

En learning study i geometri

Hur elever i årskurs 2 kan lära sig förstå skillnaderna och likheterna mellan kvadrat, rektangel, romb och parallelogram.

Annika Billing och Lotta Linton

Institutionen för matematikämnet och naturvetenskapsämnenas didaktik

Examensarbete 15 hp

Matematik

Självständigt arbete inom allmänt utbildningsområde, UM9000 (15-30 hp)

ht 2009

Examinator: Astrid Pettersson

English title: A Learning Study in Geometry. How pupils in the second grade can understand and learn the differences and similarities between square, rectangle, rhomb and parallelogram.



Stockholms
universitet

En learning study i geometri

Hur elever i årskurs 2 kan lära sig förstå skillnaderna och likheterna mellan kvadrat, rektangel, romb och parallelogram.

Annika Billing och Lotta Linton

Sammanfattning

Syftet med denna studie har varit att hitta de kritiska aspekterna för eleverna att lära sig särskilja fyrhörningarna, kvadrat, rektangel, romb och parallelogram. Vidare har vi undersökt hur undervisningen kan genomföras för att eleverna ska ha möjlighet att känna igen och korrekt namnge fyrhörningarna samt hur läraren kan ge eleverna möjlighet att erfara variation av vårt valda lärandeobjekt. För att besvara ovanstående frågor har vi använt oss av learning study som forskningsmetod. De 3 momenten som har ingått i vår studie är förtest, lektion och eftertest. Studien har genomförts i årskurs 2 i 3 relativt kunskapshomogena elevgrupper som vi i studien kallar grupp 1, 2 och 3. Alla grupper har efter genomförd undervisning förbättrat sina kunskaper avsevärt. Grupp 1 var den grupp som hade den största kunskapsökningen samt visade det totalt bästa resultatet.

Nyckelord

Learning study, variationsteorin, geometri, fyrhörningar, lärandeobjekt och kritiska aspekter

Inledning	1
Syfte och frågeställning	2
Litteraturgenomgång	3
Förklaring av begrepp.....	3
Lärandeobjekt	4
Kritiska aspekter.....	6
Variationsteorins ursprung från fenomenografin.....	8
Lärande sett utifrån variationsteorin och ett sociokulturellt perspektiv	9
Studier om geometri	10
Metod.....	12
Forskningsmetod	12
Presentation av designexperiment och lesson study	12
Learning study.....	13
Learning study om kvadrat, rektangel, romb och parallelogram	15
Urval	16
Tillförlitlighet	16
Försökspersoner	17
Etik	17
Bortfall	18
Resultat	19
Resultatredovisning.....	19
Förtest – kartläggning av elevernas förkunskaper.....	20
Lektion 1 – planering	22
Lektion 1 – genomförande	23
Lektion 1 – resultat från eftertest	26
Lektion 2 – planering	27
Lektion 2 – genomförande	27
Lektion 2 – resultat från eftertest	29
Lektion 3 – planering	31
Lektion 3 – genomförande	32
Lektion 3 – resultat från eftertest	35
Lektionen som gav de bästa möjligheterna för eleverna att särskilja fyrhörningarna	37

Diskussion	38
Referenslista	42
Bilagor	44
Bilaga 1 – Medgivande från målsman	44
Bilaga 2 – För - och eftertest i learning study kvadrat, rektangel, romb och parallelogram	45
Bilaga 3 – Fyrhörningsormen	49
Bilaga 4 - Geometriormen	53
Bilaga 5 – Geometri instruktioner.....	57

Inledning

Vi bestämde oss tidigt under vår lärarutbildning att det var inom matematikämnet vi ville skriva vårt självständiga arbete. Vi har båda två läst inriktningen *Att hitta matematiken i barnens värld* och det var under detta år som vi kom i kontakt med learning study för första gången. Under en av våra basgruppsdagar fick vi ta del av en föreläsning 2008 som Arja Paulin höll om learning study, där hon värdjade om att några av oss studenter skulle genomföra en learning study som självständigt arbete och vi blev direkt intresserade.

Vårt intresse har stärkts under utbildningen och under sommaren 2009 läste vi en teoretisk kurs på distans, Learning study - lärande i klassrummet 1 på 7,5 hp på Högskolan Kristianstad. Det vi har fått med oss från våra tidigare kontakter med learning study är att väldigt små skillnader i undervisningen kan ha stor betydelse för hur eleverna kan urskilja det kritiska för det tänkta *lärandeobjektet* dvs. de kunskaper eleverna förväntas utveckla. I en learning study är det viktigt att fokusera på elevernas lärande och inte på undervisningen det vill säga inte lägga fokus på undervisningsmetoder utan uppmärksamheten ligger på lektionernas innehåll (Holmqvist, 2006). Vår studie handlar om begreppet fyrhörningar inom ämnesområdet geometri.

Under våra verksamhetsförlagda perioder har vi ibland upplevt att det som vi haft som mål och intention med undervisningen inte alls stämmer överens med det som eleverna lär sig. Det är här som vi nu kan se och förstå hur vi kan använda oss av learning study för att komma åt detta problem. Genom att tidigt i sin planering av undervisningen bestämma sig för vad som är det lärandeobjekt som ska läras in och samtidigt försöka finna de *kritiska aspekterna* till detta kommer det att underlätta för eleverna att lära sig. De kritiska aspekterna är det som oftast upplevs som svårt. Genom att eleverna kan erfara variationer av lärandeobjektet blir det möjligt för dem att generalisera (Holmqvist, 2006). Denna insikt har gjort att vi blivit mer och mer intresserade av hur eleverna lär och hur vi med hjälp av innehållet i lektioner kan förbättra elevernas möjligheter till lärande.

I läroplanen för det obligatoriska skolväsendet, förskoleklassen och fritidshemmet (Lpo 94) skriver Skolverket att undervisningen skall anpassas till varje elevs individuella behov och förutsättningar. Undervisningen skall också främja elevernas lärande och kunskapsutveckling (Skolverket, 2000).

Vi kommer i denna learning study att undersöka vad vi i vår undervisning erbjuder elever i årskurs 2 att lära sig under ett matematikpass i geometri. Det avgränsande området som vi kommer att behandla är fyrhörningar. Vi har valt att avgränsa vårt lärandeobjekt till vilka skillnader och likheter det finns dem emellan och där försöka hitta de kritiska aspekterna för detta. Val av ämnesområde har gjorts i samspel med berörda lärare. Tillsammans med lärarna kommer vi att identifiera det som är avgörande i lektionen för att utveckla elevernas kunskaper och förståelse för skillnaderna och likheterna mellan fyrhörningarna - kvadrat, rektangel, romb och parallelogram. Vi har valt att arbeta med alla fyra fyrhörningarna trots att det inte nämns i kursmålen att eleverna ska kunna detta i årskurs 2. Anledningen till detta är att det under vår utbildning har betonats att eleverna behöver matematiska utmaningar. Detta är något vi tagit fasta på när vi tillsammans med lärarna planerat ämnesområdet. Alla klasser i vår studie har under årskurs 1 och förskoleklass blivit undervisade i geometri med fokus på figurerna kvadrat, rektangel, cirkel och triangel.

Denna studie har vi planerat, genomfört och skrivit tillsammans. Vi är båda medförfattare till alla delar av studien. Vi har haft stor hjälp och uppmuntran av vår handledare Elisabeth Nygren, Institutionen för matematikämnets och naturvetenskapsämnenas didaktik vid Stockholms universitet.

Syfte och frågeställning

Vi vill undersöka om det intentionella lärandeobjektet är överensstämmande med det iscensatta lärandeobjektet. Studien strävar efter att ta reda på vilken av de tre lektionerna som bäst erbjuder eleverna att urskilja de kritiska aspekterna och ta till sig den kunskap som var avsikten med lektionen. Vidare strävar studien efter att utifrån elevernas tidigare erfarenheter skapa den bästa balansen mellan *variation* och *samtidighet* så att de lär sig förstå skillnaderna och likheterna mellan kvadrat, rektangel, romb och parallelogram. Variation och samtidighet är centrala begrepp inom variationsteorin, dessa centrala begrepp fungerar som en tolkningsram för att studera lärandeprocessen. Genom vår learning study söker vi svar på frågorna:

- Vari ligger de kritiska aspekterna för eleverna att lära sig särskilja fyrhörningarna, kvadrat, rektangel, romb och parallelogram?
- Hur kan undervisningen genomföras för att eleverna ska ha möjlighet att känna igen och korrekt namnge fyrhörningarna?
- Hur kan läraren ge eleverna möjlighet att erfara variation av lärandeobjektet?

Litteraturgenomgång

Förklaring av begrepp

- **Geometri:** område av matematiken i vilket man studerar figurers egenskaper i rummet. Man utgår från en uppsättning geometriska objekt (plan, linjer, klot etc.) samt axiom och definitioner. Det första systematiska arbetet utgavs av Euklides ca 300 f. Kr. Under 1800-talet utvecklades olika former av s.k. icke-euklidisk geometri med djupgående inflytande på matematiken. Geometri är i dag ett självständigt forskningsområde av stor betydelse i modern matematik och naturvetenskap (Nationalencyklopedin, 2009).
- **Fyrhörning:** Geometrisk figur i planet som begränsas av fyra räta linjer (Nationalencyklopedin, 2009).
- **Kvadrat:** En kvadrat är en fyrhörning där vinklarna är räta och sidorna lika långa (Skolöverstyrelsen, 1979).
- **Rektangel:** En rektangel är en fyrhörning där vinklarna är räta. Sidorna är parvis lika långa. Varje kvadrat är en rektangel (Ulin, 1998 & Skolöverstyrelsen, 1979).
- **Parallelogram:** En parallelogram är en fyrhörning med parvis parallella sidor. Varje kvadrat och rektangel är en parallelogram (Skolöverstyrelsen, 1979).
- **Romb:** En romb är en fyrhörning där alla sidor är lika långa. Rombens sidor är parvis parallella och romben är därför en parallelogram. En kvadrats sidor är lika långa och kvadraten således en romb (Skolöverstyrelsen, 1979).

Lärandeobjekt

Holmqvist beskriver lärandeobjektet som de kunskaper och förmågor som eleverna förväntas utveckla genom undervisningen. Ett sätt att se lärande är att erfara saker på ett visst sätt (Martin & Booth, 2000).

Att lära sig erfara olika fenomen, som ur vår synvinkel är den mest grundläggande formen av lärande, innebär att bli förmögen att urskilja vissa enheter eller aspekter, och att ha förmågan att vara samtidigt och fokuserat medveten om dessa enheter eller aspekter (Marton & Booth, 2000, s 161).

Enligt Marton, Runesson och Tsui (2004) är det lärandeobjektet som är i fokus i variationsteorin. För att kunna lära sig något innebär det att man måste erfara något på ett nytt sätt. Lärande innebär enligt detta att det sker en förändring i sättet att erfara något (Runesson, 1999). Marton menar vidare att det är de förmågor som man vill att eleverna skall lära sig som måste vara i fokus när man talar om undervisning.

We firmly believe that teaching and learning cannot be described without reference to what is being taught and learnt. In other words, teaching and learning is always teaching and learning of something. In thinking about teaching and learning, it would be grossly inappropriate to make sweeping statements regarding the effectiveness of particular teaching arrangements (such as whole-class teaching versus individual instructions, group discussions versus seatwork, etc.) (Marton et al 2002, s 3).

Det är viktigt i en learning study att ha en tydlig definition och analys av lärandeobjektet tillsammans med frågor som ”Vad krävs för att lära det vi avser att eleverna ska lära, vad ingår/ingår inte i lärandeobjektet och varför är det betydelsefullt att eleverna utvecklar lärande inom lärandeobjektet?” (Holmqvist, 2006)

Lärandeobjektet kan vara något litet, detaljerat och avgränsat i frågan, men det kan lika gärna vara mer övergripande. Det kan handla om en särskild förmåga eller ett bestämt ämnesinnehåll. Lärandeobjektet kan vara långsiktigt eller kortsiktigt, det kan handla om något som eleverna ska lära sig under endast en lektion eller under flera undervisningstillfällen.

Något som säkert många pedagoger varit med om är att det som denne haft som mål och intention med undervisningen inte alls stämmer överens med det som eleverna lär sig. Det är här som learning study kommer in i bilden. Med hjälp av learning study och variationsteorin bestämmer sig läraren tidigt i sin planering för vilket objekt som ska läras in och vilka de kritiska aspekterna är för att på detta sätt möjliggöra för eleverna att ta till sig den kunskap som varit målet med lektionen. (Holmqvist, 2006)

Genom att eleverna kan erfara variationer blir det möjligt för dem att generalisera. Att erfara variationer kan förklaras som att läraren hjälper eleverna att se lärande objektet ur olika perspektiv. För att exemplifiera variation av de kritiska aspekterna använder vi en stol. För att det ska vara en stol behövs både stolsben, sittytta och ryggstöd. För att eleven ska få en förståelse av vad en stol är innebär det att de måste få möjlighet att se olika typer av olika stolar, med olika stolsben, sittytter och ryggstöd (Holmqvist, 2006).

I boken *Lärande i skolan* (2006) talar Holmqvist om tre typer av lärandeobjekt: det intentionella, det iscensatta och det erfarna lärandeobjektet. Lärandeobjektet kan ses ur tre olika perspektiv - ur lärarens, elevens och sist men inte minst ur forskarens perspektiv. Det intentionella lärandeobjektet är det som läraren har som avsikt att eleverna ska lära sig och möta i undervisningen. Det är här viktigt att alla inom gruppen är överens om vad som ska läras in och vad som eleverna behöver kunna för att förstå de kritiska aspekterna av lärandeobjektet.

...the intended object of learning, an object of the teacher's awareness, that might change dynamically during the course of learning. This is the object of learning as seen from the teacher's perspective, and as such is depicted in this book as being evidenced by what the teacher does and says (Marton, Runesson & Tsu, 2004, s 4).

Det iscensatta objektet är det som sker inne i klassrummet, det som eleverna har möjlighet att lära sig under de speciella förhållanden som råder vid det speciella tillfället. Det iscensatta objektet är intressant för forskaren. Det är det som faktiskt sker som forskare kan iaktta, titta närmare på och analysera genom att lektionen har videofilmats och observerats.

The enacted object of learning is the researcher's description of whether, to what extent and in what forms, the necessary conditions of a particular object of learning appear in a certain setting. The enacted object of learning is described from the point of view of a certain research interest and a particular theoretical perspective (Marton, Runesson & Tsu, 2004, s 5).

Det erfarna lärandeobjektet sett ur elevens perspektiv är det erbjudna objektet som eleven faktiskt kan ta till sig.

What they actually learn is the lived object of learning, the object of learning as seen from the learners point of view, i.e., the outcome or result of learning (Marton, Runesson & Tsu, 2004, s 5).

Med olika test direkt innan och efter lektionen kan man i learning study gruppen få reda på vad eleverna har lärt sig och om de har utvecklats i rätt riktning (Holmqvist, 2006).

Kritiska aspekter

De kritiska aspekterna är de aspekter i lärandeobjektet som är nödvändigt att fokusera på och ge eleverna möjlighet att upptäcka för att förståelse ska bli tydlig i den lärandes medvetande (Wernberg, 2005, Runesson & Marton, 2002). Kritiska aspekter är de kunskaper som oftast krånglar till det och uppfattas svårt av eleverna, samtidigt som det uppfattas svårt för dem är det just detta som är nödvändigt för att eleverna ska kunna förstå och erövra det tänkta lärandeobjektet. Det är lärarens uppgift att finna och lyfta fram det aktuella lärandeobjektets kritiska aspekter för eleverna. I de kritiska aspekterna måste läraren sedan åstadkomma en variation som presenteras för eleverna (Wernberg, 2005). Det är först när eleverna kan urskilja de kritiska aspekterna i lärandeobjektet som de har möjlighet att förstå innehållet och betydelsen av det som ska läras in (Wernberg, 2005).

För att finna de kritiska aspekterna är det viktigt att läraren tar reda på elevernas förkunskaper och därifrån försöker hitta det som är kritiskt just för den specifika gruppen elever som lektionerna skall genomföras i. Läraren kan innan undervisningen planeras och startar ställa sig frågor som: Vad är viktigt för eleverna att uppfatta för att de ska kunna förstå det avsedda objektet? Vad måste eleverna få syn på? Mona Holmqvist tog upp under sin föreläsning sommaren 2009 vid Högskolan i Kristianstad att ”kritiska aspekter är det som man måste urskilja från ett fenomen för att förstå det” (Holmqvist, 2009). Hon tar även upp i sin bok *Lärande i skolan* att just ”lärande innebär, att erfara omvärlden på ett nytt sätt” (Holmqvist, 2006).

Enligt Wernberg finns flera olika sätt att ta reda på elevernas förkunskaper angående lärandeobjektet beroende på vilket ämne eller ämnesområde som berörs. De kritiska aspekterna kan hittas genom ett förkunskapstest som visar elevernas kunskaper angående det aktuella lärandeobjektet. Förkunskapstestet kan också kombineras med intervjuer samt att lärarna tar till sig relevant forskningslitteratur för att få en djupare förståelse. Utan en kartläggning av elevernas förkunskaper blir de kritiska aspekterna av lärandeobjektet annorlunda och mindre relevanta för undervisningen (Wernberg, 2005).

Det är viktigt att eleverna får möjlighet att uppleva variation i undervisningen och då inte variation av olika metoder utan att de får möjlighet att erfara det specifika lärandeobjektets olika dimensioner. Enligt variationsteorin är variation avgörande för allt lärande. Eleverna har inte möjlighet att urskilja något från något annat om de inte får möjlighet att erfara variation av lärandeobjektet. För att veta vad något är måste de få möjlighet att veta vad det inte är. Utifrån detta måste lärarna skapa en variation av aspekter, ett mönster av variation. I en learning study försöker lärarna medvetet skapa olika mönster av variation kring kritiska aspekter, medan bakgrunden är konstant (Holmqvist, 2008).

Runeson (1999) har i sin avhandling tittat närmare på hur olika lärare hanterar samma ämnesinnehåll, hur de olika lärarna låter olika aspekter variera vilket i sin tur påverkar vad eleverna erbjuds att lära sig i matematiken. I studier av Marton och Morris (2002) framkommer ungefär samma sak att vad som varierar i en undervisningssituation har stor betydelse för lärandet.

...it is what the teacher varies and what s/he keeps invariant during the lesson that determines what pupils are likely to learn” (Marton & Morris, 2002, s 60).

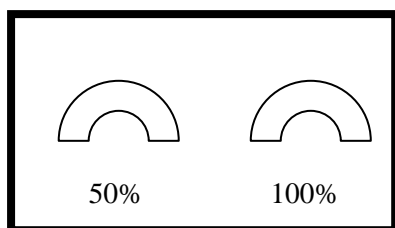
I sammandraget från Martons föreläsning påtalas vikten av att eleverna får möjlighet att se både skillnader och likheter men att det måste vara skillnaderna som hamnar i fokus. Marton gav i föreläsningen ett exempel på hundar och katter. Vi kommer nedan att använda detta exempel fast vi använder oss av fyrhörningar istället (Marton, Hongkong, 2008).

1. Hur skiljer sig olika fyrhörningar åt?
2. Hur skiljer sig fyrhörningar från cirkeln och triangeln?

Runesson (1999) redogör för variationens betydelse för lärande på ungefär samma sätt närmare bestämt för att veta vad något är måste vi veta vad det inte är. Även Marton och Morris (2002) menar att variation är avgörande för lärande. De tar upp ett exempel att man inte kan lära sig färgen blå om det bara finns en färg. Vilket innebär att om man inte kan urskilja något från något annat kan man heller inte erfara det.

...we cannot discern anything without experiencing variation of the object. There would not be any gender if there were only one, no color if there were only one color etc. So we believe that what varies and that is invariant is fundamentally important (Marton & Morris, 2002, s 20).

Holmqvist tar upp ett annat exempel som handlar om procent under sin föreläsning där hon menar att det är viktigt att eleverna förstår att procent (%) innebär en del av och att man presenterar det för eleverna så de kan få syn på det.



Figur1. Bilden illustrerar procent antingen som en del av en helhet eller som en helhet. (Figuren är hämtat från Holmqvists föreläsning, sommaren 2009, Högskolan Kristianstad)

I en learning study vill man så långt som möjligt alltid försöka skapa variation av mönster på de kritiska aspekterna och samtidigt vill man ha en aspekt likadan hela tiden, bakgrunden ska vara konstant. För att illustrera detta tar vi ett exempel med en pinne. För att veta vad en lång pinne är, är det viktigt att eleverna samtidigt får möjlighet att se en kort pinne för att kunna förstå lång i det sammanhanget. Det är viktigt att eleverna får möjlighet att se både skillnader och likheter men det är skillnaderna som ska vara i fokus.

De kritiska aspekterna för fyrhörningarna är att eleverna skall lära sig benämna fyrhörningarna med dess korrekta matematiskt språk. Vygotskij beskriver det som att gå från ett vardagligt begrepp till exempel fyrkant till de vetenskapliga begreppen, fyrhörning, kvadrat, rektangel, romb och parallelogram (Vygotskij, 1934/1999). Vidare måste eleverna se likheten och skillnaden mellan kvadrat och rektangel, där kvadraten likt rektangeln består av fyra räta vinklar som är parvis parallella men för att kalla den kvadrat krävs det även att sidorna är lika långa. På samma sätt måste eleverna erfara skillnaderna och likheterna mellan romb och parallelogram samt hur de förhåller sig till kvadrat och rektangeln. Detta exemplifieras genom följande; eleverna kan inte lära sig att se skillnad, namnge och beskriva olika fyrhörningar om de endast får se en variant av fyrhörning. För

att finna de kritiska aspekterna i lärandeobjektet kan man ställa sig följande frågor ”Vad innebär det att kunna eller förstå lärandeobjektet? Vad tar vi för givet?” (Wernberg, 2005, s.54) Lärarnas och elevernas tänkande möts i lärandeobjektet och läraren har då möjlighet att rikta elevernas medvetande mot vissa aspekter i lärandeobjektet (Runesson, 1999).

De kritiska aspekterna av lärandeobjektet kan inte generaliseras från elevgrupp till elevgrupp, utan varje grupp behöver få sina förkunskaper kartlagda. Det kan finnas en del kritiska aspekter som kan vara generella och det gäller då vad som krävs för att förstå lärandeobjektet. Eftersom varje elevgrupp är unik är också de kritiska aspekterna av lärandeobjektet olika för varje grupp av elever. När en elev har utvecklat en förståelse för en kritisk aspekt av lärandeobjektet är denna aspekt inte längre kritisk för eleven. Samtidigt kan aspekten fortfarande vara kritisk för en annan elev i gruppen (Gustavsson, 2006).

Variationsteorins ursprung från fenomenografin

Variationsteorin har sitt ursprung och sina rötter i fenomenografin vilken är främst utformad av Ference Marton. Den är under utveckling och handlar till stor del om lärande. Fenomenografin kan förklaras som att den uppmärksammar frågor som handlar om lärande och förståelse i en pedagogisk miljö (Marton & Booth, 1997, 2000). Fenomenografin kan även ses som en forskning om lärande (Marton & Booth, 2000) som under snart trettio år har utvecklat begrepp som gör det möjligt att analysera och beskriva lärande. Den beskriver också människors kvalitativt olika sätt att erfara fenomen i sin omgivning medan variationsteorin vill utveckla lärandet. Wernberg, beskriver variationsteorin som en teoretisering av fenomenografin (Wennberg, 2005).

Fenomenografin har från början inriktat sig på studier av människans uppfattningar om skilda aspekter av omvärlden. En ny fas för fenomenografin har kommit till stånd nu när det sker en utveckling av den tidigare forskningsteoretiska sidan. Forskningen har nu inriktat sig på hur variationen i sättet att uppfatta kan användas i undervisningssammanhang (Runesson, 1999). Variationsteorins tre hörnpelare är urskiljning, samtidigt och variation. Dessa centrala begrepp fungerar som en tolkningsram för att studera lärandeprocessen (Runesson, 1999, 2005). Begreppen förklaras mer ingående under rubriken Lektion 1 – planering. I en learning study använder man variationsteorin som en grund för planeringen och analysen av undervisning. Det är ingen teori som utgår ifrån en metod utan den är mer en hjälp när man vill hantera frågor om hur man kan uppleva verkligheten.

Lärande sett utifrån variationsteorin och ett sociokulturellt perspektiv

Variationsteorin bygger på att det är viktigt att skapa möjligheter för eleverna att urskilja variationer i lärandeobjektet (Holmqvist, 2006). Variationen innebär att eleverna ska få möjlighet att uppmärksamma det som varierar inom ett fenomen och hur fenomenet uppenbarar sig i olika situationer. Variationen handlar även om att upptäcka vad ett fenomen inte är. Det som utmärker ett fenomen kan synliggöras genom att man uppmärksammar det som skiljer sig från fenomenet. Man kan därför betrakta förmågan att uppfatta likheter och skillnader som en förutsättning för att lära (Runesson & Marton, 2002).

I en undervisningssituation handlar det om att ta elevens perspektiv och utmana dennes tänkande genom att lyfta fram aspekter av fenomenet som eleven inte varit medveten om tidigare. Fokus ska ligga på innehållet och inte på metoderna och det är viktigt att ge eleverna förutsättningar att ändra sitt perspektiv och se fenomen i sin omgivning på ett nytt sätt – det är det som är lärande!

Genom att använda sig av Vygotskijs sociokulturella perspektiv kan det blir lättare att förstå vad variationsteorin bygger på anser Ivar Bråten i sin bok *Vygotskij och pedagogiken* (1996). Vygotskijs teori bygger på en kombination av pedagogik och psykologi som ger en djupare förståelse för hur hjärnan fungerar vilket gör det möjligt att beskriva hur man på bästa möjliga sätt skapar förutsättningar för elever att utveckla sin mänskliga kompetens, med språket som verktyg.

Inom ett sociokulturellt perspektiv framhåller man vikten av att tillägnandet av kunskaper sker i samspel med omgivningen. Vygotskij menar att barnet lär sig lösa problem i samspel och kommunikation med andra mer kunniga människor. ”Med andra ord är det så att det som barnet idag kan göra i samarbete kommer det imorgon att kunna göra självständigt” (Vygotskij, 1934/1999, s.333). Citatet betonar den sociala och kulturella omgivningens viktiga roll för barnets utveckling. Enligt Vygotskij skall undervisningen ske innanför barnets närmaste utvecklingszon det vill säga det finns en lägsta och högsta nivå där undervisningen bör befinna sig för att vara givande. ”Att lära barnet något som det inte är i stånd att lära sig är lika fruktlöst som att lära det något som det redan kan göra på egen hand” (Vygotskij, 1934/1999, s.338).

Ur ett sociokulturellt perspektiv ses lärandet som en av alla människans handlingar, en inordnad del av sociala praktiker. Att konstruera mening av det man lär sig är förvisso en individuell process samtidigt som människan i grunden är beroende av socialt samspel (Sälgö, 2005). Det kan beskrivas som generell kunskap som så småningom blir till enskild förståelse (Vygotskij, 1980).

Vygotskij menar att leken är den naturliga vägen för barn att lära. Varje handling föregås av motivation. Det är därför viktigt att undervisningen är lustfylld för att nå barnens egen kreativitet, vilket är nödvändigt för att kunna motivera dem (Bråten, 1996).

Studier om geometri

Malmer hävdar att undervisningen i geometri borde få större utrymme i skolan idag än vad som vanligen är fallet (Malmer, 2002). Det är ett stort område som skall behandlas.

Enligt kursplanen i matematik ska matematikundervisningen ge eleverna möjlighet att kommunicera matematik i meningsfulla och relevanta situationer. För att klara detta behövs bland annat ett språk i vilket man behärskar och förstår innebörden i de ord och begrepp som används (Ahlström, 1996, s 166).

Runt omkring oss finns det geometriska objekt som barn tidigt uppfattar. I skolan är det viktigt att hjälpa eleverna att sortera sina iakttagelser och erfarenheter. De behöver även hjälp med att tillägna sig nödvändiga språkliga uttryck för det de gör och ser (Malmer, 2002). Enligt Vygotskij är det viktigt att hjälpa eleverna att utveckla ett vetenskapligt språk. Med det menas att eleverna skall gå från sitt vardagliga språk till ett korrekt matematiskt språk (Vygotskij, 1934/1999). Enligt Svingby (1986) handlar det om två sätt att förstå omvärlden, dels ett personligt sätt och dels ett generellt och gemensamt sätt att betrakta omvärlden.

För att sammanfatta skulle man kunna säga att de vetenskapliga begreppen, som skapas i en inlärningsprocess i skolan, skiljer sig från de spontana genom att de står i annan relation till barnets erfarenhet, genom att barnet har en annan relation till objektet än vad det har till de spontana begreppens objekt och genom att dessa begrepp följer andra vägar ända från sin uppkomst och fram till sin fullbordan (Vygotskij, 1934/1999, s 271).

Barn använder sig ofta av ordet fyrkant vilket är deras vardagsspråk men ett vetenskapligt korrekt språk skulle då vara fyrhörning, kvadrat, rektangel, romb eller parallelogram.

För att ytterligare understryka vikten av undervisning i geometri följer här ett citat från boken *Matematik – ett kommunikationsämne*.

Barn som utvecklar en god grundläggande rumsuppfattning och behärskar språkliga och geometriska begrepp, är bättre rustade att få en god taluppfattning, att förstå måttsystemets idé och för att utveckla mer avancerade begrepp inom matematiken (Ahlström, 1996, s 166).

Hedréen har skrivit en artikel om det holländska paret van Hiele i boken *Geometri och statistik* (1992). Paret van Hiele har forskat om barns tänkande i geometri. De urskiljer fem olika nivåer som barn passerar i tur och ordning. Nedan kommer vi att beskriva de tre första nivåerna utifrån van Hieles forskning, igenkänning, analys och abstraktion. Vi har valt att fokusera på de tre första nivåerna utifrån att elever i vår valda målgrupp inte når de sista nivåerna. Ifall en elev kan gå ifrån en nivå till en annan beror enligt forskarna inte på elevens ålder utan undervisningens innehåll. Nivå ett, igenkänning, når eleven när denne känner igen en figur i sin helhet utan att tänka på figurens olika delar. Nästa nivå, analys är när eleven kan avbilda figuren, t.ex. rita figuren, klippa till i papper. När eleverna kan tänka abstrakt har de nått den tredje nivån, vilket innebär att de bland annat kan ordna figurerna på ett logiskt sätt (Hedréen, 1992). Att kunna ordna figurerna på ett logiskt sätt kan innebära att eleverna kan förklara hur de tänkt när de sorterat figurerna genom att de kan beskriva och förklara med egna ord vilka egenskaper figurerna har gemensamt. Till exempel att romben och kvadraten hör ihop för att de har fyra lika långa sidor och rektangeln och parallelogram för att de har parvis lika långa sidor. Oftast kommer barn på lågstadiet endast upp till nivå 2 men som forskarna van Heiele skriver är det inte åldern utan inlärningsprocessen som är

avgörande. Ett citat av Siegler hämtat från Malmers bok *Bra matematik för alla* (2002) stärker detta resonemang att det inte beror på elevernas ålder utan mer om undervisningen, om eleverna har chans att lära sig eller inte. ”Det är stor skillnad mellan det barn behärskar och det de kan lära sig” (Malmer, 2002, s 184).

När det gäller undervisningen i skolan måste all planering förankras i styrdokumentet. De strävansmål som ligger till grund för vårt valda lärandeobjekt handlar om att eleverna ska utveckla intresse för matematik och att de ska kunna använda sina kunskaper i olika situationer. För att kunna kommunicera och förstå andra är det viktigt att eleverna utvecklar förståelse för innebörden av geometriska och matematiska begrepp. I kursplanen i matematik står det att skolan i sin undervisning skall sträva efter att eleven:

- utvecklar intresse för matematik samt tilltro till det egna tänkandet och egna förmågan att lära sig matematik och att använda matematik i olika situationer,
 - grundläggande geometriska begrepp, egenskaper, relationer och satser.
 - inser värdet av och använder matematikens uttrycksformer,
- (Skolverket, 2000)

De mål som eleverna ska ha uppnått i slutet av det tredje skolåret beträffande geometri är att

- kunna beskriva, jämföra och namnge vanliga två- och tredimensionella geometriska objekt,
 - kunna rita och avbilda enkla tvådimensionella figurer samt utifrån instruktion bygga enkla tredimensionella figurer, och
 - kunna fortsätta och konstruera enkla geometriska mönster,
- (Skolverket, 2000)

Mål som eleverna skall ha uppnått i slutet av det femte skolåret beträffande geometri är att:

- ha en grundläggande rumsuppfattning och kunna känna igen och beskriva några viktiga egenskaper hos geometriska figurer och mönster,
- (Skolverket, 2000)

Metod

Forskningsmetod

I denna studie har vi valt att genomföra en learning study som forskningsmetod med fokus på de kritiska aspekterna som eleverna måste kunna för att särskilja fyrhörningarna åt samt hur undervisningen kan genomföras för att ge eleverna möjlighet att erfara variation av lärandeobjektet. Det som är centralt i vår studie är hur läraren erbjuder eleverna att erfara lärandeobjektets kritiska aspekter. De kritiska aspekter vi har funnit för vår learning study är fyrhörningarnas korrekta matematiska termer och deras relation till varandra när det gäller vinklar och sidor. Utifrån detta har vi valt att videofilma lektionerna och då främst lärarens handlingar i sättet att förmedla innehållet till eleverna. Detta sätt att observera kallas även för videografi. En videografisk analys kan beskrivas som en kvalitativ metod, där handlingar kan analyseras och kritiskt granskas vid flera tillfällen (Björklund, 2008). Genom videofilmning synliggörs lärarens sätt att förmedla lärandeobjektet på ett tydligare sätt än om vi enbart observerat lektionen.

Presentation av designexperiment och lesson study

Learning study kan betraktas som en blandning mellan designexperiment och lesson study. Gemensamt för de tre forskningsmetoderna är att de används för att utveckla den pedagogiska verksamheten direkt i klassrummet. Här följer först en övergripande presentation av designexperiment hämtad och tolkad från Holmqvist bok *Lärande i skolan* (2006). Vidare kommer en kort beskrivning av lesson study tolkad från flera olika källor.

Designexperiment framställdes för att genomföra forskning på skolan. Man startar från teoretiska principer från tidigare forskning för att utveckla designen på undervisningen som man ständigt prövar och utvärderar. Metoden har sitt ursprung i laboratoriestudier, där forskningen utfördes i kontrollerbara miljöer, till skillnad från designexperiment som genomförs i komplexa undervisningssituationer, där det finns många faktorer som inte går att kontrollera. De stökiga klassrumsmiljöerna och de höga kraven på deltagarna vars arbeten måste koordineras är några av de orsaker som leder till att slutresultaten i designexperiment blir mindre pålitliga än laboratoriestudier.

Lesson study är en modell som är vanlig i Japan och innebär att lärare träffas och arbetar med att utveckla undervisningen (Holmqvist, 2006). Den framhålls av Stigler och Hiebert i boken *The Teaching Gap* (1999) som en av de kraftigaste framgångsfaktorerna för de japanska elevernas höga resultat jämfört med elever från andra länder. Lesson study ger lärarna en kontinuerlig professionell utveckling direkt i klassrummet (Stigler, 1999). I en lesson study utformar flera lärare tillsammans pedagogiska mål och lektioner kring fenomen som eleverna har svårigheter att förstå. Genom detta sätt att arbeta drar lärarna nytta av varandras kunskaper och erfarenheter från tidigare undervisning. Lektionerna planeras detaljerat med fokus på innehållet. En lärare genomför sedan forskningslektionen medan de andra observerar. Efter det analyseras lektionen och revideras. En

annan lärare genomför den omarbetade lektionen i en annan grupp som de övriga observerar och sedan gemensamt utvärderar. Till sist dokumenteras lektionen så att andra lärare i övriga skolor kan ta del av resultatet (Holmqvist, 2006).

Enligt Holmqvist (2006) består en lesson study oftast av åtta steg, här följer en kort beskrivning av dessa:

- Steg 1. Definiera problemet
- Steg 2. Planera först lektionen
- Steg 3. Genomförandet av lektionen
- Steg 4. Utvärdera och analysera lektionen
- Steg 5. Revidera lektionen
- Steg 6. Genomföra den omarbetade versionen
- Steg 7. Utvärdera och analysera igen
- Steg 8. Dokumentera och dela med sig av resultatet
(Holmqvist, 2006)

Learning study

I learning study utgår man från en inlärningsteori, variationsteorin. Learning study är en praxisnära forskningsmetod som bedrivs av lärare med stöd av forskare. Den har mål som ger kunskaper på flera plan. Bland annat att lärare och forskare tillsammans arbetar fram pedagogiska mål kring ett praktiskt problem och därifrån designar lektioner som ska komma både elever, lärare och forskare tillgodo (Marton, 2003). Eleverna får en bättre planerad undervisning som ökar deras möjligheter att ta till sig kunskap. Läraren får verktyg att planera innehållet i undervisningen utifrån elevernas förkunskaper och forskare får tillfälle att studera undervisning direkt i klassrummet.

Tillvägagångssättet i en learning study börjar med att en grupp lärare inom ett specifikt kunskapsområde samlas för att läsa litteratur och diskutera tidigare erfarenheter från sin egen undervisning. Gemensamt väljer de vilken förmåga eller förståelse som de vill att eleverna ska utveckla. För att ta reda på vilka förkunskaper eleverna har genomförs ett förtest. Efter förtestet startar själva planeringen av lektionen där man tar hänsyn till resultaten och ser vilka som var de kritiska aspekterna för eleverna. Lektionen genomförs av en lärare och de övriga observerar och videofilmar. Efter den första lektionen samlas man igen för att kritisk granska och analysera lektionen för att se om det är något som skulle kunna förändras för att ge eleverna möjlighet att ta till sig det valda lärande objektet. Samma lärare eller någon annan pedagog i gruppen genomför sedan den reviderade lektionen i en ny grupp, samma procedur upprepas 3 gånger men det kan även handla om fler gånger fram till dess att gruppen är nöjd med resultatet. Någon dag efter varje lektion genomförs ett eftertest, för att följa elevernas kunskapsutveckling. Genom att lärarna undervisar om samma sak kan de i efterhand jämföra vilken av lektionerna som på eftertestet visat det bästa resultatet. Sista steget innebär att gruppen dokumenterar lektionerna samt att syfte och mål med studien beskrivs och att det erhållna resultatet gruppen kommit fram till, distribueras till andra lärare och forskare.

Nedan följer en kort summering av varje steg i en learning study. Stegen är tolkade och hämtade från Marton, 2003 och Gustavsson & Wernberg, 2006.

- **Elevernas förkunskaper**
Med hjälp av ett förtest eller intervjuer kartläggs elevernas förkunskaper inom det valda lärandeobjektet.
- **Avgränsat lärandeobjekt**
Med hjälp av resultatet från förtestet alternativt intervjun samt studier i ämnesdidaktik och diskussioner om gruppens tidigare erfarenheter att undervisa i det valda lärandeobjektet sker sedan en avgränsning inom området utifrån de kritiska aspekter man funnit.
- **Planering av den första lektionen**
Lärarna tillsammans med forskaren planerar lektion i detalj. Planering av lektionen utgår vanligen från variationsteorin, som betonar vikten av att eleverna erbjuds möjlighet att erfara en variation av de kritiska aspekterna i lärande objektet.
- **Genomförande av lektionen**
En av lärarna genomför den planerade lektionen. Läraren håller sig inom ramen för de aspekter som man enats om att eleverna ska erbjudas. Lektionen videofilmas och observeras av de övriga i gruppen. Därefter sker en ny kartläggning av eleverna.
- **Analys av den första lektionen**
Lektionen analyseras med hjälp av eftertesten och videodokumentationen. Resultatet av analysen ligger till grund för nästa lektionsplanering.
- **Genomförande av den andra lektionen**
Lektionen genomförs i en ny elevgrupp och följer därefter samma mönster som den första lektionen.
- **Analys av den andra lektionen**
Lektionen analyseras och revideras på samma sätt som lektionen innan.
- **Genomförande av den tredje lektionen**
Även denna lektion genomförs i en ny elevgrupp men följer exakt samma ordning som den första och andra lektionen.
- **Analys av den tredje lektionen**
Lektionen analyseras och revideras på samma sätt som lektionen innan. Vi detta tillfälle studeras även de två andra lektionerna tillsammans med den tredje för att finna det som varit avgörande för elevens lärande av lärande objektet.
- **Eventuellt nytt test efter en längre tid**
Ibland genomförs ett nytt test för att upptäcka om eleverna befast sina kunskaper och har kvar förståelsen efter en längre tid.
- **Sammanfattning och dokumentation**
Gruppen dokumenterar resultaten av studien och delar med sig till andra lärare och forskare.

Learning study om kvadrat, rektangel, romb och parallelogram

Vår studie utgår från variationsteorins tre hörnplare *urskiljning*, *samtidighet* och *variation*. Vid introduktionen av nya kunskaper är det viktigt att läraren presenterar nya uppgifter på ett sätt som erbjuder de lärande att urskilja *lärandeobjektets kritiska aspekter*. Enligt Marton anser läraren att det som denne presenterar som bakgrund är sedan klassens delade kunskap (Marton, Runesson & Tsui, 2004). Det är viktigt att läraren är medveten om att beroende på elevers tidigare erfarenheter kommer de att urskilja olika aspekter av det som ska läras ut. Utifrån detta har vi i vår planering av lektionerna utgått ifrån att eleverna har olika förförståelse till vårt valda lärande objekt, vilket vi även har fått kunskap om när vi analyserat elevernas förtest.

Det är viktigt i en learning study att ha en tydlig definition och analys av lärandeobjektet tillsammans med frågor som *"Vad krävs för att lära det vi avser att eleverna ska lära, vad ingår/ingår inte i lärandeobjektet och varför är det betydelsefullt att eleverna utvecklar lärande inom lärandeobjektet?"* (Holmqvist, 2006, s.23). Utifrån ovanstående frågor har vi kommit fram till att det vi vill att eleverna ska lära sig om fyrhörningarna är att de ska kunna känna igen dem, namnge de korrekta matematiska termerna samt att kunna särskilja fyrhörningarna åt.

Varför är det då viktigt att eleverna lär sig detta? Vi har under vår lärarutbildning vid flera tillfällen läst om att elever behöver geometriska utmaningar och att de måste kännas meningsfulla och relevanta för eleverna.

Matematisk kompetens är också att kunna känna igen olika former och figurer i olika sammanhang, använda dem efter behov, beskriva och skapa dem, veta hur de är sammansatta, hur de kan byggas upp och delas upp (Heiberg, 2004, s 120).

Det är även viktigt för eleverna att lära sig om vårt valda lärandeobjekt sett utifrån våra kursplaner i matematik där det bland annat står att

...mål som eleverna skall ha uppnått i slutet av det femte skolåret beträffande rumsuppfattning och geometri är att: ha en grundläggande rumsuppfattning och kunna känna igen och beskriva några viktiga egenskaper hos geometriska figurer och mönster (Skolverket, 2000).

Lärandeobjektet kan ses ur tre olika perspektiv - ur lärarens, elevens och sist men inte minst ur forskarens perspektiv. I denna studie har vi valt att inta lärarens perspektiv då vi är intresserade av att få reda på var de kritiska aspekterna ligger för att eleverna ska kunna särskilja fyrhörningarna åt och kunna namnge dem korrekt. Sett ur lärarens perspektiv blir utmaningen utifrån detta att finna hur undervisningen skall genomföras för att eleverna ska ha möjlighet att förstå och uppnå dessa kunskaper. Som vi tidigare nämnt är det hur läraren får eleverna att se lärandeobjektet ur olika perspektiv, det vill säga hur eleverna får möjlighet att erfara variation av lärandeobjektet.

Urval

Vi genomförde vår studie på våra Vfu skolor, det vill säga de skolor där vi har gjort vår verksamhetsförlagda del av utbildningen. Skolorna ingår i samma enhet och har under detta läsår fokuserat på att utveckla matematikundervisning. Deras upptagningsområde är i huvudsak från medelklass till övre medelklassfamiljer som bor i villaområdena runt skolorna samt närliggande bostadsrätts- och hyreslägenheter. Intresset för vår studie i learning study har varit stort på båda skolorna och det var därför lätt för oss att få tillgång till klassrumsundervisningen. Det är tre lärare som är involverade i vårt arbete i den här studien. Lärarna har tillsammans med oss bestämt vilket kunskapsområde inom matematikämnet som studien skulle handla om. Lektionsplaneringen, genomförandet av förtest, lektioner och eftertest har vi gjort själva. Lärarnas huvudsakliga uppgift i denna studie har varit att dela med sig av sin undervisningstid och varit länken mellan oss och elevernas föräldrar. Vi har genomfört learning studien i tre relativt kunskapshomogena elevgrupper. I de valda grupperna gick det totalt 67 elever. Vi har i studien kallat grupperna för 1, 2 och 3. I grupp 1 var det 28 elever, grupp 2 hade 18 elever och den sista gruppen, nämnd som grupp 3 hade 21 elever.

Tillförlitlighet

I denna studie har vi valt att videoinspela alla lektioner för att analysera undervisningstillfällena. Videofilmningen av lektionerna har gett oss en rikare bild än vad enbart en mänsklig observation eller ljudupptagning skulle ha kunnat ge. Genom filmerna har vi kunnat analysera lektionerna flera gånger för att på det sätt öka tillförlitligheten. För att ytterligare stärka vår tillförlitlighet har vi använt oss av olika typer av skriftlig data. Vi har haft tillgång till resultaten av förtestet och eftertestet (se bilaga 1) för att kunna analysera lektionerna och elevernas möjlighet till att kunna urskilja likheterna och skillnaderna fyrhörningarna emellan. Eftertestet är detsamma som förtestet. Detta gjorde vi medvetet för att lättare kunna se vad eleverna lärt sig under lektionen.

Förtestet gjordes en vecka innan själva lektionen och eftertestet gjordes samma dag eller någon dag efter lektionen. Mellan förtest och lektion har läraren i klassen inte undervisat eller diskuterat med eleverna om något i vårt valda lärandeobjekt. Det är vi som har genomfört både lektion, förtest och eftertest detta för att vi i så stor utsträckning ville undvika att lärarna kunnat påverka testresultatet i sin klass. Vi har även själva genomfört analysen av testerna och videoinspelningen. För att vi ska ha räknat med elevernas resultat i vår analys och diskussion har vi krävt att de ska ha deltagit vid alla tre momenten, dvs. de har gjort förtest, deltagit i undervisningen samt gjort eftertestet. Vi kan inte dra några allmängiltiga slutsatser som gäller för alla elever i årskurs 2. Resultaten skulle säkert ha blivit annorlunda om studien genomfördes i en annan elevgrupp. Att vi fått det här resultatet beror till stor del på elevernas förkunskaper just i dessa klasser.

Försökspersoner

De tre deltagande lärarna har själva valt att delta och hjälpa oss med denna studie. De tillhör samma skolenhet men arbetar på två olika skolor. Alla tre lärare undervisar i årskurs 2. De 49 elever som ingår i studien är de elever som går i de klasser vi valt att genomföra studien i. Alla elever har haft möjlighet att välja om de vill delta i studien eller ej, dels genom att vi pratat med dem direkt vid första tillfället där vi redogjorde varför vi var där och hur upplägget av våra 3 tillfällen skulle se ut, dels att deras föräldrar fått skriftlig information hem där de ombetts att svara ja eller nej om deras barn får delta i studien.

Etik

I Vetenskapsrådets *Forskningsetiska principer* står det skrivet att en förutsättning för en etisk hantering av försökspersoner i forskningsstudier är att studien följer de fyra huvudkrav som tagits fram: informationskravet, samtyckekravet, konfidentialitetskravet och nyttjandekravet.

1. Forskaren skall informera de av forskningen berörda om den aktuella forskningsuppgiftens syfte.
2. Deltagare i en undersökning har rätt att själv bestämma över sin medverkan.
3. Uppgifter om alla i en undersökning ingående personer skall ges största möjliga konfidentialitet och personuppgifterna skall förvaras på ett sådant sätt att obehöriga inte kan ta del av dem.
4. Uppgifterna insamlade om enskilda personer få endast användas för forskningsändamål.

(Vetenskapsrådet, 2002, s 6 ff)

I denna studie har vi följt ovanstående regler från Vetenskapsrådet. De elever som deltagit i undervisningen som videofilmats har innan studiens påbörjande fått skriftlig information om denna learning study och elevernas målsman har behövt ge skriftligt tillstånd att deras barn får medverka då de är minderåriga (se bilaga 1). I den skriftliga informationen till elevernas målsmän skrev vi att det gällde ett examensarbete och att vi skulle besöka varje grupp 3 gånger. Vi förtydligade att vi vid andra tillfället skulle videofilma lektionen och att dessa filmer efter studiens slut skulle komma att raderas.

Bortfall

Elevantalet var från början 67 elever i denna studie men vi har haft en hel del bortfall. I vårt resultat har vi redovisat resultat utifrån 49 elever. De bortfall vi har haft i studien är elever som inte har genomfört alla 3 moment i vår learning study, förtest, lektion och eftertest. Det har också varit en del bortfall på grund av att vi inte har fått in påskrivna medgivande från föräldrarna som vi har haft som krav för studien för att säkerställa att vi följt Vetenskapsrådets *Forskningsetiska principer* då eleverna är minderåriga. De elever som inte lämnat in skriftligt medgivande från föräldrarna har deltagit i lektionerna men deras resultat har inte räknats in i studien.

I grupp 1 var det till slut 15 elever med i studien. Det var ett totalt bortfall på 13 elever. Det var sju elever som inte lämnat in skriftligt medgivande från föräldrarna. Det var två elever som inte var med på förtestet, fyra elever som var sjuka vid tillfället då vi gjorde eftertestet.

I grupp 2 var alla 18 elever med på alla moment samt att medgivande från samtliga föräldrar lämnats in i tid.

I grupp 3 var det 16 elever som deltog under alla moment i studien. Det var tre elever som inte var med på förtestet, en elev som missade lektionen och eftertestet samt en elev som föll ur studien på grund av att vi inte fick in något medgivande från föräldrarna.

Resultat

Resultatredovisning

Först följer en övergripande bild av hur lektionerna är planerade och genomförda därefter redovisas vilka förkunskaper elevgrupperna hade vid förtestet (se bilaga 2). Vi redovisar först det sammanslagna resultatet från alla tre grupper, därefter redogör vi gruppvis, detta för att kunna jämföra resultaten med eftertesten (se bilaga 2) och de genomförda lektionerna. Därefter redogör vi för hur vi planerat och genomfört den första lektionen med grupp 1 följt av eftertestets resultat. Redovisningen för grupp 2 och grupp 3 följer samma mönster. Slutligen redovisar vi vilken av lektionerna som gav eleverna de bästa möjligheterna att hitta de kritiska aspekterna för att kunna särskilja fyrhörningarna åt samt känna igen och namnge dem med korrekt matematiskt språk.

Nedan presenteras en sammanfattning av hur lektionerna är planerade och genomförda.

Lektion 1	Lektion 2	Lektion 3
Uppgiften diskuteras i grupp. Läraren låter eleverna lära av varandra, genom att de får berätta hur de tänkt och resonerat kring objektet. Läraren gör eleverna uppmärksammade på hur eleverna svarat och fyller i det som är kritiskt som saknas. Nya objekt presenteras och ny gruppdiskussion uppstår. Övning - fyrhörningsormen	Uppgiften diskuteras i grupp. Läraren låter eleverna lära av varandra, genom att de får berätta hur de tänkt och resonerat kring objektet. Läraren gör eleverna uppmärksammade på hur eleverna svarat och fyller i det som är kritiskt som saknas. Nya objekt presenteras och ny gruppdiskussion uppstår. Eleverna uppmärksammas på cirkeln och triangeln för att därigenom lättare kunna se vad som skiljer fyrhörningar från andra figurer Övning – geometriormen	Uppgiften diskuteras i grupp. Läraren låter eleverna lära av varandra, genom att de får berätta hur de tänkt och resonerat kring objektet. Läraren gör eleverna uppmärksammade på hur eleverna svarat och fyller i det som är kritiskt som saknas. Nya objekt presenteras och ny gruppdiskussion uppstår. Eleverna uppmärksammas på cirkeln och triangeln för att därigenom lättare kunna se vad som skiljer fyrhörningar från andra figurer Eleverna får även se lärandeobjektet, fyrhörningar i olika storlekar för att se att storleken inte har betydelse för figuren. Övning – geometriormen För att låta eleverna använda fler sinnen för att uppleva variation får de även en till uppgift som går ut på att de ska rita efter instruktioner från sin kamrat

Figur 2. Bilden illustrerar en sammanfattning av de 3 lektioner som ingick i studien.

Läraren i ovanstående lektioner är en av oss två som genomfört denna studie.

Förtest – kartläggning av elevernas förkunskaper

Vi genomförde förtesten i de tre olika elevgrupperna under vecka 43. Utifrån resultaten från förtesten planerade vi lektion 1. Nedan redovisas elevernas förkunskaper i fyra olika diagram. Det första diagrammet visar alla tre gruppernas sammanslagna resultat och därefter presenteras varje grupp för sig. Utifrån resultaten har vi funnit att de kritiska aspekterna i vårt valda lärande objekt, fyrhörningar är de korrekta matematiska termerna och fyrhörningarnas relation till varandra när det gäller vinklar och sidor, då i synnerhet vad som särskiljer romb och parallelogram från kvadrat och rektangeln. Den första frågan i förtestet (se bilaga 2) klarade nästan alla i elevgrupperna. Här skulle eleverna färglägga alla fyrhörningar. Det fanns olika geometriska figurer på sidan, alla våra fyra fyrhörningar fanns representerade. Vid analysen av testet konstaterades att det var ingen av eleverna som färglagt någon annan form än fyrhörningar, däremot så var det några få som missat någon fyrhörning och ett par som enbart färglagt kvadrater. När det gäller nästa del i förtestet där eleverna skulle ange antal hörn och rita figurerna i fråga samt ange de korrekta matematiska termerna var det 39 % av eleverna som blandade ihop triangel och rektangel. Däremot kunde alla rita formerna korrekt. När det gällde fråga 11 till 14 hade eleverna lätt för att namnge, beskriva och rita kvadraten men blandade åter ihop rektangeln med triangeln. Fråga 15 - 16 där vi visade eleverna en romb och parallelogram var det två elever som kunde namnge romben medan ingen av dem hade ett korrekt matematiskt språk när det gäller parallelogram. Vi fick många olika förslag på namn för dessa former, de flesta angav kvadrat och rektangel medan andra såg att de särskilde sig från kvadraten och rektangeln och blev namngivna med barnens egna språk det som Vygotskij kallar vardagliga begrepp och som uppkommer spontant (Vygotskij, 2934/1999). Några exempel på dessa spontana uttryck var snedkant, snedhörning, kanakant, cyberkant och långromb. Utifrån resultaten kan vi konstatera att grupp 1 hade 74 % rätta svar, grupp 2 hade 71 % och grupp 3 hade 79 % rätta svar. Utifrån resultatet konstaterar vi att grupp 3 var den grupp som startade lektionen med mest förkunskaper i det valda ämnet. Men av resultatet går det även att utläsa att det är små skillnader grupperna emellan.

Diagrammet nedan visar det sammanslagna resultatet på förtestet för samtliga elevgrupper.

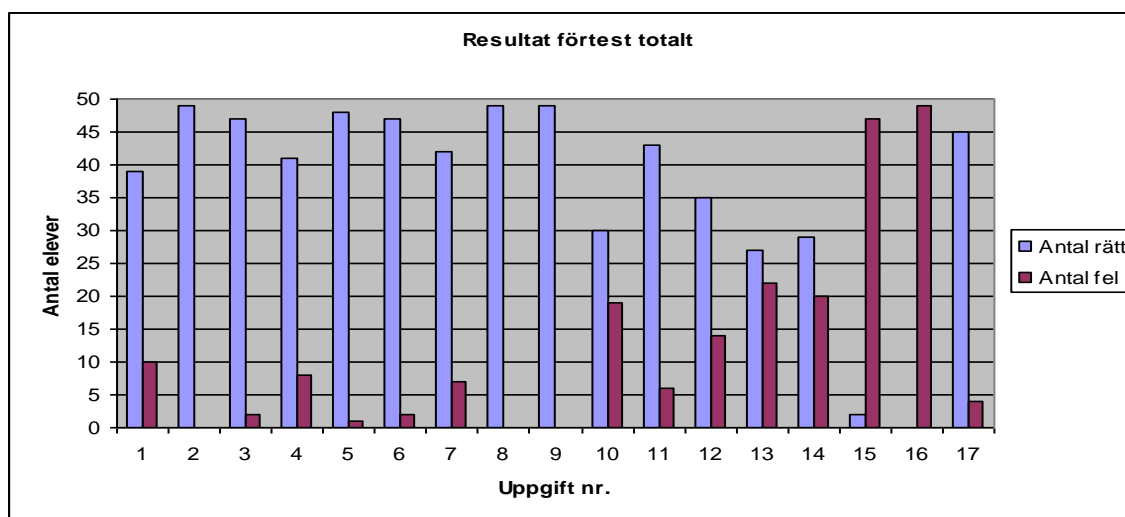


Diagram 1: Resultat från förtestet – alla 3 grupper.

De tre följande diagrammen visar resultaten som varje elevgrupp hade på förtestet. Första diagrammet visar grupp 1, det andra grupp 2 och det sista diagrammet visar resultatet från grupp 3.

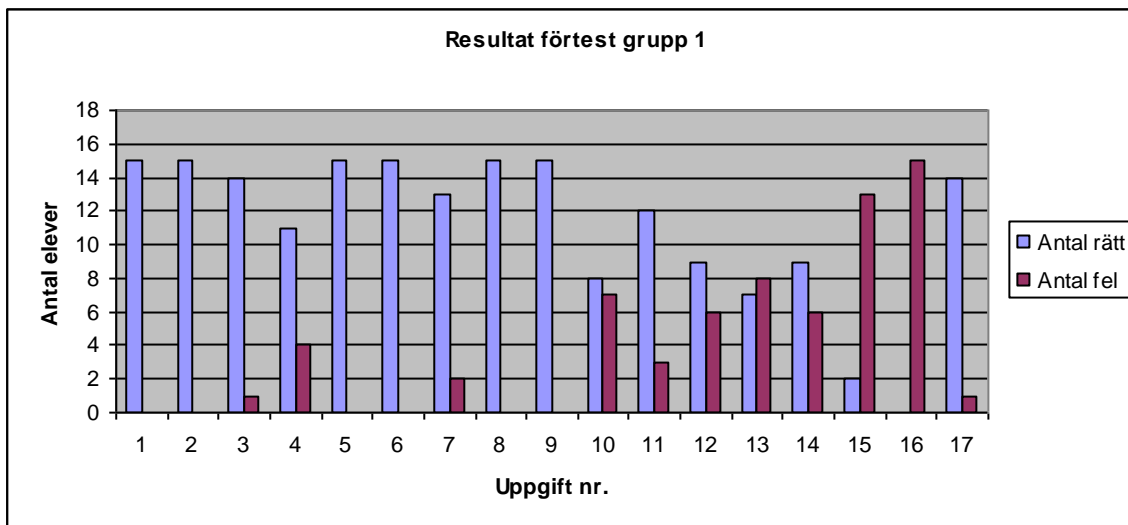


Diagram 2: Resultat från förtest grupp 1.

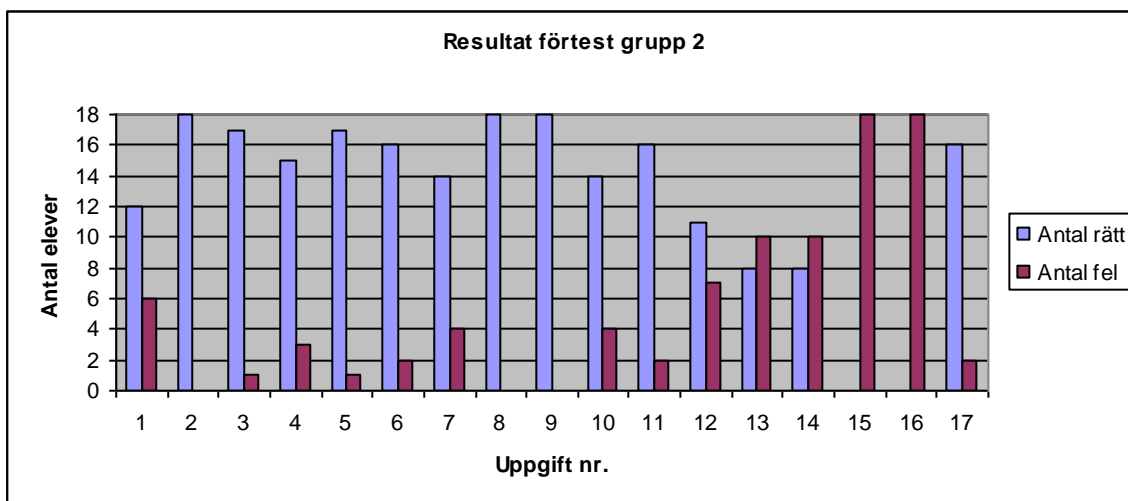


Diagram 3: Resultat från förtest grupp 2.

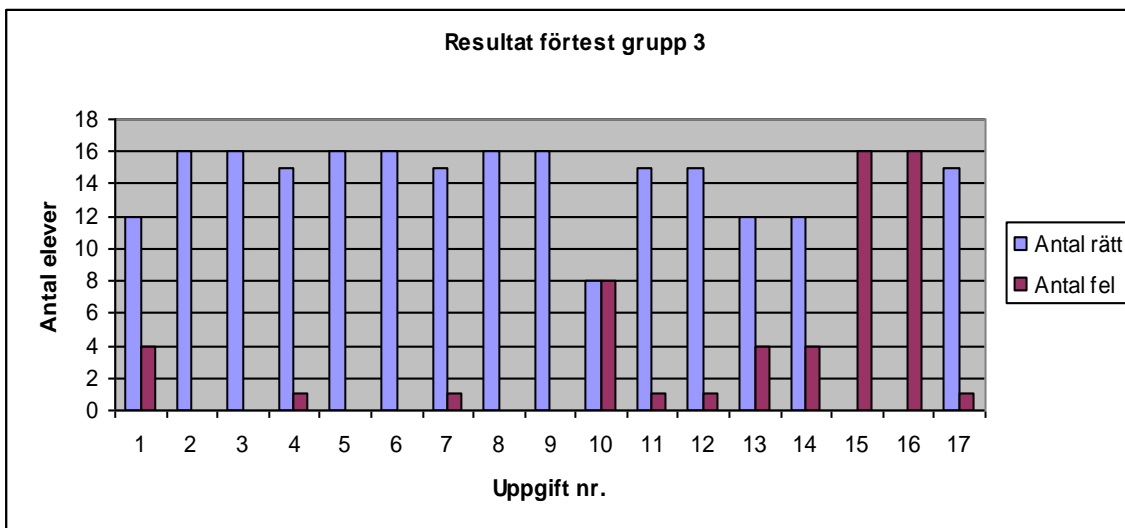


Diagram 4: Resultat från förtest grupp 3.

Lektion 1 – planering

De tre hörnpelarna i en learning study är urskiljning, samtidigt och variation. Utifrån dessa hörnpelare och elevernas förkunskaper planerade vi lektion 1. Med urskiljning menas det som eleverna har möjlighet att urskilja, hur de kommer att uppfatta de olika fyrhörningarna och hur de därefter kan relatera de olika figurerna till varandra, det som Holmqvist beskriver som sättet att kunna urskilja delarna från helheten, och att kunna relatera delarna och helheten till varandra (Holmqvist, 2006). För att kunna erfara ett fenomen eller en företeelse på ett specifikt sätt måste olika aspekter urskiljas och finnas fokalt i medvetandet samtidigt. Det är detta som kallas samtidigt. Variationen är avgörande för hur en learning study kommer att bli lyckad eller inte. Det gäller att som lärare kunna variera beskrivningen av lärandeobjektet på olika sätt för att göra det möjligt för eleverna att se och angripa objektet från olika håll.

Under vecka 44 planerade vi lektion 1 som kommer att hållas med Grupp 1. Vi enades om att Annika skulle undervisa i den första lektionen och att Lotta var observatör och videofilmade. Vi bestämde att kvadraten skulle vara den form som skulle vara utgångspunkt för hela lektionen. Vidare planerade vi att lektionen skulle starta upp med mindre gruppdiskussioner där eleverna skulle prata ihop sig och tillsammans komma fram till så många olika fakta de kunde om figuren i fråga. Därefter redogör de för varandra gruppvis vad de kommit fram till. Detta är något som Vygotskij menar är viktigt. Strandberg tar upp i sin bok *Vygotskij i praktiken: Bland plugghästar och fuskklappar* (2006) Vygotskij's betoning att det är viktigt att dela med sig av sina kunskaper och att det kan uppstå förståelse just i dialogen som annars kunde utebli.

Genom att arbeta i grupp och därmed "tvingas" ge uttryck för egna erfarenheter, ställa frågor eller komma med förslag till strategier blir eleven medveten om sitt eget tänkande och förståelsen utvecklas (Ahlström m.fl. 1996, s 70).

Därefter lyfter Annika fram och uppmärksammar det som eleverna kommit fram till som är korrekt och fyller i med de viktiga aspekterna som kvarstår. Eleverna får möjlighet att beskriva fyrkanten som en *fyrhörning*, med det matematiska namnet, *kvadrat*: det är en *plan geometrisk figur* där *sidorna är parvis parallella och alla sidor lika långa och alla vinklar räta*.

I en lärandesituation är det därför nödvändigt att urskilja den hållpunkt som tas för att ta en annan persons perspektiv och utmana hans eller hennes tänkande i en viss riktning, t.ex. genom att lyfta fram aspekter av ett fenomen som den lärande inte tidigare har varit medveten om (Björklund, 2008, s 77).

På likadant sätt som ovan fortsätter lektionen med rektangeln. Efter denna genomgång har Annika tillsammans med eleverna kunnat visa på de skillnaderna och likheterna som finns med figurerna på tavlan sinsemellan. Eleverna har fått veta att namnet på figuren är rektangel, att det är en fyrhörning där alla fyra vinklar är lika stora liksom kvadraten fast att alla sidor inte är lika långa. Här kan även lyftas fram att kvadraten är ett specialfall av rektangeln. Här är det viktigt att eleverna får möjlighet till en varierande beskrivning av lärandeobjektet på olika sätt för att göra det möjligt för eleverna att se och angripa objektet från olika håll eftersom en kritisk aspekt som kommit fram i förtestet var att eleverna ofta namngav rektangel fel.

För att ytterligare visa variation sätts därefter en romb och en parallelogram upp på tavlan och eleverna får information om att även dessa figurer kallas fyrhörningar med namnen romb och parallelogram. Eleverna får möjlighet att se att romben och kvadraten är likadana sett från att varje sida är lika lång på samma sätt som parallelogrammen är lik rektangeln, men att romben och parallelogrammen har likheten med att sidorna är parvis parallella. För att eleverna därefter ska få träna på dessa figurer och för att inläringen ska bli lustfyllt kommer eleverna att få spela ”fyrhörningsormen” (se bilaga 3). Efter planeringen var vi överens om vikten av att följa vår planering för att senare verkligen kunna se vilken lektion som var den som gav eleverna möjlighet att särskilja fyrhörningarna åt på bästa möjliga sätt.

Lektion 1 – genomförande

Lektionen hölls i början av vecka 45 med grupp 1. Annika började lektionen med att sätta upp den färgade kvadraten på tavlan och eleverna pratade ihop sig gruppvis. Uppgiften var att komma på så många olika fakta de kunde om figuren i fråga. Det blev bra diskussioner och alla elever var väldigt aktiva. Varje grupp fick därefter redovisa vad de kommit fram till och Annika påtalade att det inte var konstigt om flera grupper kommit på samma sak. Allt eleverna sa som kännetecknar figuren skrev Annika upp på tavlan.

Kvadraten

Annika: Vad har ni kommit fram till när ni diskuterat? Hur kan man beskriva den här figuren?

Elev: Den har fyra kantar och den kallas för fyrkant.

Elev: Det ingen fyrkant för det är en kvadrat?

Annika: Är det ingen fyrkant?

Elev: Jo, det är klart men den heter i alla fall kvadrat.

Annika: Det är riktigt. Nästa grupp?

Elev: Den har fyra hörn och så är den blå.

Elev: Man kan dela dem i fyra lika stora delar så får man 4 kvadrater.

Annika: Kom fram och visa dina kompisar, hur du menar.

Lite senare...

Elev: Kvadraten är lika lång på alla sidor.

Annika: Helt riktigt. Hur ser hörnen ut?

Elev: De är spetsiga och vassa.

Elev: Hörnen är raka.

Lektionen fortsätter med att Annika sätter upp rektangeln bredvid kvadraten på tavlan och en ny gruppdiskussion sätter igång. Den blir inte speciellt lång, då eleverna är väldigt ivriga med att räcka upp handen och börjar beskriva rektangeln.

Rektangeln

Annika: Vilken grupp vill starta? Varsågod.

Elev: Den har inte lika sidor och den är avlång och den har fyra hörn.

Annika: Det var bra, något mer som någon annan grupp kan komma på?

Elev: Det är en fyrhörning som kallas rektangel.

Elev: Den har vassa hörn och den kan också delas in så det blir fyra lika stora fyrkanter.

Efter genomgången med rektangeln där Annika påtalar de viktiga aspekterna som är avgörande för att det ska vara en rektangel fortsätter Annika med romben. Det blir ingen gruppdiskussion då eleverna är ivriga med att räcka upp händerna på en gång.

Romb

Elev: Det är en brun romb.

Elev: Vad då *rom*? Den är sned fröken.

Annika: Den här figuren heter romb det är helt riktigt, och den är lite sned märker ni alla det?

Var har du hört att den kallas för romb?

Elev: Ingen aning jag bara vet.

Elev: Det är nästan en fyrkant, för den har fyra hörn.

Annika: Men om den har 4 hörn vad är det då?

Elev: En fyrhörning.

Elev: Ja, men då är det ju en fyrkant.

Lite senare...

Elev: då är det en sned kvadrat eftersom rektangeln har längre hörn än romben.

Annika: Hur menar du att den har längre hörn än rektangeln.

Elev: Inte hörn, men sidorna är inte lika långa därför måste det vara en kvadrat.

Annika: Hur var det med sidorna på kvadraten?

Elev: De är lika långa.

Annika: Och hur var det med sidorna på romben?

Elev: De är också lika långa.

Det blir lite diskussioner eleverna emellan om de kan hitta kvadrater, rektanglar och romber i klassrummet.

Parallelogram

Annika: Nu ska ni se, vad kan det här vara?

Elev: Det är en avlång romb eftersom sidorna inte är lika långa.

Elev: En sned rektangel.

Elev: Det är en sned fyrkant

Annika: Allt ni säger stämmer bra, kan i komma på något mer?

Elev: Hörnen är spetsiga och den har fyra kanter och 4 hörn.

Annika: Vad tror ni den kan heta? Det är ett väldigt långt ord. Jag skriver på tavlan så kan ni läsa med mig samtidigt som jag skriver bokstäverna. P A Rosv.

Annika ägnade en stund att tillsammans med eleverna att öva på att säga parallelogram. Det blev många skratt och fniss då en del tyckte att det kittlades i munnen när man sa parallelogram. Nästa övning med eleverna var att de skulle försöka para ihop figurerna.

Annika: Vilka vill ni para ihop med varandra.

Elev: Alla fyra för att de har 4 kanter.

Elev: Parallelogram och romben för att de är lite sneda.

Elev: Kvadraten och romben, för att de har lika sidor.

Annika. Kan ni komma på något mer sätt?

Elev: De andra två eftersom de är avlånga.

Nästa steg av lektionen var att eleverna spelade "Fyrhörningsormen" tre varv. Det flöt på väldigt bra och alla ville fortsätta när lektionen led mot sitt slut.



Bild 1: Bilden visar ett spelkort från "Fyrhörningsormen".

Lektionen avslutades med att eleverna fick återberätta vad det lärt sig.

Annika: Vad har ni lärt er idag?

Elev: Romb och parallelogram

Elev: Olika fyrhörningar

Elev: Skillnaden mellan de raka och de sneda fyrkanterna.

Lektion 1 – resultat från eftertest

Eftertestet i grupp 1 genomfördes dagen efter lektionen. Grupp 1 förbättrade sitt resultat påtagligt.

I gruppen hade alla elever svarat rätt på frågorna om romb och parallelogram i eftertestet, medan endast två elever i förtestet kände till romben och ingen parallelogram.

Den fråga enligt resultatet som eleverna har haft svårast att svara rätt på är fråga 10. Där ber vi eleverna att skriva ett annat namn för trekant. 3 av 15 har skrivit rektangel istället för triangel som svar på den här frågan. På fråga 9 är det ett sämre resultat i eftertestet än i förtestet, där har en elev ritat en rektangel istället för en triangel som var det korrekta svaret på frågan.

I det första diagrammet nedan visas resultat från eftertestet och det andra diagrammet visar jämförelse per fråga i förtest respektive eftertest.

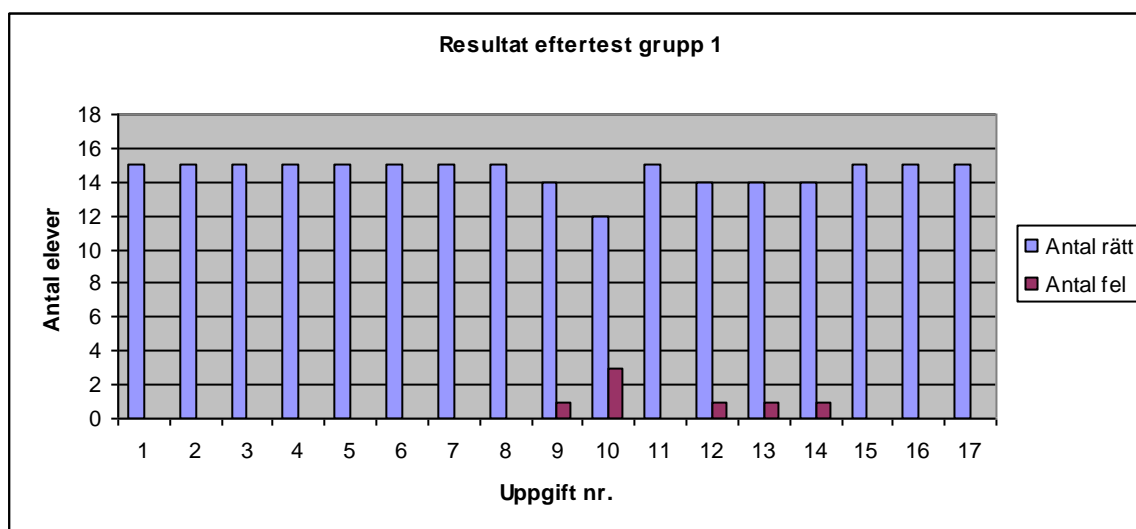


Diagram 5: Resultat från eftertestet – grupp 1.

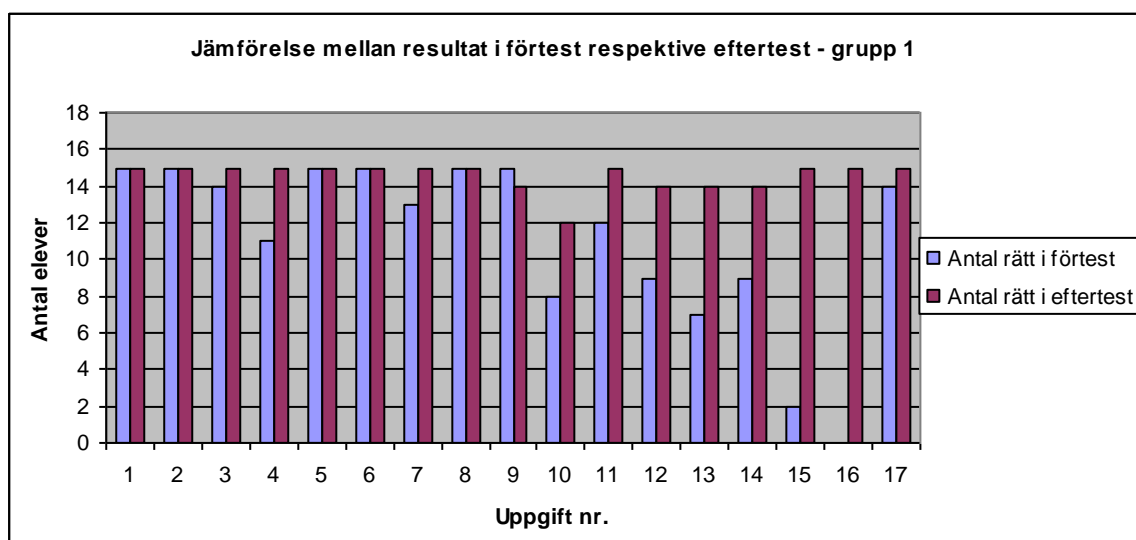


Diagram 6: Resultatjämförelse mellan förtest respektive eftertest.

Andelen rätta svar ökade från 74 % i förtestet till 97 % i eftertestet, motsvarande en ökning med 23 procentenheter. I förtestet var det 66 stycken felaktiga svar medan eftertestet endast hade 7 felaktiga svar. Felen var placerade på 5 olika frågor vilket innebär att 12 av 17 frågor var korrekt besvarade från hela gruppen. Detta innebär att av samtliga 17 frågor har andelen med alla rätt ökat från 35 % till 71 %. Vidare konstateras också att som ”sämst” hade 3 elever fel på en och samma fråga i eftertestet, medan så många som 8 frågor i förtestet noterade 3 eller fler felaktiga svar.

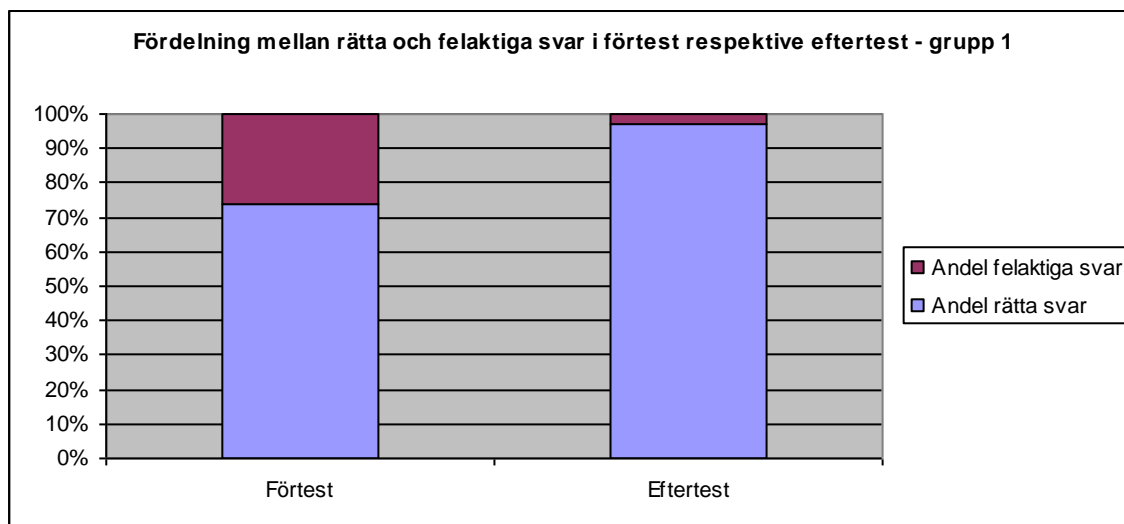


Diagram 7: Fördelning mellan rätta och felaktiga svar i förtest respektive eftertest.

Lektion 2 – planering

Efter lektion 1 genomförde vi våra analyser av lektionen. Vi tittade ett flertal gånger på videofilmen och konstaterade att vi ville prova att lyfta fram det som Marton ofta återkommer till, det är viktigt att eleverna får möjlighet att veta vad kvadrat, rektangel, romb och parallelogram inte är, för att de ska få möjlighet att urskilja något från något annat (Runesson, 1999 och Marton & Morris 2002). Vi bestämde att Lotta skulle hålla i lektion 2 med grupp 2 och att Annika denna gång skulle observera. Planeringen av denna lektion skedde i mitten av vecka 45. Lektionen skulle starta på samma sätt som lektion 1, därefter ska Lotta visa fler geometriska figurer och låta eleverna diskutera och hitta vad som skiljer fyrhörningarna från cirkeln och triangeln. Som övning för eleverna kommer de att få genomföra en annan typ av ”orm” som innehåller alla fyra fyrhörningarna samt cirkeln och triangeln, ”geometriormen” (se bilaga 4).

Lektion 2 – genomförande

Lektionen hölls i slutet av vecka 45. Det blev lite tajt om tid då vi lagt till ett moment som vi inte genomförde i den första lektionen. Det är en lärdom vi tar med oss till planeringen av lektion 3. Klassen var aktiv och lite rörig, trots det fungerade det bra med gruppdiskussioner även denna lektion. Det var en elev som var motsträvig och inte ville delta i grupparbetet och spelet vilket vi tror störde klassen en del. I slutet av lektionen lämnade denna elev klassrummet i ren protest. Själva genomförandet av lektionen följde samma mönster som lektion 1, där alla fyrhörningar presenterades i tur ordning. Nedan följer ett utdrag av vad som sades under de olika momenten.

Kvadraten

Lotta: Vad har ni kommit fram till när ni pratat? Hur kan man beskriva den här figuren?

Elev: Den kallas för fyrkant.

Elev: Eller så kan man säga kvadrat.

Lotta: Helt riktigt, vad kan man mer säga om figuren?

Elev: Alla sidor är lika långa och den har 4 hörn så det är också en fyrhörning.

Rektangeln

Elev: Den är också en fyrkant eftersom den har fyra hörn.

Elev: Det är en fyrhörning som kallas rektangel.

Elev: Den ser ut som en utdragen kvadrat.

Elev: Två av sidorna är lika långa och de andra två också.

Romb

Elev: Det är en sned kvadrat.

Elev: Då kan man kalla den för snedkant.

Lotta: Det är bra förklaringar men den har ett annat namn, någon som vill gissa?

Elev: Det är en utdragen kvadrat med lika långa sidor.

Elev: Om den inte heter snedkant måste den heta snedhörning.

Lotta: Figuren heter faktiskt romb.

Elev: Då har den där romben 4 hörn så det är en fyrhörning i alla fall, eller hur?

Parallelogram

Lotta: Nu ska ni se, vad kan det här vara?

Elev: Det är en långromb.

Elev: Eller så kanske den heter rombur?

Elev: Fast den ser mer ut som en rektangel så den kanske heter rektangelromb?

Lotta: Ni är verkligen påhittiga, den här figuren har ett ganska knepigt namn, den heter parallelogram.

Jag ska skriva på tavlan så att ni kan läsa och säga efter mig.

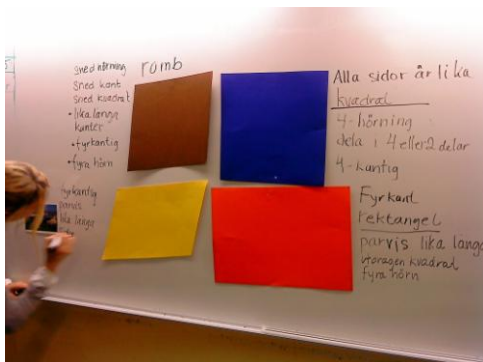


Bild 2: Bilden visar fyrhörningarna och klassens sammanfattande ord.

Lotta övade på att säga parallelogram med eleverna. Sen fortsatte diskussionerna om vad som kännetecknar en parallelogram och då kom eleverna på att den har fyra hörn och fyra sidor. Nästa övning med eleverna var att de skulle försöka para ihop figurerna. Den här lektionen skilde sig inte nämnvärt från den första utan eleverna kom snabbt på olika sätt att para ihop figurerna på och samtidigt lämna förklaringar hur de tänkte. Som ett sista moment i den här lektionen presenterade Lotta cirkeln och triangeln. Eleverna kom snabbt på vad som kännetecknar en cirkel och en triangel och de kunde de matematiska termerna för dessa två figurer.

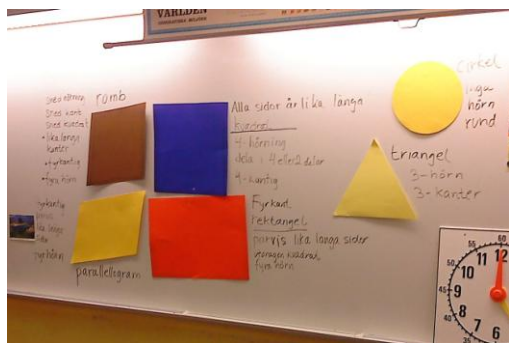


Bild 3: Bilden visar fyrhörningarna, cirkel och triangel och elevernas sammanfattning av de olika geometriska figurerna.

Lektionen avslutades med att eleverna spelade "Geometriormen" (se bilaga 4) två varv. Det som skiljer "Geometriormen" från "Fyrhörningsormen" är att i det förstnämnda spelet har vi blandat in triangeln och cirkeln utöver de fyra fyrhörningarna. Här visade det sig att det var en del som hade svårt att skilja rektangeln och triangeln åt när de presenterades tillsammans. Som avslutning fick eleverna berätta vad det lärt sig.

Lektion 2 – resultat från eftertest

Eftertestet i grupp 2 genomfördes dagen efter själva lektionen. Grupp 2 förbättrade sitt resultat.

I grupp 2 hade 16 av 18 elever svart rätt på fråga 15 där vi frågade efter namnet på romben. På fråga 17 var det 15 elever som klarade av att namnge parallelogram korrekt.

Även i denna grupp ligger den största svårigheten för eleverna att särskilja de matematiska termerna rektangeln och triangeln åt. På fråga 13 skulle eleverna ange hur många hörn en rektangel har och på fråga 14 skulle de rita en rektangel. Här är det 6 som har angett att rektangeln har 3 hörn och istället för att rita en rektangel har 5 elever ritat en triangel. Staplarna på fråga 10 och 12 nedan visar att eleverna hade svårt att namnge triangeln korrekt samt att ett flertal ritat en rektangel där kvadraten skulle ritas. På fråga 1 där eleverna skulle färglägga alla fyrhörningar var det fortfarande 3 elever som endast hade färglagt kvadraterna och inte de 3 övriga fyrhörningarna. Vilket i och för sig är en förbättring mot förtestet där det var 6 elever som endast fyllt i kvadraterna.

I det första diagrammet nedan visas resultat från eftertestet och det andra diagrammet visar jämförelse per fråga i förtest respektive eftertest.

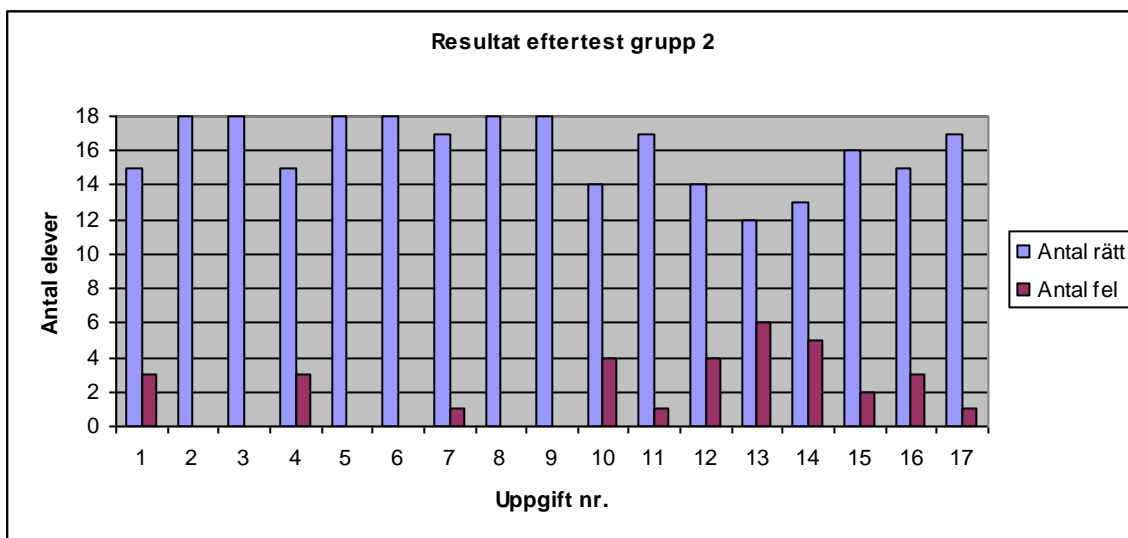


Diagram 8: Resultat från eftertestet – grupp 2.

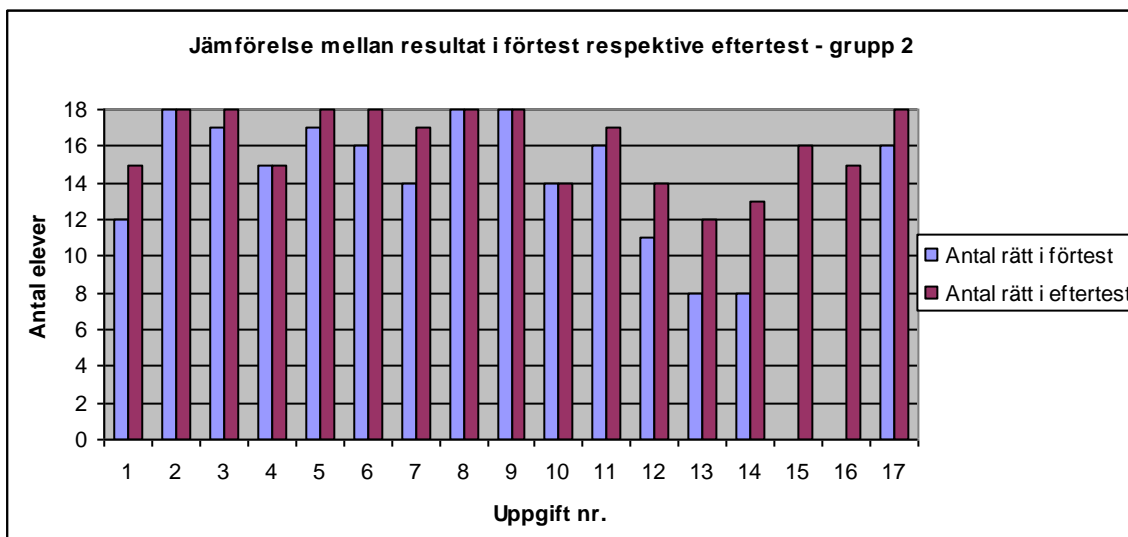


Diagram 9: Resultatjämförelse mellan förtest respektive eftertest.

Andelen rätta svar ökade från 71 % i förtestet till 90 % i eftertestet, en ökning med 19 procentenheter. Vi noterar också att av samtliga 17 frågor så har andelen med alla rätt ökat från 18 % till 35 %. I förtestet var det endast 3 frågor som var korrekt besvarade av alla elever medan i eftertestet var det 6 frågor som besvarats korrekt av samtliga. I förtestet var det 88 stycken felaktiga svar och i eftertestet var det totalt 32 felaktiga svar. I den här gruppen har resultatet förbättrats men det är inte alls av samma dignitet som grupp 1. Det var i eftertestet fortfarande 7 frågor som hade mer än 3 felaktiga svar.

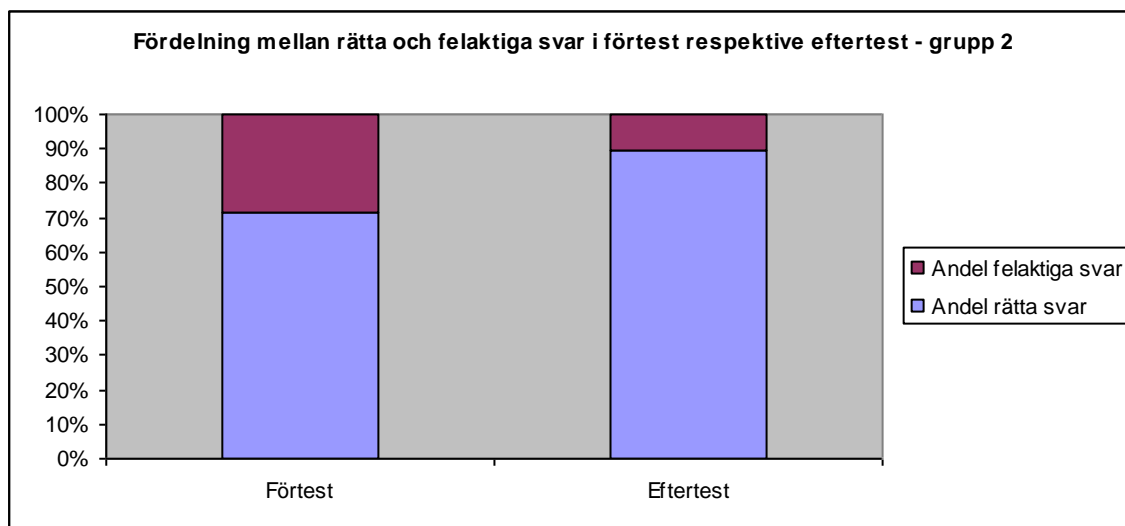


Diagram 10: Fördelning mellan rätta och felaktiga svar i förtest respektive eftertest.

Lektion 3 – planering

Efter lektion 2 genomförde vi samma procedur som efter den första lektionen. Vi tittade på videofilmen och diskuterade igenom hur vi ville förändra lektionen. Planering av lektion 3 skedde under veckoslutet i vecka 45. Vi bestämde att Lotta skulle genomföra lektion 3 och att Annika skulle observera och videofilma även denna lektion. I den sista lektionen som genomförs med Grupp 3 bestämde vi oss för att arbeta på samma sätt som i lektion 2 då vi såg att det var bra för eleverna att få svar på frågan vad fyrhörningar inte är genom att arbeta parallellt med andra figurer inom geometrin. Ett ytterligare tillägg som vi bestämde oss för var att lägga in i lektion 3 är att lyfta fram de olika fyrhörningarna i olika storlekar för att visa att storleken och vinklarna inte har betydelse för figuren. Det spelar ingen roll om kvadraten är pytteliten eller jättestor, förhållandet mellan sidorna och vinklarna är ändå detsamma. Genom att visa cirkeln och triangeln får eleverna möjlighet att se vad en rät vinkel inte är för att sedan lära sig vad det är genom att titta på kvadraten och rektangeln, och genom att visa figurerna i olika storlekar ökar även chansen till elevernas förståelse för dessa olika figurer. Enligt Holmqvist kan subtila skillnader i upplägget göra stora effekter på det lärande som sker hos eleverna (Holmqvist, 2006). Därför hoppas vi att denna lilla skillnad i upplägget av lektionen kommer att ha stor påverkan på vilken möjlighet eleverna har att lära sig och ta till sig det vi vill förmedla. Som övning till denna lektion kommer vi att använda oss av ”geometriormen” (se bilaga 3) samt ytterligare en övning där eleverna ges möjlighet att själva rita och forma sina figurer med instruktioner av sina klasskompisar (se bilaga 5). Då denna lektion innehåller ett antal fler moment har vi bitt läraren för klassen att ge oss ett dubbelpass så att vi inte behöver stressa genom momenten.

Lektion 3 – genomförande

Lektionen hölls i början av vecka 46. Det var rätt tänkt att det behövdes ett längre pass för att hinna med alla de olika delarna som vi valt att lyfta fram i denna sista lektion. Lotta startade lektionen på samma sätt som de två tidigare lektionerna. Kvadraten sattes upp på tavlan och eleverna pratade ihop sig gruppvis. Den här gruppen elever var inte lika fokuserade på uppgiften som de två tidigare grupperna varit. Eleverna var aktiva men fokuserade på fel saker. Det kunde handla om att figuren hade en speciell färg eller att pappersfiguren var lite skrynklig. Det pratades mycket i klassrummet och det var lite stökigt i bänkarna. När det var dags för grupperna att redovisa skrev Lotta upp de fakta som kändes relevant för uppgiften och det som inte var relevant skrevs således inte upp.

Kvadraten

Lotta: Låt mig höra vad ni kommit fram till! Hur kan man beskriva den här figuren?

Elev: Den är blå och den har fyra hörn,

Elev: Den kallas för kvadrat.

Elev: Man kan också säga fyrkant.

Lotta: Vad många saker ni har kommit på! Vad har ni andra kommit fram till?

Elev: Den är lite skrynklig och så tror jag inte att det är en exakt kvadrat.

Lotta: Vad menar du med att det inte är en exakt kvadrat?

Elev: Jag tror inte att den har exakt lika långa sidor och det måste en fyrkant ha.

Rektangeln

Elev: Det är också en fyrkant eller fyrhörning.

Elev: Sidorna är inte lika långa.

Lotta: Det var bra, någon annan grupp som vill säga något?

Elev: Det är en fyrhörning som kallas rektangel.

Elev: Den är lång på längden och den har fyra hörn.

Romb

Elev: Det är en brun cyberkant.

Elev: Vad då... det är en sned fyrkant.

Lotta: Märker ni alla att den här figuren är lite sned?

Elev: Ja, men alla sidorna är lika långa som i kvadraten.

Elev: Det är en fyrhörning med spetsiga hörn.

Lotta: Vad duktiga ni är! Vill ni att jag ska berätta vad den heter på riktigt? Skulle vi gå ut och prata med någon som inte har varit med oss här i rummet och säga att vi lärt oss vad en cyberkant är så skulle ingen kunna gissa vad det är. Det är därför det är så viktigt med ett korrekt matematiskt språk. Den heter romb.

Elev: Romb, det har jag hört förut.

Elev: De är också lika långa.

När Lotta sätter upp en parallelogram på tavlan, fortsätter klassen med att göra sig lite lustiga genom att hitta på egna namn för formen.

Parallelogram

Elev: Det är en kanakant.

Lotta: Det skriver jag inte upp på tavlan men du är riktigt påhittig. Någon annan som kan säga något om den här figuren?

Elev: Det har fyra hörn och är som en avlång romb.

Elev: Det är en snefykant

Elev: Den har spetsiga kanter.

Lotta: Har den spetsiga kanter?

Elev: Nä, men hörn då.

Elev: Sidorna är inte lika långa så då måste det var någon slags rektangel.

Lite senare...

Lotta: Vad tror ni den kan heta? Kan ni lära er det här, är ni jätteduktiga. Jag skriver på tavlan så läser vi tillsammans.

Lotta lät eleverna öva några gånger på att säga parallelogram. Lotta fortsätter lektionen med att sätta upp en cirkel och en triangel på tavlan och även här försäkte eleverna hitta på egna namn för figurerna.

Elev: Det är en snirkel och en trankorat.

Lotta: Ni är jätte påhittiga men dessa former tror jag allt att ni känner igen.

Elev: Det är rund och kallas för ring.

Elev: Äh, det är en cirkel och en triangel.

Lotta: Det är helt rätt. Vet ni något mer om dessa två former?

Elev: Den kallas också för trekant och den har tre hörn.

Elev: Cirkeln har noll hörn.

Lotta fortsätter därefter att repetera fyrhörningarna och visar eleverna flera olika storlekar och vinklar på kvadrat, rektangel, parallelogram och romb. Lotta frågar eleverna lite snabbt vad formerna kallas för samtidigt som hon håller upp dem i luften.



Bild 4: Lotta visar här eleverna fyrhörningarna i olika storlekar för att visa att storleken inte har betydelse för det som kännetecknar en kvadrat, rektangel, romb och parallelogram.

Därefter ber Lotta att eleverna ska försöka para ihop figurerna med varandra. Eleverna använder sig av alla sex former och skapar nya former med dem. De ber bland annat Lotta att ta triangeln och kvadraten så att de tillsammans bildar ett hus. Det visade sig att det blev svårt för eleverna att ha alla sex former på tavlan så Lotta tog ner cirkeln och triangeln och bad dem igen att försöka para ihop formerna och förklara hur de tänkte.

Elev: Romben och kvadraten för de har lika långa sidor.

Elev: Romben och parallelogram, för de är sneda.

Lotta: Jättebra! Finns det fler sätt?

Elev: Kvadraten och rektangeln för de är raka.

Elev: Om romben och kvadraten hör ihop så måste väl också rektangeln och parallelogram höra ihop eftersom sidorna inte är lika långa?

Lektionen avslutades med att eleverna spelade ”Geometriormen” (se bilaga 4) två varv samt att de målade de geometriska formerna efter instruktionskorten (se bilaga 5) innan de berättade för varandra vad de lärt sig.



Bild 5: Bilden visar några elevers arbeten när de arbetade med instruktionskorten.

Lektion 3 – resultat från eftertest

Eftertestet i grupp 3 genomfördes samma dag, drygt 4 timmar efter lektionen. Även grupp 3 förbättrade sitt resultat. I diagrammet nedan går det att avläsa att eleverna blandar ihop rektangel och triangel, då felen uppdagar sig i frågorna 10, 13 och 14 samt att ett par elever inte lärt sig namnen på romb och parallelogram.

I det första diagrammet nedan visas resultat från eftertestet och det andra diagrammet visar jämförelse per fråga i förtest respektive eftertest.

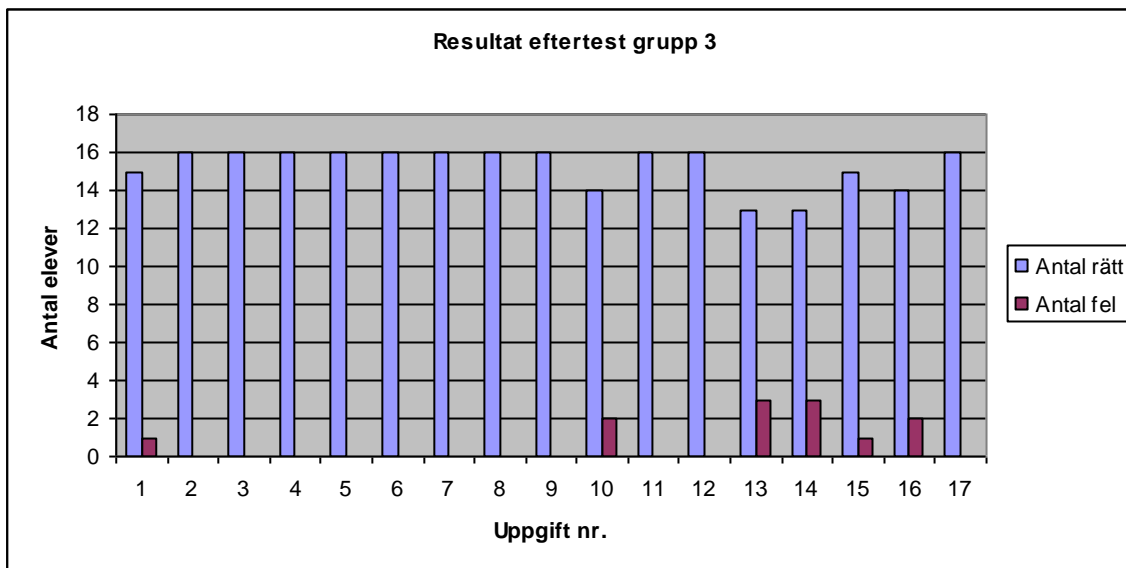


Diagram 11: Resultat från eftertestet – grupp 1.

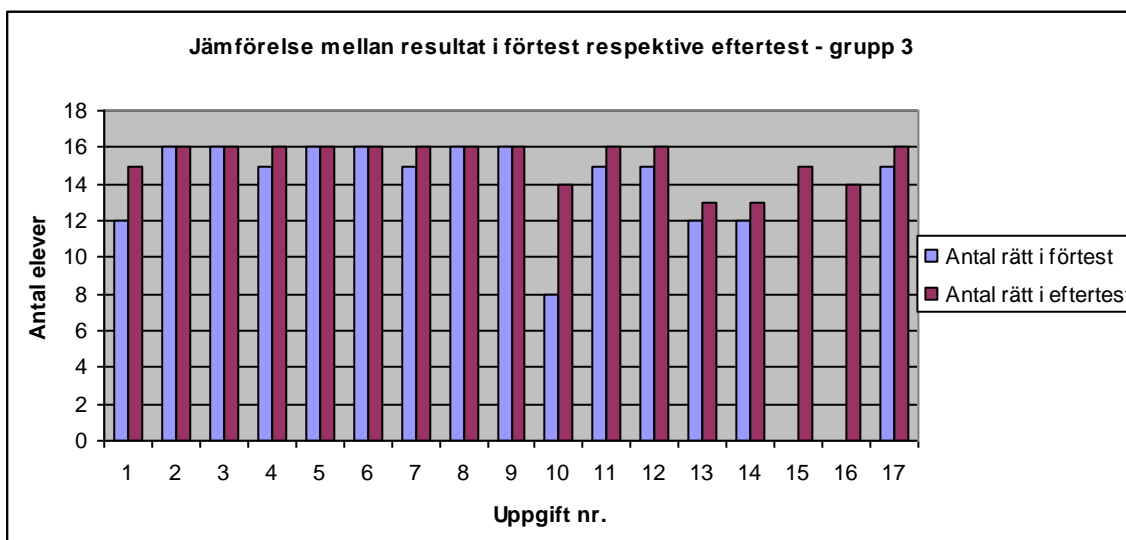


Diagram 12: Resultatjämförelse mellan förtest respektive eftertest.

Andelen rätta svar ökade från 79 % i förtestet till 96 % i eftertestet, en ökning med 17 procentenheter. I förtestet var det 57 felaktiga svar och i eftertestet hade det minskat till 12. Vi noterar också att av samtliga 17 frågor har andelen med alla rätt ökat från 35 % till 65 %. Det var totalt 11 frågor i eftertestet som var korrekt besvarade av samtliga jämfört med förtestet där 6 frågor var korrekt besvarade av alla elever i gruppen. Vidare konstateras att som sämst hade 3 elever fel på 2 frågor i eftertestet, medan 6 frågor i förtestet noterade 3 eller fler felaktiga svar. Den här gruppen har förbättrat sitt resultat till nästan samma dignitet som grupp 1.

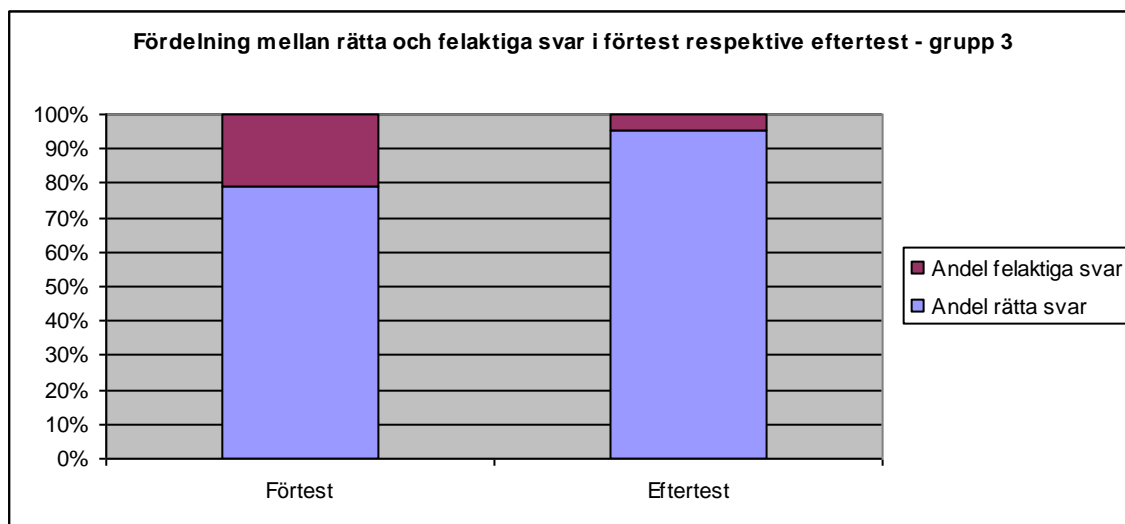


Diagram 13: Fördelning mellan rätta och felaktiga svar i förtest respektive eftertest.

Lektionen som gav de bästa möjligheterna för eleverna att särskilja fyrhörningarna

Den lektion som har visat sig ge eleverna störst kunskapsutveckling inom vårt valda lärandeobjekt, att kunna namnge de korrekta matematiska termerna, kunna känna och kunna särskilja fyrhörningarna åt, är den första lektionen. Men även den sista lektionen har påvisat en god kunskapsutveckling hos eleverna. Det är en oerhört liten skillnad mellan dessa två lektioners resultat. Det handlar i stort sett om ett mer felaktigt svar i eftertestet.

Som vi kan se av resultaten verkar lektionerna ha stärkt olika kunskapar hos eleverna. Den första lektionen där vi enbart pratade om fyrhörningarnas korrekta matematiska namn och deras likheter och skillnader gav eleverna en god kunskapsutveckling inom området fyrhörningar. Alla i gruppen har lärt sig namnge och känna igen romben och parallelogram och endast ett par elever har fortfarande svårt för att särskilja kvadraten från rektangeln.

I den tredje och sista lektionen erbjöd vi en stor variation inom vårt valda lärandeobjekt. Fyrhörningarna blev presenterade på samma sätt som i lektion 1 med det tillägget att fyrhörningarna även visades i olika storlekar och vinklar. Under denna lektion fick eleverna möjlighet att erfara vad en fyrhörning inte är genom att vi pratade och diskuterade om triangel och cirkel. Denna grupp elever påvisar en god kunskapsutveckling inom området i stort, men med den skillnaden att ett par elever inte lärde sig namnge och känna igen romb och parallelogram. Vi kan även se i eftertestet att dessa elever blandade ihop termerna rektangel och triangel, något som inte påvisats i eftertestet från lektion 1.

Resultaten som vi har redovisat är väldigt bra för båda lektionerna men då vi i arbetet har haft som syfte att ta reda på den lektion som gav eleverna möjlighet att förstå och lära sig särskilja fyrhörningarna åt måste vi utse lektion ett då vi där kan finna den största kunskapsutveckling hos eleverna samt den högsta kunskapsnivån.

Diskussion

När vi startade detta arbete i september månad 2009, var vi övertygade om att resultatet i vår learning study i geometri skulle få ett helt annat resultat än det vi nu har i handen. Vi bestämde oss tidigt för att genomföra tre lektioner och hade som förväntan att elevernas kunskapsutveckling skulle öka efter varje genomförd lektion. Denna förväntan fanns hos oss eftersom vi följt arbetsgången i en learning study där vi planerade den efterkommande lektionen först efter att vi analyserat undervisningen och tittat på resultaten från lektionen innan. Vi förväntade oss att varje omarbetad lektion skulle ge eleverna bättre möjlighet att erfara och lära sig vad som skiljer fyrhörningarna åt. Istället har vi nu ett resultat som visar att den första lektionen är den lektion som ger eleverna denna möjlighet på bästa sätt.

Om vi ska granska studiens validitet, kan resultatet från eftertestet ha påverkats av att eleverna i de olika grupperna genomförde testet efter olika lång tid. Ashouri (2006) menar att om eftertestet inte görs direkt efter lektionen kan man inte vara säkert på vad eleverna faktiskt har blivit erbjudna att lära sig under lektionen. Utifrån detta kan vi nu konstatera att resultatet från eftertesterna hade blivit mer rättvisande om de genomförts i direkt anslutning till lektionen. Det vi vet är att de ordinarie lärarna inte har undervisat eller kommenterat lärandeobjektet mellan lektion och eftertest men vi har ingen garanti för att eleverna sinsemellan inte har pratat och diskuterat lärandeobjektet. Det resultat vi har, är framtestat väldigt tätt in på lektionen så vi vet inte heller om de kunskaper de visade på eftertestet är kunskap de besitter än idag. I studien ingår det inte någon kontrollgrupp att jämföra resultaten med utan varje grupp är sin egen kontrollgrupp genom att det är resultatet före och efter lektionen som jämförs. I resultatdelen jämför vi även grupperna mot varandra. I och med detta blir de även varandras kontrollgrupper. Nu i efterhand skulle det ha varit intressant att ha haft en kontrollgrupp som endast genomfört för- och eftertest för att på detta sätt se hur mycket eleverna förbättrat sitt resultat i och med att testet var identiskt både före och efter lektionen. Skulle vi ha fått se en kunskapsförbättring även där i och med att de genomfört samma test två gånger?

Vi har i den här studien tittat på resultaten på gruppnivå. Vilken grupp förbättrade sitt resultat mest och vilken grupp fick det totalt bästa resultatet? Vi vet inte så mycket om vad varje enskild elev lärde sig och det var inte heller syftet med studien, då vi ville få reda på hur undervisningen kan genomföras för att eleverna ska ha möjlighet att lära sig särskilja och namnge fyrhörningarna. I och med detta vet vi inte om undervisningen gynnade de svaga eller starka eleverna, vilket även det är en viktig fråga att ta med sig som lärare. Vi behöver undervisa så att vi når alla elever.

Den här studien har haft som syfte att hitta de kritiska aspekterna för eleverna, att lära sig särskilja fyrhörningarna, ta reda på hur undervisningen kan genomföras, för att eleverna ska ha möjlighet att känna igen och korrekt namnge fyrhörningarna och kunna erfara variation av vårt valda lärandeobjekt. I förtesten som eleverna genomförde var det enkelt att finna de aspekter av lärandeobjektet som var kritiska för eleverna. Det som visade sig svårt för dem var att kunna namnge de korrekta matematiska termerna och fyrhörningarnas relation till varandra när det gäller vinklar och sidor. Det visade sig att endast 2 elever hade förkunskap om romben. De kunde namnge formen korrekt och de kunde särskilja romben från de andra fyrhörningarna. Det var här som vi såg vår största utmaning. Hur skulle vi göra för att ge eleverna möjlighet att lära sig detta?

Vi ska nu diskutera våra tre lektioner utifrån de tre hörnspelare som vi utgick ifrån när vi planerade och genomförde lektionerna: *urskiljning*, *samtidighet* och *variation*. Var det så att vi utifrån variationsteorin erbjöd eleverna att erfara vårt valda lärandeobjekt utifrån dessa perspektiv? Det vi kommit fram till är att elevernas möjlighet till urskiljning och samtidighet var lika i alla tre lektionerna medan det var variationen av lärandeobjektet som successivt ökade i omfattning efter varje lektion. Marton och Morris (2002) menar att det som är avgörande för vad eleverna lär sig är balansen mellan det som läraren varierar och det som är konstant. I och med detta trodde vi att lärandet hos eleverna skulle öka efter varje lektion eftersom de fick erfara mer variation av lärandeobjekten. Men med vårt resultat som vi nu har är den lektion där vi hade den minsta variation den mest lyckade.

Undervisningen gav eleverna möjlighet att urskilja de olika fyrhörningarnas individuella egenskaper, när de visades upp en efter en. De egenskaper som eleverna kunde urskilja förstärktes genom att vi skrev upp på tavlan det som eleverna sa. Det gav eleverna tillfälle att relatera de olika figurerna till varandra. Holmqvist (2006) beskriver detta som att kunna urskilja delarna från helheten och relatera delarna och helheten till varandra. Kvadraten var utgångspunkten för lektionerna och efter att eleverna fick urskilja kvadratens egenskaper, satt kvadraten kvar, när de andra figurerna visades. Här fick eleverna möjlighet att se alla formerna samtidigt, vilket gjorde att eleverna hade figurerna fokalt i medvetandet på samma gång. Variationen är avgörande för hur eleverna uppfattar lärandeobjektet och små skillnader i hur lärandeobjektet presenteras kan göra stora skillnader för hur mycket eleverna förstår. Under alla lektioner fick eleverna möjlighet att se variation av de olika formernas egenskaper i förhållande till varandra. Vad var lika? Hur skiljde sig formerna åt? När eleverna spelade geometriornen fick de ytterligare variation genom att figurerna hade olika färger. Vid lektion två och tre ökade variationen genom att eleverna blev uppmärksammade på vad en fyrhörning inte är, då vi visade upp triangeln och cirkeln. För att ytterligare variera undervisningen av lärandeobjektet i den sista lektionen gav vi eleverna möjlighet att se de olika fyrhörningarna i olika storlekar och vinklar, för att eleverna på så många olika sätt skulle få se och angripa fyrhörningarna från olika håll. Analysen visar att det som varit skillnaden mellan den första, andra och tredje lektionen är att variationen har ökat från varje tillfälle, medan möjligheten att urskilja och samtidigheten har varit densamma.

När vi satte oss ner och planerade den första lektionen, bestämde vi oss för att låta eleverna få chans att visa vad de redan kunde om fyrhörningarna, för att på detta sätt ta reda på deras förkunskaper en gång till samt att starta undervisningen, där de just vid det tillfället befanns sig i gruppen i stort, när lektionen skulle starta.

Vi känner att vi i lektion 1 var noga med att låta eleverna prata om fyrhörningarna, vad de heter, vad som kännetecknar dem, hur de skiljer sig och slutligen ge eleverna möjlighet att nöta in de korrekta matematiska termerna via spelet. Eleverna i lektion 1 fick inte möjlighet att komma in på andra saker utan de undervisades bara i vårt valda lärandeobjekt. Vi var lite oroliga för att vi inte följde variationsteorin fullt ut i och med denna planering, då vi inte gav eleverna möjlighet att få erfara vad en fyrhörning inte är.

Vi var förvånade när vi fick ett så fantastiskt bra resultat efter lektion 1, där alla hade lärt sig namnen på romb och parallelogram och visat god kunskap att skilja kvadrat, rektangel, romb och parallelogram åt. Med detta resultat ville vi till lektion 2 försöka ändra lektionen så att vi i nästa grupp kunde nå samtliga elever. Det tillägg vi gjorde till lektion 2 var att vi gav eleverna möjlighet att se vad en fyrhörning inte är. Enligt Marton och Morris (2002) är det viktigt att eleverna få

möjlighet att urskilja något från något annat. Det vi gjorde för att ge eleverna den möjligheten, var att vi presenterade cirkeln och triangeln. Vi var själva nöjda med lektionen trots att det var lite rörigt i klassrummet men blev förvånade av det resultat som visade sig i eftertestet. Den här elevgruppen hade förbättrat sitt resultat från 71 % till 90 %, vilket kan jämföras med grupp 1, som visade ett resultat med 97 % rätt svar. Inför den sista lektionen bestämde vi oss för att ha kvar cirkeln och triangeln, trots att det i tidigare testgrupp visat sig röra till det lite, då resultatet inte kom upp i nivå med lektion 1. Vid den sista lektionen lade vi in cirkeln och triangel i mitten av lektionen för att avslutningsvis förstärka fyrhörningarnas egenskaper. Vi presenterade fyrhörningarna i olika storlekar och vinklar samt gav eleverna möjlighet att själva rita och analysera dem. Vi valde att ha kvar cirkeln och triangel då variationsteorin påtalar vikten av att se vad ett fenomen inte är, fast vi själva upplevde det som om det var just dessa två som hade rört till det lite. Genom att ytterligare förtydliga fyrhörningar hade vi förhoppning om att denna planering skulle falla väl ut. Som vi redovisat ovan så blev det även ett bra resultat i den sista gruppen som på marginalen hamnade snäppet efter grupp 1.

Vår förhoppning att nå samtliga elever kan nu i efterhand ses som ouppnåeligt efter endast en lektion. Alla barn är unika och har olika sätt att lära. Hur var det med de starka och lite svagare nådde vi fram till alla, eller hamnade vår undervisning i mitten och nådde den stora skaran elever? Då vi endast var inne i klassrummet och undervisade vid ett tillfälle är möjligheten att nå alla elever fullt ut svårt. Vi tror att eleverna skulle behöva minst en lektion till för att få möjlighet till repetition och få arbeta mer aktivt själva.

Vad hade hänt om vi inte hade haft med cirkeln och triangel i den sista lektionen och om vi hade valt att inte fråga om dessa former i testen? Hade då alla elever nått vårt mål att lära sig särskilja fyrhörningarna åt? Detta är inget vi får något svar på men i efterhand känner vi att dessa två former inte tillförde så mycket som vi trott från början. Det vi kan se är, att när eleverna ritar och namnger formerna rektangel och triangel vet de hur en rektangel och triangel ser ut, men blandar ihop de matematiska namnen för dessa båda former, när de presenteras tillsammans. En ytterligare reflektion är att vi inte borde ha haft med cirkeln och triangeln i för- och eftertest, utan istället fokuserat på att lära eleverna att särskilja och namnge kvadrat, rektangel, romb och parallelogram. Det är lätt att fastna i teorier men i det här fallet stämmer verkligheten inte överens med den, då det visat sig att de elever som endast fick möjlighet att erfara fyrhörningarna under lektionen var de som hade den största kunskapsökningen.

Den första lektionen genomfördes av Annika och de två sista lektionerna genomfördes av Lotta. Vi tror inte att detta har påverkat resultatet då vi planerat lektionerna in i minsta detalj och strikt följt planeringen vid undervisningstillfällena. ”Även om det är en enskild lärare som genomför lektionen planerar vi lektionen gemensamt i gruppen. Vad som händer under lektionen är därför allas ansvar.” (Holmqvist, 2006, s 26)

Om vi tolkat litteraturen rätt är det heller inte läraren i sig som är avgörande för elevernas möjlighet att erfara variationen av lärandeobjektet utan det är innehållet och hur det presenteras som är i fokus.

Då vi tidigare nämnt att det är viktigt att elever får utmaningar, är vi väldigt glada att vi valde att ha med alla fyra fyrhörningar, då det visat sig att 94 % av våra 49 elever har kunnat lära sig särskilja romben från de övriga fyrhörningarna samt att namnge romben korrekt. När det gäller parallelogram som inga elever i vår studie kände till innan undervisningen, var det 90 % av

eleverna som lärde sig särskilja parallelogram från de övriga fyrhörningarna samt att namnge parallelogram korrekt.

Vi tycker att learning study är en bra forskningsmetod som vi gärna ser att fler kommer att använda sig av framöver. Något som är säkert är att vi strävar efter att få fortsätta använda oss av learning study i vårt kommande yrkesliv. Vi känner att vi har ett bra underlag när det gäller undervisning i geometri inom vårt valda lärandeobjekt i årskurs 2. När det gäller vidareforskning anser vi att learning study kan användas som forskningsmetod inom alla skolans undervisningsområden. Nästa område som vi själv är intresserade av att forska vidare inom är taluppfattning för de lägre åldrarna samt att se hur läs- och skrivundervisningen kan utvecklas.

Referenslista

Litteratur

- Ahlström, R., Axelsson, H., Bergius, B., Emanuelsson, G., Emanuelsson, L., Holmqvist, M., Rystedt, E. & Wallby, K. (1996) *Matematik – ett kommunikationsämne*. Göteborg: Nämnaren nationellt Centrum för matematikutbildning, NCM
- Ashouri, E. (2006) Betydelsen av bokstaven s i slutet av engelska ord. I Holmqvist, M. (red) *Lärande i skolan. Learning Study som skolutvecklingsmodell*. Lund: Studentlitteratur
- Björklund, C. (2008) Hållpunkter för de yngsta förskolebarnens lärande av tidig matematik. I Engström, A. (red.) *Att erövra världen*. Dokumentation av konferensen Grundläggande färdigheter i läsning, skrivning och matematik, 26-27 november 2007, Linköpings universitet
- Bråten, I. (red) (1996) *Vygotskij och pedagogiken*. Lund: Studentlitteratur
- Carlgren, I. & Marton, F. (2000) *Lärare av imorgon*. Stockholm: Lärarförbundets Förlag
- Gustavsson, L. & Wennberg, A. (2006) Design experiment, lesson study och learning study. I Holmqvist, M. (red) *Lärande i skolan. Learning Study som skolutvecklingsmodell*. Lund: Studentlitteratur
- Hedrén, R. (1992) Van Hiele-nivåer och deras betydelse för geometri undervisningen. I Emanuelsson, G., Johansson, B. & Ryding, R. (red) *Geometri och statistik*. Lund: Studentlitteratur
- Heiberg Solem, I. & Lie Reikerås, E. K. (2004) *Det matematiska barnet*. Stockholm: Bokförlaget Natur & Kultur
- Holmqvist, M. (2006) *Lärande i skolan. Learning Study som skolutvecklingsmodell*. Lund: Studentlitteratur
- Holmqvist, M., Gustavsson, L. & Wennberg, A. (2008) Variation Theory – An Organizing Principle to Guide Design Research in Education. I *Handbook of Design Research Methods in Education*. London: Taylor & Francis Inc
- Malmer, G. (2002) *Bra matematik för alla. Nödvändig för elever med inlärningssvårigheter* Lund: Studentlitteratur
- Marton, F. (2003) *Learning Study – pedagogisk utveckling direkt i klassrummet. Forskning av denna världen - praxisnära forskning inom utbildningsvetenskap*. Stockholm: Vetenskapsrådet
- Marton, F. (1997) *Learning and awareness*. Mahwah, NJ: Erlbaum Associates
- Marton, F. & Booth, S. (2000) *Om lärande*. Lund: Studentlitteratur
- Marton, F. & Morris, P. (2002) (Eds) *What matters? Discovering critical conditions of classroom learning*. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis
- Marton, F., Runesson, U. & Tsui M. A. B (2004) The space of learning. I F. Marton & A.B Tsui. *Classroom discourse and the space of learning*. New Jersey: Erlbaum
- Runesson, U. (1999) *Variationens pedagogik. Skilda sätt att behandla ett matematiskt innehåll*. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis
- Runesson, U (2005) *Beyond discourse and interaction. Variation: a critical aspect for teaching and learning mathematics*. Cambridge Journal of Education, 35 (1), 69-87

- Runesson, U. & Marton, F. (2002) The object of learning and the space of variation. I F. Marton & P. Morris (Eds) *What matters? Discovering critical conditions of classroom learning* (pp.19-38). Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis
- Skolverket (1994) *Lpo 94. Läroplan för det obligatoriska skolväsendet, förskoleklass och fritidshemmet*. Stockholm. Utbildningsdepartementet
- Skolverket (2000) *Kursplaner och betygskriterier*. Stockholm. Skolverket
- Skolöverstyrelsen (1979) *Matematikterminologi i skolan*. Stockholm: Liber UtbildningsFörlaget
- Stigler, J W. & Hiebert, J. (1999) *The Teaching Gap: Best Ideas from the World's teachers for Improving Education in the Classroom*. New York: The Free Press
- Strandberg, L. (2006) *Vygotskij i praktiken: Bland plughästar och fuskklappar*. Stockholm: Norstedts akademiska förlag
- Svingby, G. (1986) *Kunskap och begrepp*. Stockholm: Liber Utbildningsförlaget
- Säljö, R. (2005) *Lärande och kulturella redskap. Om läroprocesser och det kollektiva minnet*. Stockholm: Norstedts Akademiska
- Ulin, B. (1998) *Klassisk geometri – motiv & mening*. Värnamo: Bengt Ulin och Ekelund förlag AB
- Vygotskij, L. (1980) *Psykologi och dialektik*. Stockholm: Norstedts & Söner
- Vygotskij, L. (1934/1999) *Tänkande och språk*. Göteborg: Daidalos
- Wernberg, A. (2005) *Variationsteorin i praktiken*. Forskningsarbete pågår – nationella Forskarskolan i Pedagogiskt Arbete, Umeå universitet, 316-332

Föreläsningar

- Holmqvist, M. Föreläsning via länk från Learning Study kurs, 7,5 hp vid Högskolan i Kristianstad, 20090612
- Marton, F. Föreläsning via länk från Learning Study kurs, 7,5 hp vid Högskolan i Kristianstad, 20090622
- WALS (World of Association of Lesson Study) årliga konferens december 2008, Hongkong
- Paulin, A. Föreläsning vid Nacka konferenscenter – 2008. Stockholm: Stockholms Universitet

Internet

- Nationalencyklopedin, 2009 <http://www.ne.se/geometri> 20090928

Bilagor

Bilaga 1 – Medgivande från målsman

xxx den 4 oktober 2009

Kära föräldrar till elever i årskurs 2 på xxx skola och xxx skola.

Vi heter Lotta Linton och Annika Billing och är lärarstudenter på Stockholms universitet.

Under veckorna 43–51 kommer vi att genomföra vårt examensarbete på xxx skola och xxx skola. Arbetet är en learning study i geometri.

Vi kommer att vid tre tillfällen besöka varje klass för att:

1. Genomföra ett förtest.
2. Undervisa i vårt valda ämne som handlar om hur eleverna på bästa möjliga sätt kan lära sig att se och förstå skillnader och likheter mellan fyrhörningarna; kvadrat, rektangel, romb och parallelogram.
3. Genomföra ett eftertest där vi kommer att analysera vilken av våra lektioner som fungerade bäst.

Vid det andra tillfället kommer vi att videofilma och fotografera under lektionen. Fokus kommer att ligga på oss själva som pedagoger och inte på barnen. Vi behöver göra dessa dokumentationer för att kunna reflektera och kritiskt granska våra insatser. Det blir svårt att genomföra detta utan att få med barnen på bild och därför vill vi nu få ert medgivande till att ditt barn får vara med i denna studie.

Dokumentationen kommer endast att ses av oss två och vår handledare. Vid arbetets slut kommer filmerna och fotografierna att raderas.

Vänligen lämna in denna blankett till klassföreståndaren **senast den 14 oktober 2009**.



Ja, mitt barn får vara med i studien.

Nej, mitt barn får inte var med i studien.

Barnets namn: _____

Målsmans underskrift: _____

Ort och datum: _____

Med vänlig hälsning

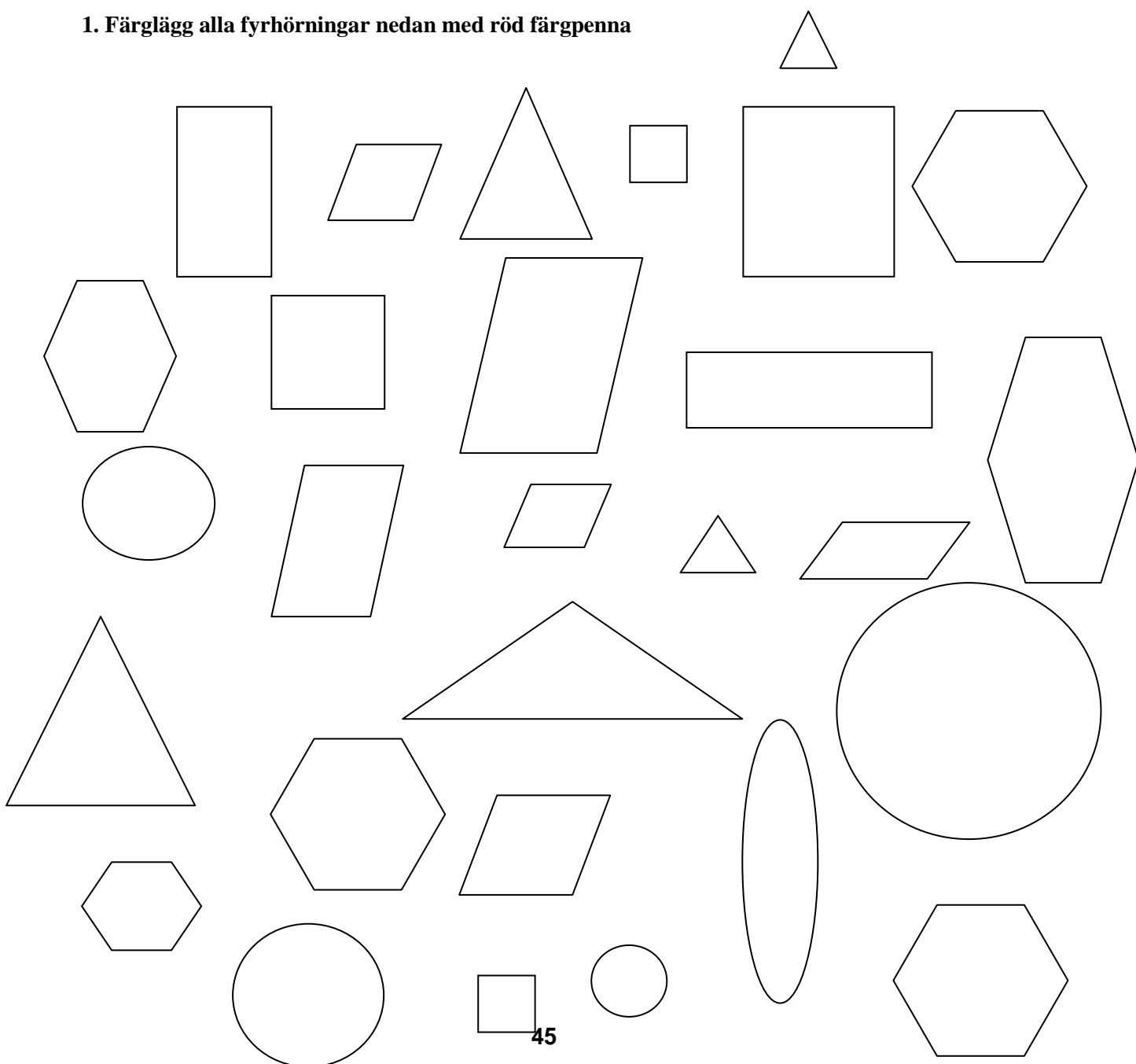
Lotta Linton och Annika Billing

**Bilaga 2 – För - och eftertest i learning study
kvadrat, rektangel, romb och parallelogram**

Geometri

Namn: _____ **Klass:** _____

1. Färglägg alla fyrhörningar nedan med röd färgpenna



2. Hur många hörn har en fyrkant?

3. Rita en fyrkant.

4. Kan du skriva ett annat namn på fyrkant?

5. Hur många hörn har en rund ring?

6. Rita en rund ring.

7. Kan du skriva ett annat namn för rund ring?

8. Hur många hörn har en trekant?

9. Rita en trekant.

10. Kan du skriva ett annat namn på trekant?

Rita och skriv om du kan svaret på följande frågor.

11. Hur många hörn har en kvadrat?

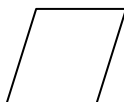
12. Rita en kvadrat.

13. Hur många hörn har en rektangel?

14. Rita en rektangel.

Här är en annan form:

15. Vad tror du den heter?

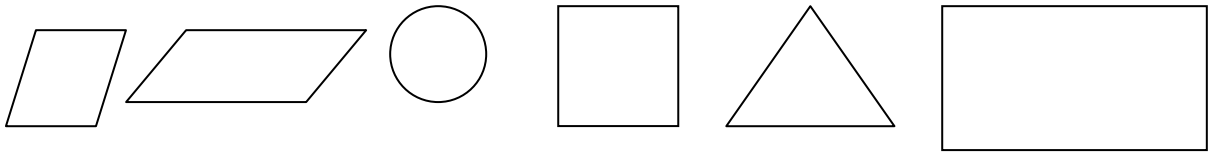


Här är en till:

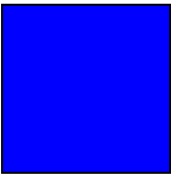
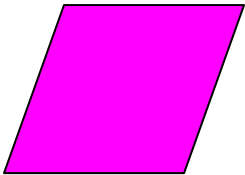
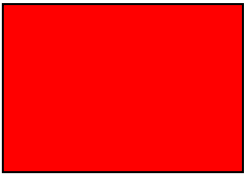
16. Vad heter den, tror du?


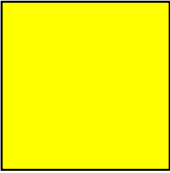
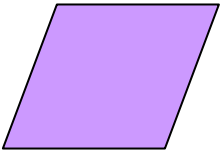



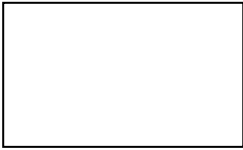
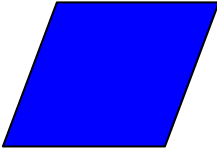
17. RITA EN DRAKE MED HJÄLP AV FORMERA NEDAN!
(Du får använda samma figur så många gånger du vill.)

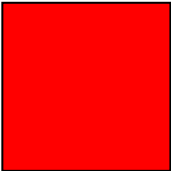

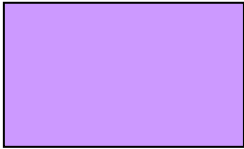


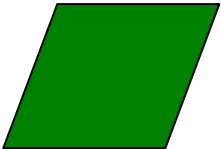
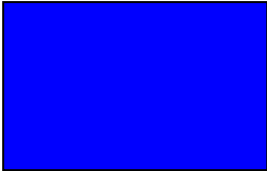
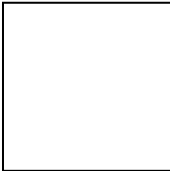
Bilaga 3 – Fyrhörningsormen

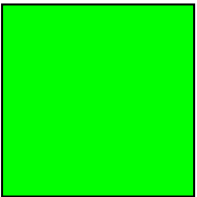
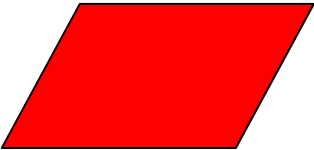
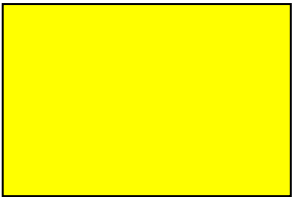
<p>Jag har en</p>  <p>Vem har en rosa romb?</p>	<p>Jag har en</p>  <p>Vem har en röd rektangel?</p>	<p>Jag har en</p>  <p>Vem har en grön parallelogram?</p>
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

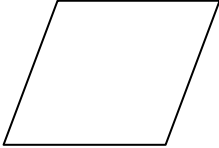
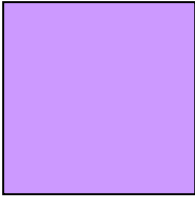
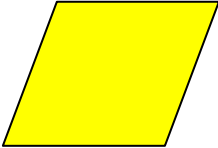
<p>Jag har en</p>  <p>Vem har en gul kvadrat?</p>	<p>Jag har en</p>  <p>Vem har en lila romb?</p>	<p>Jag har en</p>  <p>Vem har en svart kvadrat?</p>
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------


<p>Jag har en</p>  <p>Vem har en vit rektangel?</p>	<p>Jag har en</p>  <p>Vem har en blå romb?</p>	<p>Jag har en</p>  <p>Vem har en röd kvadrat?</p>
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

<p>Jag har en</p>  <p>Vem har en gul parallellgram?</p>	<p>Jag har en</p>  <p>Vem har en lila rektangel?</p>	<p>Jag har en</p>  <p>Vem har en grön romb?</p>
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

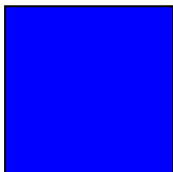
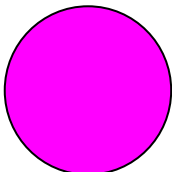
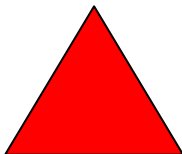
<p>Jag har en</p>  <p>Vem har en blå rektangel?</p>	<p>Jag har en</p>  <p>Vem har en vit kvadrat?</p>	<p>Jag har en</p>  <p>Vem har en grön kvadrat?</p>
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------


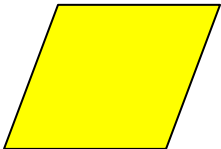

<p>Jag har en</p>  <p>Vem har en röd parallelogram?</p>	<p>Jag har en</p>  <p>Vem har en gul rektangel?</p>	<p>Jag har en</p>  <p>Vem har en vit romb?</p>
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

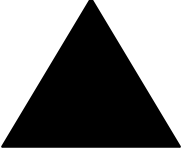
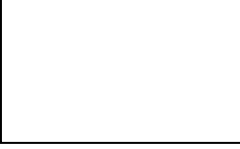
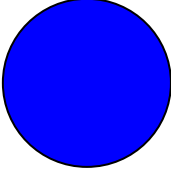
<p>Jag har en</p>  <p>Vem har en lila kvadrat?</p>	<p>Jag har en</p>  <p>Vem har en gul romb?</p>	<p>Jag har en</p>  <p>Vem har en Svart rektangel?</p>
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

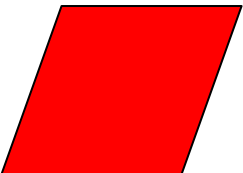
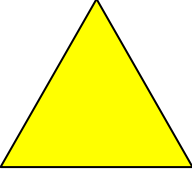

<p>Jag har en</p>  <p>Vem har en blå kvadrat?</p>	<p>Fyrhörnings- ormen</p> <p>22 kort</p> <p>Kvadrat Rektangel Romb Parallelogram</p>	
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--



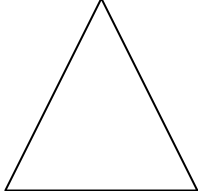
Bilaga 4 - Geometriormen

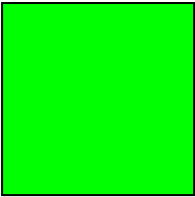
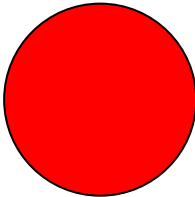
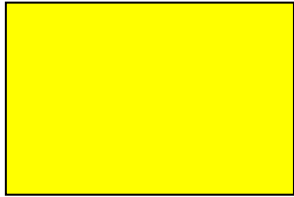
<p>Jag har en</p>  <p>Vem har en rosa cirkel?</p>	<p>Jag har en</p>  <p>Vem har en röd triangel?</p>	<p>Jag har en</p>  <p>Vem har en grön rektangel?</p>
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

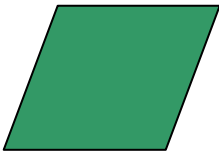
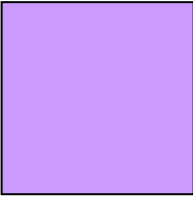
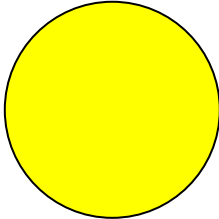
<p>Jag har en</p>  <p>Vem har en gul romb?</p>	<p>Jag har en</p>  <p>Vem har en lila parallelogram?</p>	<p>Jag har en</p>  <p>Vem har en svart triangel?</p>
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------


<p>Jag har en</p>  <p>Vem har en vit rektangel?</p>	<p>Jag har en</p>  <p>Vem har en blå cirkel?</p>	<p>Jag har en</p>  <p>Vem har en röd romb?</p>
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

<p>Jag har en</p>  <p>Vem har en gul triangel?</p>	<p>Jag har en</p>  <p>Vem har en röd rektangel?</p>	<p>Jag har en</p>  <p>Vem har en grön parallelogram?</p>
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

<p>Jag har en</p>  <p>Vem har en blå rektangel?</p>	<p>Jag har en</p>  <p>Vem har en vit triangel?</p>	<p>Jag har en</p>  <p>Vem har en grön kvadrat?</p>
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

<p>Jag har en</p>  <p>Vem har en röd cirkel?</p>	<p>Jag har en</p>  <p>Vem har en gul rektangel?</p>	<p>Jag har en</p>  <p>Vem har en grön romb?</p>
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

<p>Jag har en</p>  <p>Vem har en lila kvadrat?</p>	<p>Jag har en</p>  <p>Vem har en gul cirkel?</p>	<p>Jag har en</p>  <p>Vem har en Svart rektangel?</p>
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

<p>Jag har en</p>  <p>Vem har en blå kvadrat?</p>	<p>Geometriormen</p> <p>22 kort</p> <p>Kvadrat</p> <p>Rektangel</p> <p>Romb</p> <p>Parallelogram</p> <p>Cirkel</p> <p>Triangel</p>	
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--

Bilaga 5 – Geometri instruktioner



- ☺ Rita en gul triangel mitt på sidan.
- ☺ Rita en röd kvadrat till höger om triangeln.
- ☺ Rita en blå cirkel till vänster om triangeln.
- ☺ Rita en lila romb ovanför triangeln.
- ☺ Rita en grön rektangel ovanför romben.
- ☺ Rita en svart parallelogram under triangeln.



- ☺ Rita en gul cirkel mitt på sidan.
- ☺ Rita en röd romb till höger om cirkeln.
- ☺ Rita en grön kvadrat till vänster om cirkeln.
- ☺ Rita en röd parallelogram ovanför cirkeln.
- ☺ Rita en blå triangel till under om cirkeln.
- ☺ Rita en grön rektangel ovanför romben.
- ☺ Rita en svart kvadrat under triangeln.



- ☺ Rita en gul cirkel mitt på sidan.
- ☺ Rita en röd romb till höger om cirkeln.
- ☺ Rita en blå rektangel till vänster om cirkeln.
- ☺ Rita en grön triangel ovanför cirkeln.
- ☺ Rita en svart kvadrat under cirkeln.
- ☺ Rita en gul parallelogram under kvadraten.



- ☺ Rita en gul romb mitt på sidan.
- ☺ Rita en svart kvadrat till höger om cirkeln.
- ☺ Rita en blå rektangel till vänster om cirkeln.
- ☺ Rita en grön triangel ovanför cirkeln.
- ☺ Rita en röd parallelogram under cirkeln.
- ☺ Rita en lila cirkel under kvadraten.



- ☺ Rita en gul cirkel mitt på sidan.
- ☺ Rita en röd romb till höger om cirkeln.
- ☺ Rita en blå triangel till vänster om cirkeln.
- ☺ Rita en grön kvadrat ovanför cirkeln.
- ☺ Rita en svart rektangel under cirkeln.



- ☺ Rita en gul cirkel mitt på sidan.
- ☺ Rita en röd kvadrat till höger om cirkeln.
- ☺ Rita en blå romb till vänster om cirkeln.
- ☺ Rita en grön rektangel ovanför cirkeln.
- ☺ Rita en svart parallelogram under cirkeln.