultaten från undersökningen och försöker analysera varför resultaten ser ut som de gör. Kapitlet är indelat med ett avsnitt för respektive inmatningsteknik.

### ASCIIMathML

ASCIIMathML uppvisade en del goda egenskaper i termer av hur lång tid det tar att mata in uttryck och hur korrekt inmatningen är för en majoritet av dom uttryck som ingick i undersökningen. Det stora problemet föreligger istället vara om en elev inte omedelbart förstår hur inmatningen ska gå till. Flera elever uppvisade samma beteende med att avbryta inmatningen helt då deras initiala känsla inte stämde då de helt enkelt kunde komma på hur de skulle gå vidare. I gränssnittet fanns en länk till en sida med allmän syntax och en lista över konstanter. Vid de 17 inmatningsförsök som antingen avbröts eller resulterade i ett icke korrekt inmatat uttryck så använde en (1) elev länken. Det framstår som klart att om man önskar tillhandahålla funktionaliteten av en hjälpsida måste gränssnittet utformas på ett annat sätt.



Figur 9 - Länk till hjälpsida. Den röda inringningen är tillagd nu för ökad tydlighet och var inte synlig under genomförandet.

En elev föreslog till och med att det borde finnas ett system av glosor där vanligt förekommande matematiska uttryck skulle kunna finnas. Ett förslag som flera elever kom med var att man skulle försöka kombinera ihop ASCIIMathML med någon form av meny där vanligt förekommande matematiska uttryck och symboler skulle kunna finnas. Med fördel skulle kontexten avgöra vad som är troligt att användaren vill använda och populera menyn efter det. Den stora utmaningen i detta är att inte hamna i situationen Microsoft Equation 3.0 gjort, en meny som är svår att navigera och hitta det man söker i. En elev förde ett resonemang kring att man skulle införa någon form av taggar för att markera hur långt en matematisk symbol ska sträcka sig (här sagt om ett rottecken). Ett koncept som påminner om hur t.ex. TeX är uppbyggt. Nackdelen med detta är att konceptet i sig kräver en förståelse för uppmärkning av data vilket rimligtvis inte är möjligt att kräva av en användare av en e-bedömningsprodukt inom matematik.

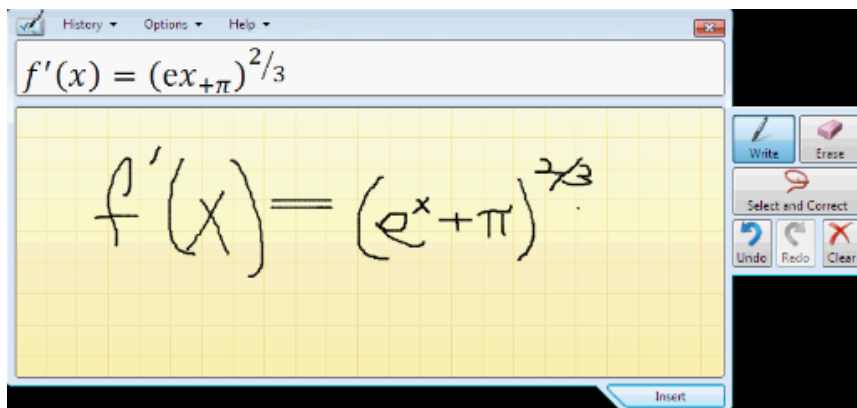
Noterbart är att den inmatningsteknik som till synes fungerar bäst idag i stort påminner om hur inmatningen såg ut i ett av de absolut första systemen för e-bedömningar inom matematik, Computer Aided Learning in Mathematics (CALM). CALM introducerades redan 1985 och inmatningstekniken för CALM beskrivs som ett enradstextfält där studenten skulle mata in sitt matematiska uttryck med en pascalliknande syntax [15].

Jag nämner i resultatdelen för korrekthet och upplevd lätthet att ASCIIMathML och Math Input Panel erbjuder liknande funktionalitet för automatisk tolkning av det uttryck som matas in. Detta är en aspekt av inmatningen som lyfts fram av Pitcher, Goldfinch och Beevers [20] som viktig för att undvika typografiska fel i inmatningen. I elevkommentarerna nämns denna tolkning i positiva ordalag för ASCIIMathML men inte alls för Math Input Panel. Den skillnad jag har kunnat utröna mellan teknikerna är vad ASCIIMathML kallar för *automatic math recognition* som utöver att tekniken tolkar uttrycket allteftersom det matas in också gör skillnad på om uttrycket uppfattas som matematiskt eller inte. I gränssnittet markeras denna skillnad genom att det tolkade uttrycket byter färg från blått till svart om det inte längre tolkas matematiskt.

### **Math Input Panel**

Att döma av elevkommentarerna var det stora problemet med Math Input Panel att det tar lång tid att mata in ett uttryck och att det är svårt att få Math Input Panel att tolka uttrycket korrekt. Del två ovan kan delvis förklaras med att eleverna inte kände till att Math Input Panel fortsätter att förbättra sin tolkning av uttrycket allteftersom eleven skriver in mer data. Flera gånger hamnade elever i en situation där Math Input Panel redovisade en felaktig tolkning, som

med tiden sannolikt hade blivit korrekt, men eleven avbröt inmatningen och försökte korrigera den så snart felet uppstod. En observation som gjordes under undersökningen är att Math Input Panel accepterar alla typer av matematiska uttryck. I grunden är det en positiv aspekt men som kan leda till märkliga resultat. Nedan ses hur uttryck 3 tolkades för en elev. Det inritade uttrycket ser för det mänskliga ögat relativt välformat ut med exponenten klart mindre och förflyttad i höjded i förhållande till basen och där  $\pi$  ligger i höjd med e och i samma storlek. Trots detta tolkar Math Input Panel uttrycket som  $ex_{+\pi}$ . Här hade möjligen ett snävare matematiskt utrymme kunnat underlätta tolkningen.



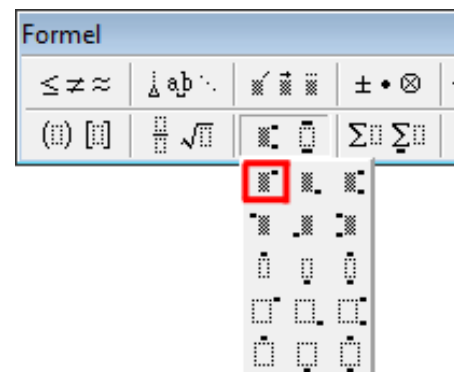
Figur 10 - Felaktigt tolkat uttryck

Ett förslag som flera elever lyfte fram var att det borde finnas en manual eller instruktion för hur man ska rita matematiska uttryck för att på så sätt underlätta för "tolkaren" vad det är användaren försöker mata in.

### Microsoft Equation 3.0

Det förefaller som att många elever har svårt att förstå de stiliserade matematiska symboler och funktioner som är avbildade på ikonerna och avgöra deras betydelse. Som ett exempel på hur det ser ut syns här intill den ikonmeny som är central i Microsoft Equation 3.0. Markerad med en röd kvadrat är den figur som symboliserar en potens med exponenten

placerad uppe till höger i förhållande till basen. Trots att flera elever fokuserat letade efter just den funktionen förmådde de inte göra kopplingen mellan ikonerna och funktionen "upphöjt" som de letade efter.



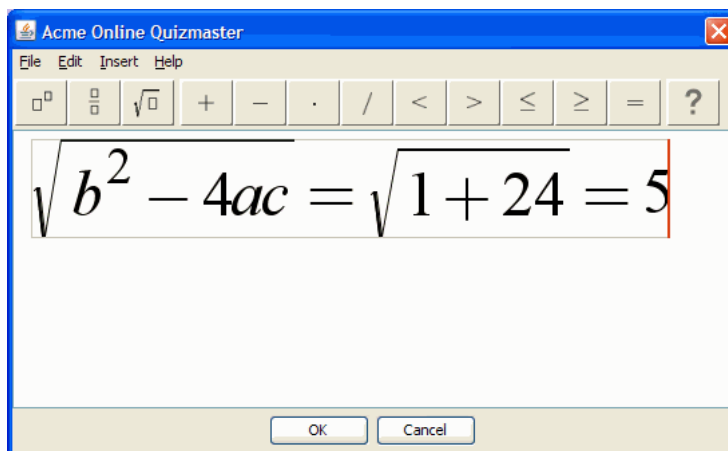
Figur 11 - Infoga potens i Microsoft Equation 3.0

Ett liknande problem kunde ses när elever letade efter symbolen  $\pi$ . Här tror jag inte problemet är att man inte känner igen symbolen utan snarare att den försvinner i mängden av liknande symboler som den delar utrymme med.

Ett alternativ som används i en produkt som heter MathFlow är att det existerar olika vyer beroende på vilka komplexitetskrav som ställs på inmatningen. Den vy med minst antal valmöjligheter är utvecklad för att användas av personer utan tidigare vana av systemet och är tänkt att användas i situationer där det bara är betydelsen av det matematiska uttrycket som spelar in, t.ex. i en e-bedömningssituation.



Figur 12 - Infoga grekiska tecken i Microsoft Equation 3.0



Figur 13- Inmatningsvy från MathFlow

Min personliga åsikt är att en vy med ovanstående utseende hade kunnat underlätta för eleverna i vissa situationer men försvårat i andra. Vad gör man när det man söker inte finns tillgängligt i gränssnittet? Då detta inte ingått i min undersökning får åsikterna anses vara spekulativa.

## 4.2 Slutsatser

Undersökningen har syftat till att undersöka lämpligheten i tre olika familjer av tekniker för inmatning av matematiska uttryck med avseende på snabbhet, korrekthet och upplevd lätthet.

Undersökningen visar att det finns skillnader mellan teknikerna med avseende på samtliga undersökta aspekter. ASCIIMathML presterar i topp i samtliga tre undersökta områden men har den stora nackdelen att den i vissa fall helt omöjliggör inmatningen när en elev inte kan komma vidare och avbryter

inmatningen. I termer av korrekthet följer Math Input Panel tätt efter ASCIIMathML men presterar något sämre med avseende på snabbhet och upplevd lätthet. Microsoft Equation 3.0 får, baserat på den här undersökningen, anses vara den teknik som presterar sämst i termer av korrekthet och kan inte heller anses prestera särskilt väl i termer av snabbhet eller upplevd lätthet.

Att det skiljer mellan teknikerna är egentligen inte konstigt. Det som är intressant är att sätta dessa resultat i relation till den verksamhet de är tänkta att konkurrera med, d.v.s. att skriva matematiska uttryck med papper och penna. Den genomsnittliga tiden för att mata in ett uttryck utslaget över samtliga uttryck och tekniker var 1 minut och 32 sekunder. Nu har jag inte undersökt hur lång tid det tar att skriva av de uttryck som ingick i undersökningen med papper och penna men min fasta övertygelse är att det går snabbare. Denna jämförelse blir än mer intressant när man tittar på resultaten avseende korrekthet, en helt avgörande aspekt för att kunna använda någon av dessa tekniker i ett e-bedömningssystem. Sett över samtliga tekniker och uttryck skedde totalt 127 inmatningar. Av dessa var 63 stycken (49,6 %) inte korrekta och hade med den här rapportens syn på korrekthet resulterat i ett felaktigt tolkat resultat och därmed inte ett korrekt svar på det matematiska problem som eleven har löst och vill redovisa sitt resultat för. Bäst presterade ASCIIMathML med 26 av 43 korrekta inmatningar men det är fortfarande bara just över 60 % korrekta inmatningar. Föreställ er samma situation i en traditionell provsituation med papper och penna. Givet att eleven har löst ett problem korrekt så får hälften av dem sitt redovisade resultat underkänt då läraren inte kan tolka det korrekt.

Hermans [16] argumenterade redan 2002 för vikten av att utveckla en allmän standard som tillåter inmatning av matematiskt språk via tangentbordet och som är lätt för studenter att lära sig. Trots att det har gått nästan ett decennium sedan dess finns ingen självklar kandidat för ändamålet. Av de tre tekniker jag utvärderat är det egentligen bara ASCIIMathML som kan sägas tillåta inmatningen via tangentbordet så jämförelsen är orättvis. Men om man lyfter frågan till att omfatta en allmän och lättlärd standard för inmatning med traditionella inmatningsenheter som tangentbord och mus håller jag ASCIIMathML som den främsta kandidaten av teknikerna som ingått i den här undersökningen. Det är till att börja med ett klart definierat språk till skillnad från Math Input Panel som i det närmaste får beskrivas som en rityta där det stora arbetet för en student blir att lära sig att hantera ritytan, ett arbete som om inte annat sannolikt har en högre tröskel för att nå en nivå där man kan nyttja tekniken på ett tillfredsställande sätt. Min bedömning av Microsoft Equation 3.0 i ljuset av Hermans kommentar är att dess oklara kombination av tangentbordsinmatning och användande av ikoner försvårar för en elev att ta till

sig systemet. Elever upplever en oklarhet i varför de inte tillåts att använda ett insättningstecken för att markera en exponent i en potens när tecknet finns tillgängligt på deras tangentbord och det är den notation de är vana vid att använda från sina miniräknare.

Med det sagt tror jag ändå att flera av de utvärderade teknikerna kan fungera för ändamålet. Jag tror att en viss tillvänjning är att räkna med när man introducerar en väsensskild teknik för inmatning. En utgångspunkt jag hade när jag inledde arbetet var att inmatningen skulle ske med utrustning som finns tillgänglig till varje dator och därför har jag uteslutit system som kräver anslutning av externa produkter ur undersökningen. Möjligen skulle man trots detta vilja undersöka hur mycket en ritplatta med tillhörande ritdon skulle förbättra resultaten för Math Input Panel.

Det finns också praktiska aspekter att ta hänsyn till i valet av en inmatningsteknik. ASCIIMathML finns fritt tillgängligt via GNU Lesser General Public License<sup>8</sup> medan de andra två teknikerna som utvärderades i den här undersökningen återfinns som delar av kommersiella program, Microsoft Windows 7 respektive Microsoft Office. Det finns möjligen icke-kommersiella alternativ till dessa men det ligger utanför den här rapporten att undersöka det. En annan aspekt som kan vara viktig att undersöka innan man fattar beslut om implementering av olika tekniker är möjligheterna att exportera det inmatade uttrycket till ett informationsbärande format för att kunna kommunicera med andra system som databaser, provbanker, datoralgebrasystem eller dylikt. Vissa system, t.ex. ASCIIMathML, genererar som utdata Presentations MathML. Det är en dataform som används för presentation och fungerar utmärkt för det men för kommunikation med andra system skulle det vara fördelaktigt att använda sig av det mer informationsbärande formatet Content MathML. Det pågår viss forskning<sup>9</sup> kring "uppkonvertering" av mindre innehållsrika data som TeX och Presentation MathML till det mer innehållsrika formatet Content MathML vilket skulle kunna utgöra en utmärkt grund för en e-bedömningsapplikation. Tyvärr är "uppkonvertering" av data generellt ett svårt problem att lösa.

### 4.3 Förslag till framtida forskning inom området

Det här examensarbetet tog sina första steg i en kontext av datorbaserade bedömningar inom matematik och svårigheterna som detta medför. Jag identifierade fyra problemområden som behöver lösas för att e-bedömningar inom matematik ska kunna ta nästa steg i sin utveckling. Presentation av

---

<sup>8</sup> <http://www.gnu.org/licenses/lgpl.html>

<sup>9</sup> <http://www2.ph.ed.ac.uk/snuggletex/documentation/semantic-enrichment.html>

matematiskt språk, inmatning av matematiska uttryck, delpoäng på uppgifter och möjligheten att jämföra och beräkna uttryck. Det existerar idag goda alternativ både för presentation av matematiska uttryck och system för att jämföra och beräkna uttryck.

Två områden som vore intressanta att fördjupa sig ytterligare inom är för det första möjligheten att dela ut delpoäng på en uppgift. Det är ett område där viss forskning har bedrivits men där jag är av uppfattningen att mer forskning skulle behöva genomföras både för att utvärdera befintliga tekniker men också för att undersöka nya möjligheter. För det andra skulle det område som den här rapporten berör behöva belysas ytterligare. Jag tror själv att vanan av att använda en teknik kan påverka resultaten avseende snabbhet och korrekthet och det vore därför intressant att genomföra ytterligare undersökningar där elever introduceras för en teknik och får arbeta med den under en längre tidsperiod. En annan spännande inriktning skulle vara att använda en mer blandad urvalsgrupp då den som använts i den här undersökningen varit en homogen grupp av unga teknikintresserade män.

Ett sista förslag på möjliga forskningsområden är att undersöka kombinationen av ett ritverktyg, som exempelvis Math Input Panel, och användandet av en ritplatta. Möjligen skulle det kunna förändra resultaten för hur ritverktyg presterar, en tanke som har visst stöd i andra undersökningar, t.ex. *Informell coachning på nätet* i *Mer om nätbaserad utbildning: fördjupning och exempel* [22].

## 4.4 Felkällor

Vad som kunde ses genom hela undersökningen var att vissa elever hade en bristfällig matematisk kunskap. T.ex. kunde man notera att många elever inte tillät rottecknet att sträcka sig ut över "lilla  $q$ " i den allmänna lösningsformeln för andragradsekvationer. Detta trots att dessa elever för tiden för undersökningen antingen hade slutfört Matematik C eller läste Matematik D.

Ett misstag från min sida i undersökningen var att exponenter ingick i tre av fyra uttryck. Det får som konsekvens att om en elev inte behärskar det momentet i inmatningen riskerar den eleven att genomföra tre av fyra inmatningar på ett icke-korrekt sätt. Det fanns förvisso fall där en elev matade in exponenter felaktigt i ett uttryck för att i ett senare uttryck med samma teknik mata in det korrekt. Detta tillhör dock ovanligheterna.

Ursprungligen avsåg jag att genomföra undersökningen med ett urval av 20 elever. I samråd med mina handledare valde jag att begränsa urvalet till 11 elever. Dels på grund av svårigheter att hitta tider som fungerade för eleverna

och mig själv dels för att tiden för en undersökt elev med genomförande, bearbetning och sammanställning blev hög.

I beräkningar av lägesmått för genomförandetid bortsåg jag från dom mätvärden där eleven avbröt sin inmatning. För kombinationen ASCIIMathML och uttryck 2 resulterade detta i att jag hade ett urval bestående av endast sju försök. Detta kan möjligen ha ledit till något för gynnsamma resultat för genomförandetid för ASCIIMathML i allmänhet och kombinationen ASCIIMathML och uttryck 2 i synnerhet.



## 5 Källförteckning

- [1] Svenska datatermgruppen [Internet]. Hämtad 2011-03-07. Tillgänglig från: <http://www.datatermgruppen.se/>
  
- [2] Gonzales, P., Williams, T., Jocelyn, L., Roey, S., Kastberg, D. and Brenwald, S. (2008). Highlights From TIMSS 2007: Mathematics and Science Achievement of U.S. Fourth- and Eighth-Grade Students in an International Context (NCES 2009–001 Revised). National Center for Education Statistics, Institute of Education Sciences, U.S. Department of Education. Washington, DC.
  
- [3] Gonzales, P., Guzmán, J. C., Partelow, L., Pahlke, E., Jocelyn, L., Kastberg, D. and Williams, T. (2004). Highlights From the Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS) 2003 (NCES 2005–005). U.S. Department of Education, National Center for Education Statistics. Washington, DC: U.S. Government Printing Office.
  
- [4] Brandell, L. Matematikkunskaperna 2008 hos nybörjarna på civilingenjörsprogrammen vid KTH: bearbetning av ett förkunskapstest. Stockholm; 2008.
  
- [5] Brandell, L. Matematikkunskaperna 2009 hos nybörjarna på civilingenjörsprogrammen vid KTH: bearbetning av ett förkunskapstest. Stockholm; 2009.
  
- [6] Ashton, H., Beevers, C. and Thomas, R. Can e-Assessment Become Mainstream? 2008.
  
- [7] Bartalini, T., and Verri, M. C. "Learning and Teaching Mathematics on-Line: Which are the Main Difficulties". Proceedings of the 6th European Conference on e-Learning (33-42). Reading, UK: Academic Conferences Limited; 2007.
  
- [8] Sangwin, C. J. Assessing mathematics automatically using computer algebra and the internet. LTSN Maths, Stats and OR Network; 2003.
  
- [9] Rowntree, D. Designing an assessment system.

- [10] JISC. Effective Practice with e-Assessment: An overview of technologies, policies and practice in further and higher education. 2007
- [11] Niss, M. Assessment in geometry. Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century. 1998: 263-274.
- [12] Pegg, J. Assessment in mathematics: A development approach. I: Royer, J. Mathematical Cognition. . Information Age Publishing Inc.; 2003.
- [13] Boesen, J. Assessing mathematical creativity. Umeå: Print & Media, Umeå universitet; 2006.
- [14] Craven P. History and Challenges of e-assessment: The 'Cambridge Approach' perspective - e-assessment research and development 1989 to 2009. 2009.
- [15] Beevers, C. E., Wild, D. G., McGuire, G. R., Fiddes, D. J., and Youngson, M. A. Issues of Partial Credit in Mathematical Assessment by Computer. ALT-J. 1999: 26-32.
- [16] Hermans, D. F. Embedding Intelligent Web Based Assessment in a Mathematical Learning Environment. 2002.
- [17] Goossens, M., and Rahtz, S. The Latex web companion: Integrating TeX, HTML, and XML. Addison Wesley Longman, Inc. 1999.
- [18] Froumentin, M. Mathematics on the Web with MathML.
- [19] Ausbrooks, R., Buswell, S., Carlisle, D., Dalmas, S., Devitt, S., Diaz, A., et al. Mathematical Markup Language (MathML) Version 2.0 (Second Edition): W3C Recommendation 21 October 2003. Publicerad: 2003-10-21. Hämtad: 2010-08-01. Tillgänglig från: <http://www.w3.org/TR/2003/REC-MathML2-20031021/>
- [20] Pitcher, N., Goldfinch, J., and Beevers. Aspects of Computer-Based Assessment in Mathematics. London: SAGE publications; 2002.
- [21] Strickland, N. Alice Interactive Mathematics.
- [22] Andersson, F., Kawnine, T., Hrastinski, S., and Edman, A. Informell coachning på nätet. I: Lindh, J., Keller, C., Mörndal, M., Reneland-Forsman, L., and Olofsson, A. D. Mer om nätbaserad utbildning. Studentlitteratur; 2011.

- [23] Ashton, H., Beevers, C., Korabinski, A., and Youngson, M. Incorporating partial credit in computer-aided assessment. *British Journal of Educational Technology*. 2009: 93-119
- [24] Beevers, C., Foster, M., McGuire, G., & Renshaw, J. Some problems of mathematical CAL. *Computers Educ.* 1992: 119-125.
- [25] Bell, J. *Introduktion till forskningsmetodik*, 4:e upplagan. Studentlitteratur; 2006.

# Bilaga A: Implementation av ASCIIMathML

Implementationen av ASCIIMathML bygger på en vy med två olika fält. Ett där man matar in matematiska uttryck med en miniräknarlik syntax och ett där JavaScriptet omedelbart visar hur uttrycket tolkas.

Under "amath" skriver du in ditt uttryck

```
amath  
<skriv ditt matematiska uttryck här>
```

Så här tolkas ditt matematiska uttryck:

```
<skriv ditt matematiska uttryck här>
```

Om inte hela uttrycket är blått tolkas det inte korrekt

Om du vill ha en lista över hur man skriver saker kan du klicka [här](#)

Under "amath" skriver du in ditt uttryck

```
amath  
d/dx cos(x) = -sin(x)
```

Så här tolkas ditt matematiska uttryck:

```
 $\frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x)$ 
```

Om inte hela uttrycket är blått tolkas det inte korrekt

Om du vill ha en lista över hur man skriver saker kan du klicka [här](#)

## Bilaga B: Resultat med avseende på tid grupperat på uttryck och teknik

Urval	11	Undre kvartil	37.5
Medel	49.63636364	Övre kvartil	57
Median	39	Kvartilavstånd	18
Min	22	Variationsbredd	72
Max	94		

Tabell 1 - Inmatning av  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  med ASCIIMathML.

Urval	10	Undre kvartil	100.25
Medel	162.2	Övre kvartil	224.75
Median	118.5	Kvartilavstånd	124.5
Min	43	Variationsbredd	304
Max	347		

Tabell 2 - Inmatning av  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  med Math Input Panel.

Urval	11	Undre kvartil	42
Medel	104.1818182	Övre kvartil	131
Median	59	Kvartilavstånd	89
Min	31	Variationsbredd	289
Max	320		

Tabell 3 - Inmatning av  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  med Microsoft Equation 3.0

Urval	7	Undre kvartil	97
Medel	123	Övre kvartil	141
Median	103	Kvartilavstånd	44
Min	38	Variationsbredd	206
Max	244		

Tabell 4 - Inmatning av  $-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$  med ASCIIMathML

Urval	11	Undre kvartil	72.5
Medel	105.8181818	Övre kvartil	131
Median	108	Kvartilavstånd	58.5
Min	45	Variationsbredd	136
Max	181		

Tabell 5 - Inmatning av  $-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$  med Math Input Panel

Urval	11	Undre kvartil	73.5
Medel	104.9090909	Övre kvartil	127.5
Median	110	Kvartilavstånd	54
Min	38	Variationsbredd	141
Max	179		

Tabell 6 - Inmatning av  $-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$  med Microsoft Equation 3.0

Urval	11	Undre kvartil	50.5
Medel	90.90909091	Övre kvartil	118
Median	60	Kvartilavstånd	67.5
Min	35	Variationsbredd	204
Max	239		

Tabell 7 - Inmatning av  $f'(x) = \sqrt{x + \pi}^{2/3}$  med ASCIIMathML

Urval	11	Undre kvartil	73.5
Medel	108.3636364	Övre kvartil	149.5
Median	102	Kvartilavstånd	76
Min	39	Variationsbredd	135
Max	174		

Tabell 8 - Inmatning av  $f'(x) = \sqrt{x + \pi}^{2/3}$  med Math Input Panel

Urval	11	Undre kvartil	83.5
Medel	116.7272727	Övre kvartil	128.5
Median	100	Kvartilavstånd	45
Min	45	Variationsbredd	245
Max	290		

Tabell 9 - Inmatning av  $f'(x) = \sqrt{x + \pi}^{2/3}$  med Microsoft Equation 3.0

Urval	11	Undre kvartil	22.5
Medel	30.90909091	Övre kvartil	39.5
Median	29	Kvartilavstånd	17
Min	16	Variationsbredd	32
Max	48		

Tabell 10 - Inmatning av  $\frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x)$  med ASCIIMathML

Urval	11	Undre kvartil	50
Medel	68.45454545	Övre kvartil	83
Median	64	Kvartilavstånd	33
Min	27	Variationsbredd	95
Max	122		

Tabell 11 - Inmatning av  $\frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x)$  med Math Input Panel

Urval	11	Undre kvartil	35.5
Medel	64.36363636	Övre kvartil	71.5
Median	67	Kvartilavstånd	36
Min	20	Variationsbredd	137
Max	157		

Tabell 12 - Inmatning av  $\frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x)$  med Microsoft Equation 3.0



Urval	40	Undre kvartil	36.5
Medel	68.675	Övre kvartil	88.75
Median	49	Kvartilavstånd	52.25
Min	16	Variationsbredd	228
Max	244		

Tabell 13 - Totalt för samtliga uttryck med ASCIIMathML

Urval	43	Undre kvartil	64
Medel	110.0232558	Övre kvartil	133.5
Median	100	Kvartilavstånd	69.5
Min	27	Variationsbredd	320
Max	347		

Tabell 14 - Totalt för samtliga uttryck med Math Input Panel

Urval	44	Undre kvartil	51.5
Medel	97.54545455	Övre kvartil	117.5
Median	81	Kvartilavstånd	66
Min	20	Variationsbredd	300
Max	320		

Tabell 15 - Totalt för samtliga uttryck med Microsoft Equation 3.0

# Bilaga C: Resultat med avseende på korrekthet grupperat på uttryck och teknik

Urval	10
Korrekt inmatning	8
Felaktig inmatning	2
Avbruten inmatning	0

Tabell 16 - Inmatning av  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  med ASCIIMathML

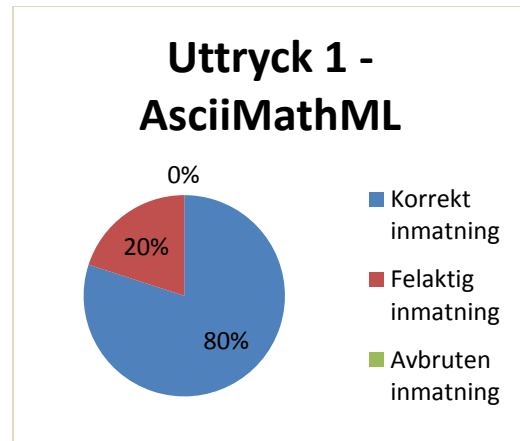


Diagram 8 - Inmatning av  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  med ASCIIMathML

Urval	9
Korrekt inmatning	5
Felaktig inmatning	3
Avbröt inmatning	1

Tabell 17 - Inmatning av  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  med Math Input Panel

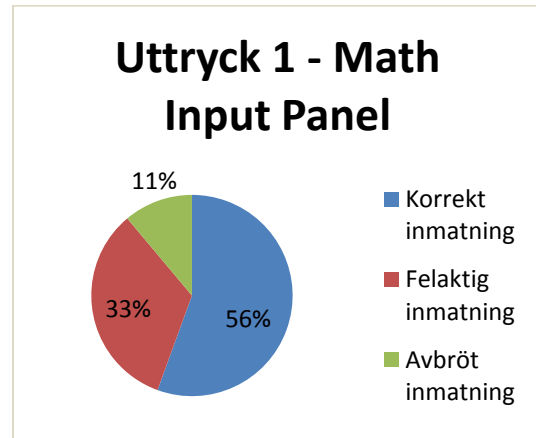


Diagram 9 - Inmatning av  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  med Math Input Panel

Urval	11
Korrekt inmatning	2
Felaktig inmatning	9
Avbröt inmatning	0

Tabell 18 - Inmatning av  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  med Microsoft Equation 3.0

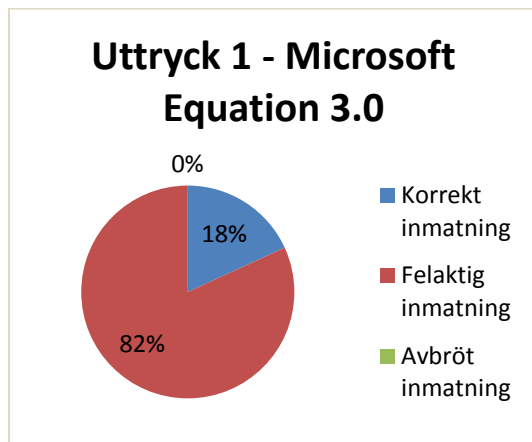


Diagram 10 - Inmatning av  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  med Microsoft Equation 3.0

Urval	11
Korrekt inmatning	1
Felaktig inmatning	6
Avbröt inmatning	4

Tabell 19 - Inmatning av  $-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$  med ASCIIMathML

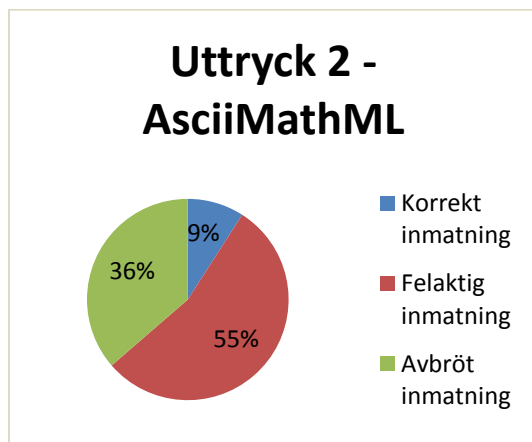


Diagram 11 - Inmatning av  $-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$  med ASCIIMathML

Urval	10
Korrekt inmatning	4
Felaktig inmatning	6
Avbröt inmatning	0

Tabell 20 - Inmatning av  $-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$  med

Math Input Panel

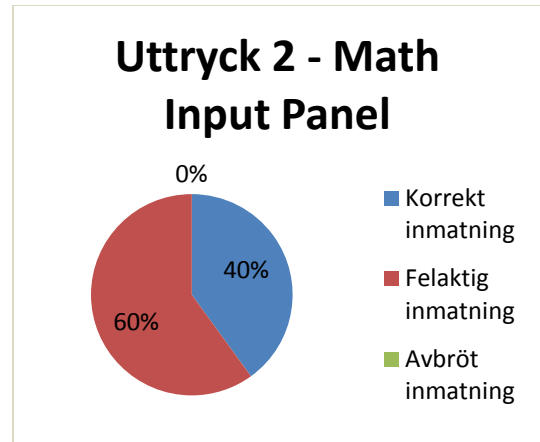


Diagram 12 - Inmatning av  $-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$  med

Math Input Panel

Urval	11
Korrekt inmatning	1
Felaktig inmatning	10
Avbröt inmatning	0

Tabell 21 - Inmatning av  $-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$  med

Microsoft Equation 3.0

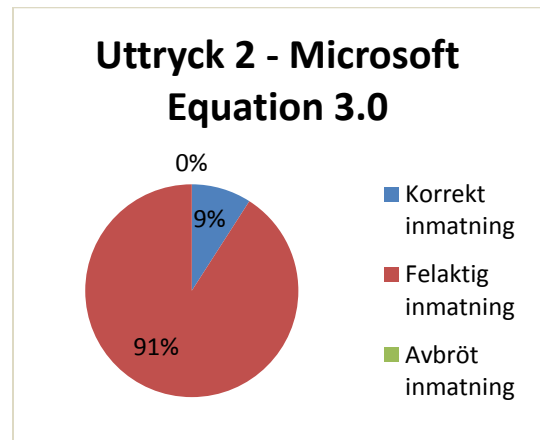


Diagram 13 - Inmatning av  $-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$  med

Microsoft Equation 3.0

Urval	11
Korrekt inmatning	7
Felaktig inmatning	4
Avbröt inmatning	0

Tabell 22 - Inmatning av  $f'(x) = e^x + \pi^{2/3}$  med ASCIIMathML

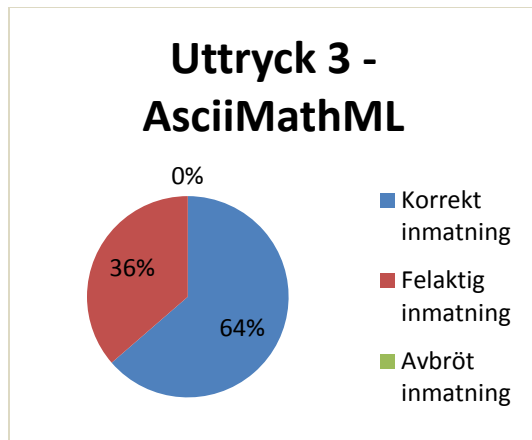


Diagram 14 - Inmatning av  $f'(x) = e^x + \pi^{2/3}$  med ASCIIMathML

Urval	10
Korrekt inmatning	5
Felaktig inmatning	5
Avbröt inmatning	0

Tabell 23 - Inmatning av  $f'(x) = e^x + \pi^{2/3}$  med Math Input Panel

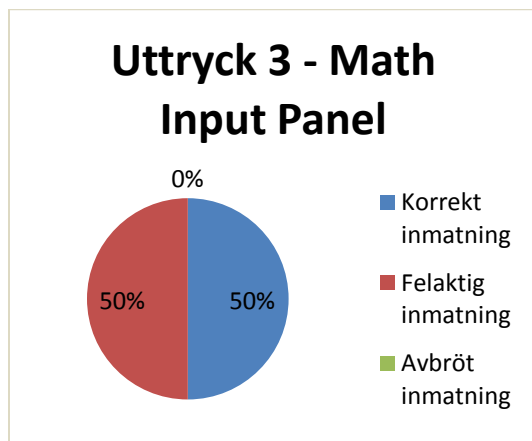


Diagram 15 - Inmatning av  $f'(x) = e^x + \pi^{2/3}$  med Math Input Panel

Urval	11
Korrekt inmatning	3
Felaktig inmatning	8
Avbröt inmatning	0

Tabell 24 - Inmatning av  $f'(x) = e^x + \pi^{2/3}$  med Microsoft Equation 3.0

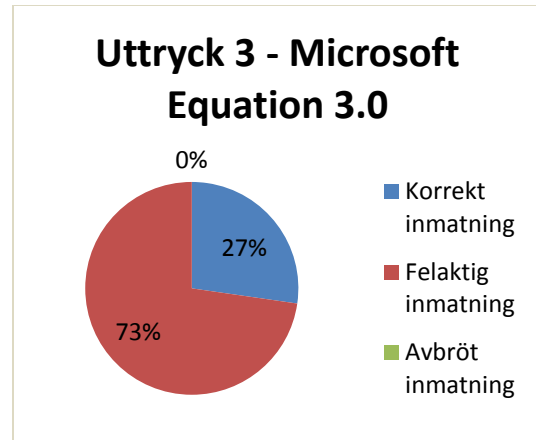


Diagram 16 - Inmatning av  $f'(x) = e^x + \pi^{2/3}$  med Microsoft Equation 3.0

Urval	11
Korrekt inmatning	10
Felaktig inmatning	1
Avbröt inmatning	0

Tabell 25 - Inmatning av  $\frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x)$  med ASCIIMathML

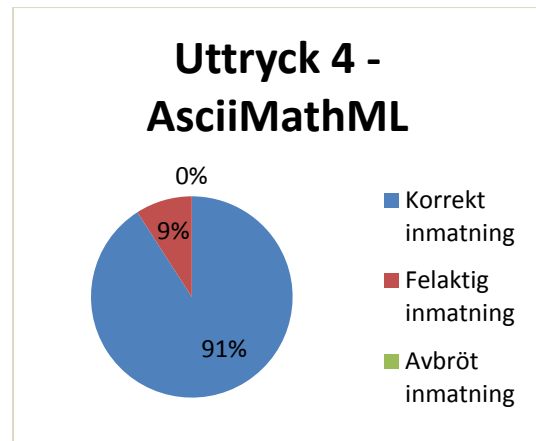


Diagram 17 - Inmatning av  $\frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x)$  med ASCIIMathML

Urval	11
Korrekt inmatning	8
Felaktig inmatning	3
Avbröt inmatning	0

Tabell 26 - Inmatning av  $\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$  med Math Input Panel

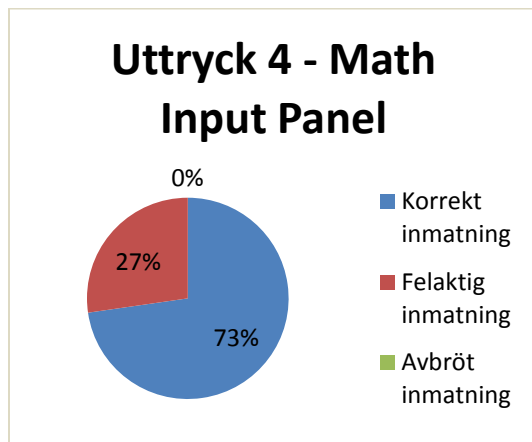


Diagram 18 - Inmatning av  $\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$  med Math Input Panel

Urval	11
Korrekt inmatning	5
Felaktig inmatning	6
Avbröt inmatning	0

Tabell 27 - Inmatning av  $\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$  med Microsoft Equation 3.0

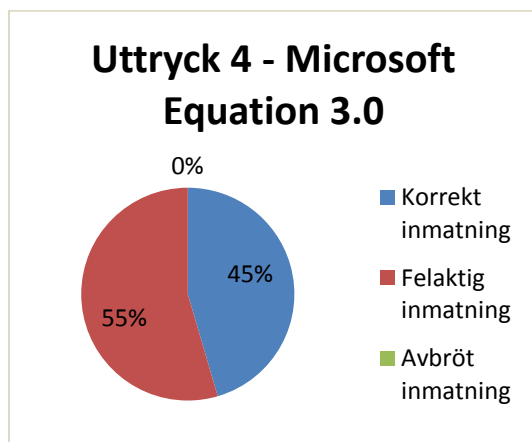


Diagram 19 - Inmatning av  $\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$  med Microsoft Equation 3.0

Urval	43
Korrekt inmatning	26
Felaktig inmatning	13
Avbröt inmatning	4

Tabell 28 - Totalt för samtliga uttryck inmatade med ASCIIMathML

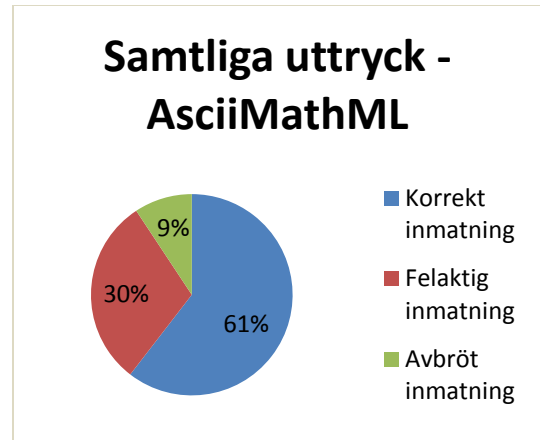


Diagram 20 - Totalt för samtliga uttryck inmatade med ASCIIMathML

Urval	40
Korrekt inmatning	22
Felaktig inmatning	17
Avbröt inmatning	1

Tabell 29 - Totalt för samtliga uttryck inmatade med Math Input Panel

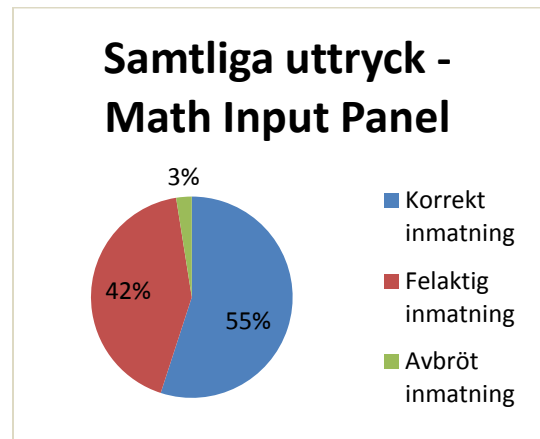


Diagram 21 - Totalt för samtliga uttryck inmatade med Math Input Panel



Urval	44
Korrekt inmatning	11
Felaktig inmatning	33
Avbröt inmatning	0

Tabell 30 - Totalt för samtliga uttryck inmatade med Microsoft Equation 3.0

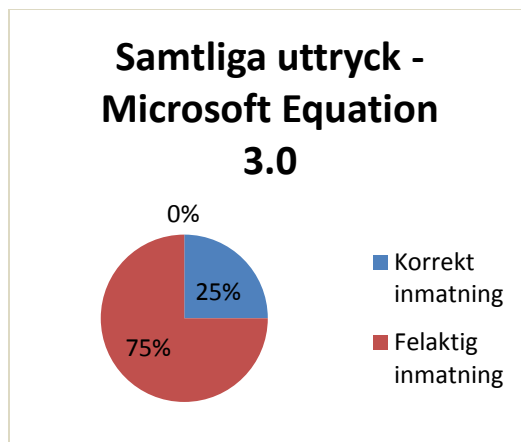


Diagram 22 - Totalt för samtliga uttryck inmatade med Microsoft Equation 3.0

# Bilaga D: Referensuttryck

Följande referensuttryck har använts som jämförelse för att avgöra om ett uttryck inmatat av en elev ska bedömas som korrekt eller inte.

## ASCIIMathML

amath

$$(a+b)^2 = a^2 + 2*a*b + b^2$$

Så här tolkas ditt matematiska uttryck:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

amath

$$-p/2 + -\text{sqrt}((p/2)^2 - q)$$

Så här tolkas ditt matematiska uttryck:

$$-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

amath

$$f'(x) = (e^x + \pi)^{2/3}$$

Så här tolkas ditt matematiska uttryck:

$$f'(x) = (e^x + \pi)^{\frac{2}{3}}$$

amath

$$d/dx \cos(x) = \sin(x)$$

Så här tolkas ditt matematiska uttryck:

$$\frac{d}{dx} \cos(x) = \sin(x)$$

### Math Input Panel

För Math Input Panel kan det inmatade uttrycket skilja sig mycket från fall till fall men det är hur Math Input Panel tolkar uttrycket som avgör om det bedöms som korrekt eller inte. En individuell bedömning har gjorts i varje fall utifrån vedertagen matematisk notation.

### Microsoft Equation 3.0

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$f'(x) = (e^x + \pi)^{2/3}$$

$$\frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x)$$

# Bilaga E: Informationsbrev

Informationsbrev som skickades till omyndiga elevers vårdnadshavare för att informera om undersökningen, dess syften och hur resultaten kommer att behandlas.

## Deltagande i studie kring inmatning av matematiska uttryck

Hej

Jag heter Andreas Green och arbetar som lärare på [REDACTED]. Som en del av min utbildning vid Kungliga Tekniska Högskolan och Lärarhögskolan i Stockholm ingår det att genomföra vad som kallas ett examensarbete.

I mitt examensarbete undersöker jag olika tekniker för att mata in matematiska uttryck i en dator. Som en del i det här arbetet kommer jag att observera och intervjua några elever på skolan och där har din son blivit slumpvis utvald att ingå i undersökningen. Då han inte är myndig vänder jag mig till er för att söka tillåtelse att låta er son ingå i studien.

Undersökningen kommer gå till som så att er son efter en inledande gemensam introduktion observeras av mig när han med tre olika tekniker matar in matematiska uttryck i en dator. Detta är en så kallad icke-deltagande observation där jag inte på något sätt interagerar med personen som utför inmatningen. Efter observationen får varje deltagare möjligheten att berätta om hur han upplevde det under en kortare intervju. Det är viktigt att komma ihåg att det är teknikerna för inmatning som undersöks, inte den som utför inmatningen.

Resultaten av undersökningen kommer att ingå i mitt examensarbete och därmed finnas tillgängligt för allmänheten att ta del av men alla resultat som rör er son kommer vara anonymiserade. Det kommer inte vara möjligt att på något sätt spåra resultat tillbaka till er son.

Om ni godkänner att er son deltar i undersökningen får jag be er skriva under detta dokument nedan och returnera det till mig i det bifogade svarskuvertet.

Med vänlig hälsning

Andreas Green

Jag godkänner deltagande i ovan nämnda studie.

Datum: \_\_\_\_\_

Underskrift: \_\_\_\_\_

Namnförtydligande: \_\_\_\_\_