



Examensarbete inom teknik

Grundnivå, 15 hp

Optimal kontroll av en cykel

IBRAHIM ABAKAR

Stockholm, Sverige 2022

1 Abstract

Optimal control is the study of how to choose control and state paths for a system to minimise a specific performance index. This theory was used to study how a bicycle could be controlled optimally to achieve balance. The bicycle was modeled with three state-parameters, the inclination of the bicycle θ , the angular velocity of the inclination $\dot{\theta}$ and the steering angle α . These states, in conjunction with the control variable $\delta = \dot{\alpha}$, were used together with dynamic programming and LQR-control, two branches in optimal control, to study control of the bicycle. The results show that the bicycle achieved balance in theory for both methods and with reasonable control paths. The controls that were observed were seen as intuitive, considering the startpositions.

2 Sammanfattning

Optimal kontroll är studien om hur man på bästa sätt kan kontrollera ett system, givet kontrollvariabler, för att minimera ett specifikt prestationsindex. Denna teori användes för att studera hur en cykel optimalt skulle kunna balanseras. Cykeln modellerades med tre tillståndsparametrar, dess lutning θ , vinkelhastigheten hos lutningen $\dot{\theta}$ samt dess styrvinkel α , som togs fram ifrån två differentialekvationer. Dessa tillstånd, tillsammans med en kontrollvariabel $\delta = \dot{\alpha}$, användes sedan med dynamisk programmering samt LQR-kontroll, två grenar inom optimal kontroll, för att undersöka kontroll av cykeln. Resultaten visar på att alla tillståndsparametrar konvergerar mot noll för båda metoderna innan sluttiden vilket indikerar på att cykeln lyckades balanseras, i teorin. Kontrollen som användes, styrets vinkelhastighet, var även rimlig och uppfattades som intuitiva.

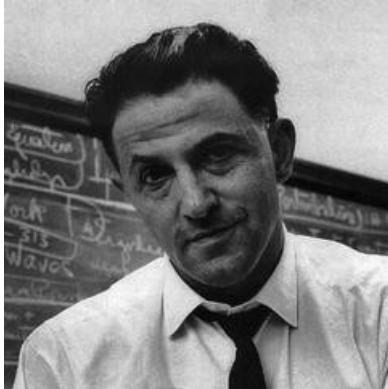
Innehåll

1 Abstract	2
2 Sammanfattning	3
3 Inledning	5
4 Bakgrund	5
5 Problemformulering	6
6 Teori	7
6.1 Dynamisk programmering	7
6.2 LQR-kontroll	8
7 Metod	11
7.1 Dynamisk programmering på cykelproblemet	11
7.2 LQR-kontroll på cykelproblemet	14
8 Resultat	16
8.1 Resultat från dynamisk programmering	16
8.2 Resultat från LQR	17
9 Diskussion	18
9.1 Optimal kontroll	18
9.2 LQR-kontroll	19
9.3 Förbättringar	19

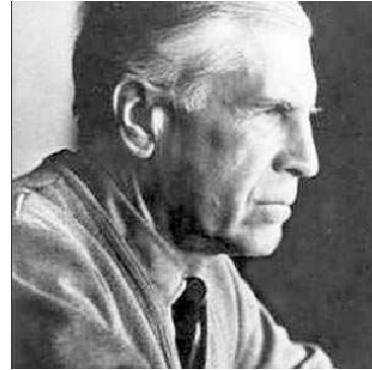
3 Inledning

Optimal kontroll, en gren inom reglerteori samt matematisk optimering, är studiet om hur man styr ett system, modellerat med differentialekvationer, med hjälp av utvalda kontrollvariabler. Som dess namn utger så är målet att styra en process till att följa någon prestationsvariabel så bra som möjligt. Det kan handla om att minska tiden för att ta sig mellan två punkter, minimera bränslet som går åt vid en månlandning eller kontrollera en robot.

4 Bakgrund



Figur 1: Richard Bellman



Figur 2: Lev Pontryagin

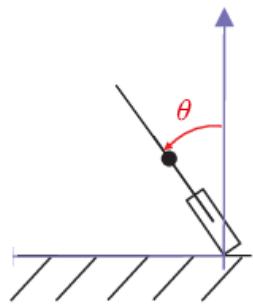
Under 1950 talet uppfann den Amerikanska matematikern Richard Bellman *dynamisk programmering* som revolutionerade studiet av optimal kontroll. Idén bygger på att dela upp ett problem i mindre bitar och lösa varje liten bit rekursivt för den optimala lösningen. Lyckas man lösa varje liten bit optimalt, blir även helheten en optimallösning. Vid dynamisk programmering arbetar man bakåt från sluttiden, detta för att, givet ett slutmål, stevvis ta den bästa vägen för att komma till slutmålet. Detta innebär att slutvilkoret på tillståndet har stor inverkan på vad den optimala lösningen kommer att vara. Optimala kontrollproblem kan lösas med hjälp av dynamisk programmering genom att lösa Hamilton-Jacobi-Bellman ekvationen, en utökning av Hamilton-Jacobi ekvationen, som Bellman gjorde, för att inkludera kontrollvariabler.

Samtidigt som detta skedde utvecklade den blinda matematikern, Lev Pontryagin, *Pontryagins minimeringsprincip* som också revolutionerade optimal kontroll. Principen menar att givet en Hamiltonian $H(x(t), u(t), \lambda(t), t)$, som är en funktion som används för att lösa optimala kontrollproblem, där x är tillståndet, u är insignalen, λ är en dual-variabel samt t är tiden. En insignal u^* är optimal om det gäller att:

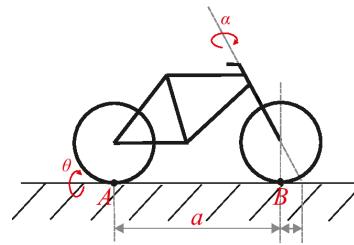
$$H(x(t), u^*(t), \lambda(t), t) \leq H(x(t), u(t), \lambda(t), t) \quad (1)$$

för alla insignaler u [1], en insignal är alltså optimal om den minimerar Hamiltonianen. Att minimera Hamiltonianen är mycket enklare än att minimera original kontrollproblemet, och det är därför denna metod används flitigt. Detta ledde även till Hamilton-Jacobi-Bellman ekvationen som också använder sig av en Hamiltonian.

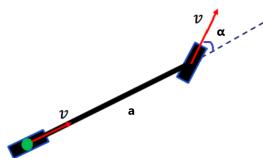
5 Problemformulering



Figur 3: Cykeln sedd framifrån



Figur 4: Cykeln sedd från sidan



Figur 5: Cykeln sedd uppifrån, där v är hastigheten och α är styrvinklen

Vinkeländringe för en cykel som är lutad vinkeln θ med styret vinklat vinkeln α (se figur 3-5), kan beskrivas av följande differentialekvationer tagen ur Timoshenko [4]:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\theta}{dt^2} &= \frac{g}{h}(\theta - \frac{v_a^2 * \alpha}{ga}) - \delta \frac{bv_a}{ha} \\ \frac{d\alpha}{dt} &= \delta(t) \end{aligned} \tag{2}$$

där g är tyngdaccelerationen, h är höjden till cykelns masscentrum, v_a är medelhastigheten för cykeln och $\delta(t)$ är kontrollvariabeln. Uppgiften är då att finna styrvariablen $\delta(t)$ så ett givet slutvilkor är uppfyllt.

6 Teori

6.1 Dynamisk programmering

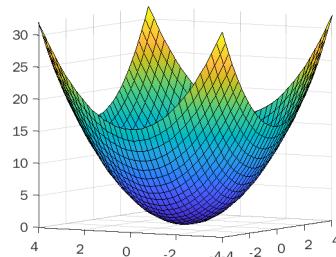
Dynamisk programmering är en metod för att lösa optimala kontroll problem med hjälp av en värdefunktion $u(x, t)$. Metoden går ut på att arbeta bakåt ifrån sluttiden T där värdefunktionen är given till något, $u(x, T) = g(x)$, och sedan rekursivt för små tidssteg Δt , hitta den optimala kontrollen för att ta sig till från $u(x, t)$ till $u(x, t + \Delta t)$. Värdefunktionen beskrivs av följande ekvation:

$$u(x, t) = \inf_{\delta \in A, X(t)=x} (g(X(T)) + \int_t^T h(X(s), \delta(s)) ds) \quad (3)$$

där inf är förkortning för infimum och är den största undre begränsningen. $g(X(T))$ och $h(X(s), \delta(s))$ är kostnadsfunktioner där g är en kostnad specifikt för tillståndet vid sluttidpunkten samt h är en kostnad för hela tidsintervallet. Dessa väljs som konvexa funktioner så att de ska ha ett minimum (ett exempel på en konvexfunktion ges i figur 6). Vidare är A mängden *tillåtna styrvariabler* $A = \{\alpha : [0, T] \rightarrow B \mid B \in R^m\}$ samt B är ett kompakt mängd, en sluten och begränsad delmängd. $X(s)$ är tillstånden och kommer ifrån dynamiken i systemet, alltså differentialekvationerna som beskriver systemet. Dynamiken i systemet beskrivs enligt följande:

$$\begin{aligned} X'(s) &= f(X(s), \delta(s)) \quad 0 < s < T \\ X(0) &= x_0 \end{aligned} \quad (4)$$

Där $\delta(s)$ är kontrollvariablerna för systemet och är de variabler som styr värdefunktionen till dess minimum. Den optimala lösningen är det tillstånd $X(s)^*$ samt kontrollvariabel $\delta(s)^*$ som minimerar värdefunktionen $u(x, y)$.



Figur 6: Konvex funktion

Värdefunktionen $u(x, t)$ är en lösning till den partiella Hamilton-Jacobi-Bellman differentialekvationen:

$$\begin{aligned}\partial_t u(x, t) + H(\partial_x u(x, t), x) &= 0 \\ u(x, T) &= g(x) \\ \text{där } u &\text{ antas vara deriverbar}\end{aligned}\tag{5}$$

där H är en hamiltonian och definieras som

$$H(X, \lambda) = \min_{\delta \in A} (\lambda f(X, \alpha) + h(X, \alpha)) \tag{6}$$

Vidare, ifall $u_x(x, t) \in C^1$, alltså är deriverbar och kontinuell, samt det optimala styrproblemet har ett optimalt tillstånd $X(t)$ samt en kontrollvariabel δ som kan ta en till detta tillstånd, så är $\lambda(t) = u_x(x, t)$ samt $X(t)$ lösningar till följande karakteristiska Hamiltonska randvärdesystemet:

$$\begin{aligned}\dot{X}(t) &= \nabla_\lambda H(X, \lambda), & X(0) &= x_0 \\ \dot{\lambda}(t) &= -\nabla_x H(X, \lambda), & \lambda(T) &= g_x(X(T)) \\ X &\in R^d, \lambda \in R^d\end{aligned}\tag{7}$$

där $X(t)$ är tillstånden till systemet, $\lambda(t)$ är dual-varibeln/Lagrangemutliplikatorn och $H(X, \lambda)$ är hamiltonianen för systemet. $\lambda(T) = g_x(X(T))$ är slutvilkoret för dualvariablen vid sluttiden T som medför att vid sluttiden är så dualvariablen lika med en funktion av tillståndsvariablen vid samma tidspunkt.

Det Hamiltonska-systemet kan sedan lösas numeriskt genom att stegar i tiden med Symplektiska/semi-implicita Euler metoden som är en symplektiska integratorer, en numeriska integratorer som används för lösa Hamiltonskasystem. Symplektiska Euler metoden beskrivs enligt följande:

$$\begin{aligned}X_{n+1} &= X_n + \Delta t \frac{\partial H}{\partial \lambda}(\lambda_{n+1}, X_n) \\ \lambda_n &= \lambda_{n+1} + \Delta t \frac{\partial H}{\partial x}(\lambda_{n+1}, X_n) \\ t_n &= \frac{n}{N}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N \quad \Delta t = t_{n+1} - t_n\end{aligned}\tag{8}$$

är X är tillståndsvariablen och λ är dualvariablen.

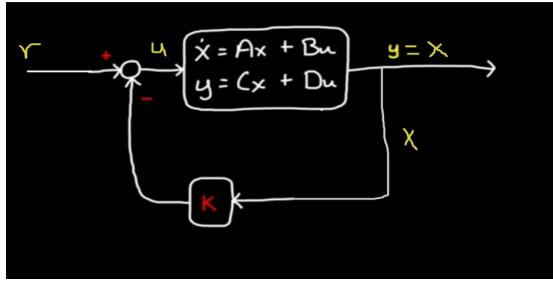
6.2 LQR-kontroll

LQR står för *linear quadratic regulator* och är en form av optimal kontroll som tillämpas på ett linjärt system på tillstånds form enligt följande:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}\tag{9}$$

Där A är en $(n \times n)$ matris, x är en $(n \times 1)$ vektor med alla tillståndsvariabler, B är en $(n \times 1)$ vektor som multipliceras med u som är insignalen. y är utdata från systemet och är lika med en $(n \times n)$ matris C gånger tillståndsvektorn x samt en $(1 \times n)$ vektor D som multipliceras med insignalen u .

Den optimala lösningen fås genom tillståndsåterkoppling av det linjära systemet. Genom att välja C -matrisen till en identitetsmatris samt D till en nollmatris så blir utsignalen $y = x$, alltså hela tillståndet och genom att återkoppla denna utsignal fås en fulltillståndsåterkoppling (se figur 7)



Figur 7: Tillståndsåterkoppling för LQR

LQR-kontroll tar nollskillda tillstånd och konvergerar dem mot noll med en insignal som tas fram genom tillståndsåterkopplingen. Givet ett starttillstånd tar LQR fram en optimal förstärkningsmatris K^* som med fulltillståndsåterkoppling ger en insignal $u = -Kx$ som konvergerar tillstånden mot noll, där $K = R^{-1}B^T S$ och S är lösningen till den algebraiska Riccati ekvationen:

$$A^T S + S A - S B R^{-1} B^T S + S + Q = 0 \quad (10)$$

Denna ekvation kommer bidra med flera lösningar på S men det är endast en av dem som ger ett K som ger ett stabilt slutet system $G_c = (A - BK)$, alltså ett system med strikt negativa egenvärden [2]. Med det S som ger ett stabilt slutet system, tas förstärkningen K fram som optimalt kommer ta tillstånden mot noll.

LQR tar fram den optimala lösningen genom använda sig av en kostfunktion J som ser ut som följande:

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) \quad (11)$$

Där x är en $(n \times 1)$ vektor med alla tillståndsvariabler, Q är en $(n \times n)$ symmetrisk positiv-semidefinit matris, u är en $(m \times 1)$ vektor med alla kontroll variabler samt R är en $(m \times m)$ symmetrisk positivdefinit matris.

Matriserna Q och R fungerar som ”avgifter” för tillstånden respektive insignalerna där ”dyrare avgifter” bidrar med en större kostnad. Q är kostnaden för

nollskillda tillstånd och R är kostnaden för nollskilda insignaler. Då Q är positiv semidefinit samt R är positiv-definit gäller det att $x^T Q x \geq 0$ respektive $u^T R u > 0$. Detta är användbart då variablerna endast kommer bidra med en positiv kostnad.

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & q_{nn} \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} r_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & r_{mm} \end{bmatrix}$$

Kostnadsmatrisserna Q och R där q_{11} är kostnaden för första tillståndet osv samt r_{11} är kostnaden för första in-signalen osv

$$\begin{aligned} x^T Q x &= q_{11}x_1^2 + \cdots + q_{nn}x_n^2 \geq 0 \\ u^T R u &= r_{11}u_1^2 + \cdots + r_{mm}u_n^2 > 0 \end{aligned} \tag{13}$$

Ekvation 13 visar att då kostnaderna alltid är större eller lika med noll samt tillstånden och in-signalerna kvadreras, kommer summan alltid att vara positiv

Definition. Givet matriserna A och B från det linjära systemet, då spänns alla styrbara tillstånd upp av styrbarhetsmatrisen S_s . Ett system är styrbart/kontrollerbart om och endast om $\det(S_s) \neq 0$. [2]

$$S_s = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B] \tag{14}$$

7 Metod

Följande konstanter är de som används

Tabell 1: Konstanter

Konstant	Beteckning	Värde
Cykelns längd	a	2 m
Masscentrums höjd	h	0.3 m
tyngdacceleration	g	9.81 kgm/s^2
Avstånd till vertikal axel	b	1 m
medelhastighet	v _a	4 m/s
Kontrollmoment (α)	M α	20 Nm
Kontrollmoment (θ)	M θ	100 Nm

7.1 Dynamisk programmering på cykelproblemet

För att använda dynamisk programmering på ekvationerna för cykeln, måste differentialekvationerna (se ekvation 1) först reduceras enligt följande.

$$\begin{aligned} y_1 &= \theta \longrightarrow \dot{y}_1 = \dot{\theta} = y_2 \\ y_2 &= \dot{\theta} \longrightarrow \dot{y}_2 = \frac{g}{h}(y_1 - \frac{v_a^2 * \alpha}{ga}) - \delta \frac{bv_a}{ha} \\ \dot{\alpha} &= \delta \end{aligned} \quad (15)$$

Tillståndsvektorn blir följande $Y(t) = [y_1 \ y_2 \ \alpha]^T$ och $\dot{Y}(t) = [\dot{y}_1 \ \dot{y}_2 \ \dot{\alpha}]^T$ där kontroll variabeln är $\delta = \dot{\alpha}$. För att kontrollen ska leda till balans ska tillståndsvariablerna bli lika med noll vid sluttiden T. Den optimala kontrollen, det som minimera värdefunktionen $u(x, t)$ (se ekvation 2), ska alltså vara att alla tillstånden är lika med noll vid sluttiden. Genom att välja de två kostnadsfunktionerna g och h till $g(Y(T)) = |Y(t)|^2$ samt $h(X(s), \delta(s)) = \delta^2$, så minimeras värdefunktionen då alla tillstånden är noll och styrvariabeln kommer inte nå för höga värden, då detta kommer leda till att kostnadsfunktionen h ger höga värden.

Med en dualfunktion $\lambda(t)$, med samma dimension som tillståndsvektorn, differential ekvationerna som beskriver systemet $f(Y, \delta)$ samt kostfunktionerna , kan Hamiltonianen ställas upp enligt ekvation 6

$$\begin{aligned}
H(\lambda, Y) &= \min_{\delta} (\lambda \cdot f(Y, \delta) + h(Y, \delta)) \\
h(Y, \delta) &= \delta^2 \\
g(Y) &= |Y|^2 \\
\lambda(t) &= [\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3] \\
f(Y, \delta) &= [\dot{y}_1 \quad \dot{y}_2 \quad \dot{\alpha}]^T \\
H(\lambda, Y) &= \min_{\delta} (\lambda_1 y_2 + \lambda_2 (\frac{g}{h}(y_1 - \frac{va^2\alpha}{ga}) - \delta \frac{bva}{ha}) + \lambda_3 \delta + \delta^2)
\end{aligned} \tag{16}$$

Hamiltonianen minimeras med avseende på δ då de termer som beror på δ minimeras. Minimipunkten hittas genom att derivera Hamiltonianen med avseende på δ och sedan sätta den lika med noll.

$$\begin{aligned}
&\min_{\delta} (-\delta \lambda_2 \frac{g}{h} \frac{bva}{ha} + \lambda_3 \delta + \delta^2) \\
&\frac{\partial}{\partial \delta} (-\delta \lambda_2 \frac{bva}{ha} + \lambda_3 \delta + \delta^2) = 0 \longrightarrow -\lambda_2 \frac{bva}{ha} + \lambda_3 + 2\delta = 0 \\
&\delta = \frac{1}{2} (\lambda_2 \frac{gbv_a}{h^2a} - \lambda_3)
\end{aligned} \tag{17}$$

Insättning av detta i Hamiltonianen ger följande:

$$H(\lambda, Y) = \lambda_1 y_2 + \lambda_2 \left(\frac{g}{h} \left(y_1 - \frac{v_a^2 \alpha}{ga} \right) - \frac{1}{2} \left(\lambda_2 \frac{gbv_a}{h^2a} - \lambda_3 \right) * \frac{bva}{ha} \right) + \lambda_3 \frac{1}{2} \left(\lambda_2 \frac{gbv_a}{h^2a} - \lambda_3 \right) + \frac{1}{4} \left(\lambda_2 \frac{gbv_a}{h^2a} - \lambda_3 \right)^2 \tag{18}$$

Med denna Hamiltonian ställs ett Hamitoniskt system upp enligt ekvation 7 vilket ger följande system.

$$\begin{aligned}
\dot{Y}(t) &= \begin{bmatrix} \nabla_{\lambda_1} H \\ \nabla_{\lambda_2} H \\ \nabla_{\lambda_3} H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{g}{h} \left(y_1 - \frac{v_a^2 \alpha}{ga} \right) - \frac{1}{2} \left(2\lambda_2 \frac{bva}{ha} - \lambda_3 \right) \frac{bva}{gha} + \frac{\lambda_3 bva}{ha} + \frac{1}{4} \left(2\lambda_2 \left(\frac{bva}{ha} \right)^2 - \frac{\lambda_3 2bva}{ha} \right) \\ \left(\frac{\lambda_2 bva}{ha} - \frac{\lambda_3}{2} \right) \\ \frac{\lambda_2 v_a^2}{a} \end{bmatrix} \\
\dot{\lambda}(t) &= \begin{bmatrix} \nabla_{y_1} H \\ \nabla_{y_2} H \\ \nabla_{\alpha} H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_2 g}{h} \\ \lambda_1 \\ -\frac{\lambda_2 v_a^2}{a} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{19}$$

Där slutvilkoret medför att $\lambda(T) = 2 * Y(T)$. Detta system lösas sedan numeriskt med symplektisk Euler enligt ekvation 8

$$\begin{aligned}
Y_{n+1} &= Y_n + \Delta t \frac{dH}{d\lambda}(\lambda_{n+1}, Y_n) \\
\lambda_n &= \lambda_{n+1} + \Delta t \frac{dH}{dx}(\lambda_{n+1}, Y_n) \\
\lambda(T) &= 2 * Y(T)
\end{aligned} \tag{20}$$

Detta resulterar i två ekvationer per tidssteg n , en för tillståndsvektorn Y samt en för dualen λ . Dessa ekvationer kan sedan skrivas om så att högerledet blir lika med noll. Detta resultera i ett system av ekvationer på följande form:

$$\begin{aligned} F(Y, \lambda) &= 0 \\ G(y, \lambda) &= 0 \end{aligned} \tag{21}$$

För N stycken tidsteg samt tre stycken tillståndsvariabler blir det ett $6N$ ekvationer. Då ekvationerna skrivits på denna form kan de lösas med itererande metoder som med hjälp av en startgissning kan konvergera till det optimala värdet. Givet en startgissning på lösningen, tas under varje iteration en approximativ lösning till ekvationsystemet, iterationerna fortsätter fram tills den approximativa lösningen hamnat under en viss fel tolerans. Här används *fsolve* i matlab, som är en algoritm som löser ekvationer på formen $F_i(x) = 0$ genom att minimera summan av de kvadrerade komponenterna i ekvationen. En startgissning på noll användes vid implementationen.

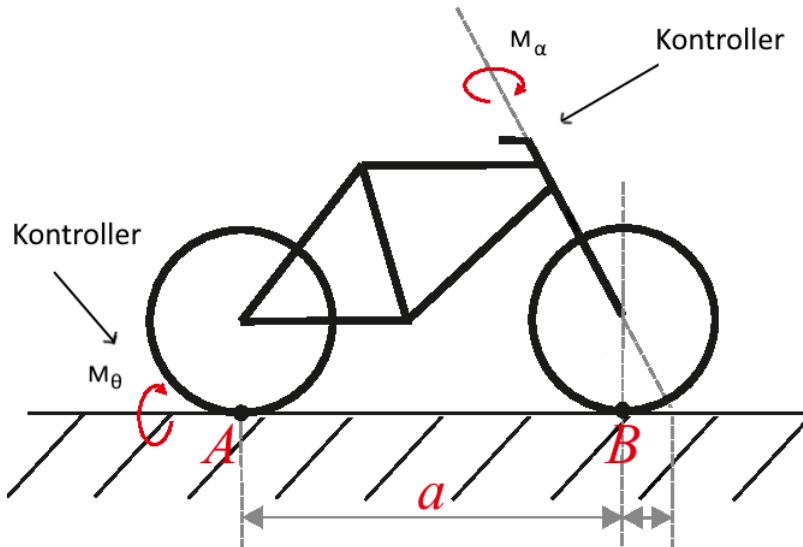
$$\begin{aligned} F_1 &= Y_1 - Y_0 - \Delta t \frac{dH}{d\lambda}(\lambda_1, Y_0) = 0 \\ F_2 &= Y_2 - Y_1 - \Delta t \frac{dH}{d\lambda}(\lambda_2, Y_1) = 0 \\ &\vdots \\ F_N &= Y_N - Y_{N-1} - \Delta t \frac{dH}{d\lambda}(\lambda_N, Y_{N-1}) = 0 \\ G_1 &= \lambda_1 - \lambda_2 - \Delta t \frac{dH}{dx}(\lambda_2, Y_1) = 0 \\ G_2 &= \lambda_2 - \lambda_3 - \Delta t \frac{dH}{dx}(\lambda_2, Y_1) = 0 \\ &\vdots \\ G_{N-1} &= \lambda_{N-1} - \lambda_N - \Delta t \frac{dH}{dx}(\lambda_N, Y_{N-1}) = 0 \\ G_N &= \lambda(N) - 2Y(N) = 0 \end{aligned} \tag{22}$$

7.2 LQR-kontroll på cykelproblemet

Differentialekvationerna för cykeln (se ekvation 1) kan reduceras till följande tillståndsvariabler:

$$\begin{aligned} x_1 &= \theta \implies \dot{x}_1 = \dot{\theta} \\ x_2 &= \dot{\theta} \implies \ddot{x}_2 = \ddot{\theta} = \frac{g}{h}(x_1 - \frac{v_a^2 * \alpha}{ga}) - x_4 \frac{bv_a}{ha} \\ x_3 &= \alpha \implies \dot{x}_3 = \dot{\alpha} = \delta \\ x_4 &= \dot{\alpha} = \delta \implies \ddot{x}_4 = \ddot{\alpha} = \frac{ga}{bv_a}(x_2 - \frac{v_a^2 * \delta}{ga}) - \frac{ha}{bv_a} * \frac{d^3\theta}{dt^3} \end{aligned} \quad (23)$$

Det som kontrollerar balansen hos cykeln är vinkeln på styret α samt lutningen på själva cykeln θ . Sedan kan det konstateras att, för att upprätthålla balans på en cykel krävs ett kraftmoment på styret samt ett kraftmoment för att upprätthålla lutningen θ . Dessa sätts som kontrollvariabler i form av kraftmomenten M_θ och M_α som kan ses kontrollers som placeras på cykeln.



Figur 8: Placering av kontroller på cykel

Ekvationssystemet 23 skrivs om till $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$
där det antas att $\frac{d^3\theta}{dt^3} = 0$

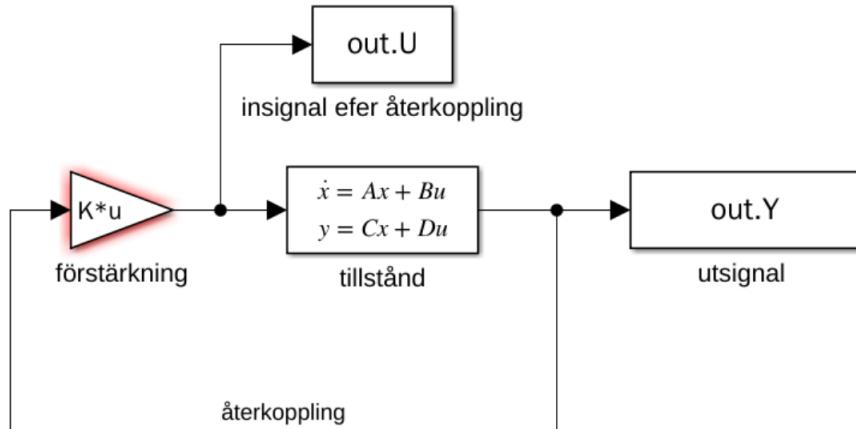
$$\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{g}{h} & 0 & \frac{-v_a^2}{ga} & -\frac{bv_a}{ha} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{ga}{bv_a} & 0 & -\frac{v_a}{b} \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} M_\alpha \\ 0 \\ M_\theta \\ 0 \end{bmatrix} \\
C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & D &= [0 \ 0 \ 0 \ 0]
\end{aligned} \tag{24}$$

Där g, h, v_a, b och a är konstanter som visas i tabell 1. Sedan tas kostnaderna Q och R fram

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \tag{25}$$

$$R = 1000$$

Styrbarhetsmatrisen S_s (se ekvation 14) tas sedan fram med A och B matriserna och det observerades att $\det(S_s) \neq 0$ vilket indikerar att systemet är styrbart. Detta innebär att LQR-kontroll kan användas på detta system. En simulink modell tas fram av tillstånds-återkopplingen och den algebraiska Riccati ekvationen (se ekvation 10) löses optimala K^* .



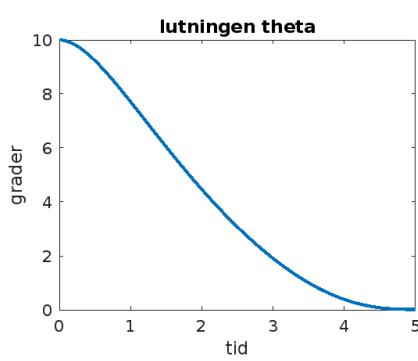
Figur 9: Simulink modell över LQR kontrollen

8 Resultat

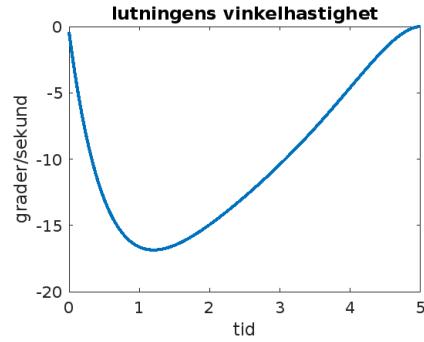
Denna sektion börjar med 8.1 där resultaten från dynamisk programmering visas genom att visa hur tillstånden samt kontrollvariabeln förändras under kontrollen. Sedan i 8.2 visas resultaten från LQR kontroll.

8.1 Resultat från dynamisk programmering

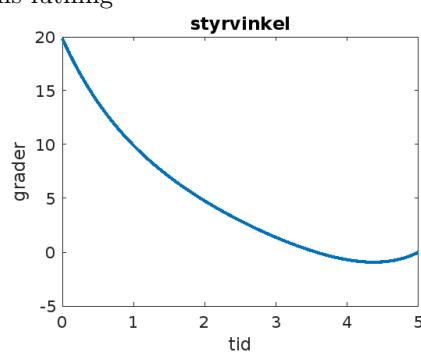
Lösning av symplektisk Euler med 500 tidssteg samt starttillståndet $x_0 = [\theta \quad \dot{\theta} \quad \alpha]^T = [10 \quad 0 \quad 20]^T$ ger följande resultat där första bilden visar hur cykelns lutning konvergerar från start tillståndet 10 deg till noll. Andra och tredje bilden visar hur lutningens-vinkelhastighet respektive styrvinkeln konvergerar från starttillstånden till noll och den fjärde bilden visar hur kontrollvariabeln $\delta = \dot{\alpha}$ förändras.



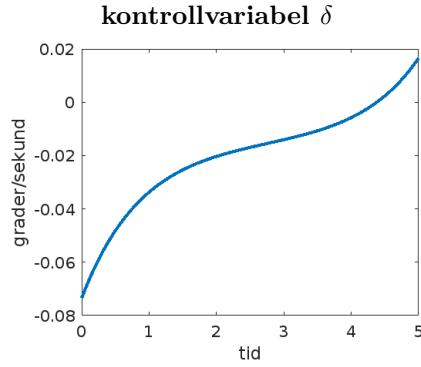
Figur 10: Cykelns lutning



Figur 11: Styrvinkeln



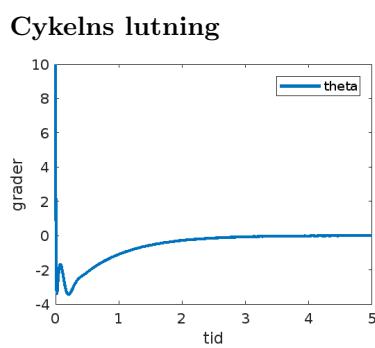
Figur 12: Vinkelhastigheten för lutningen



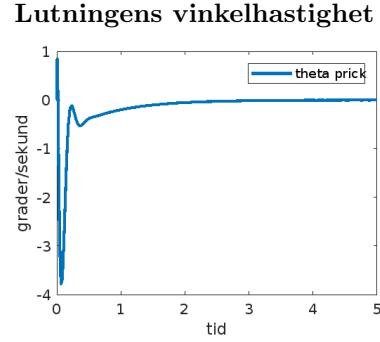
Figur 13: Optimal kontrollvariabel konvergens

8.2 Resultat från LQR

Resultaten av LQR där starttillstånden är $X_0 = [\theta \quad \dot{\theta} \quad \alpha \quad \dot{\alpha}]^T = [10 \quad 0 \quad 20 \quad 0]^T$. Figurerna 14-17 visar hur tillstånden startar från starttillstånden och konvergerar till noll. Figur 18 visar insignalen som kontrollerade tillstånden och tabell 2 visar de optimala förstärkningarna för varje tillståndsvariabel, som togs fram med LQR-kontrollet.



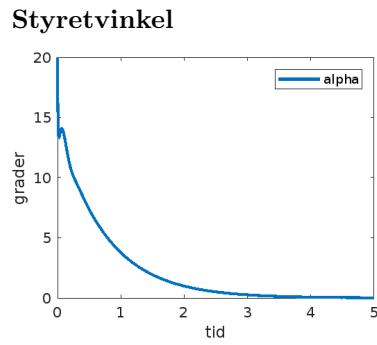
Figur 14: Cykelns lutning under LQR-Kontroll



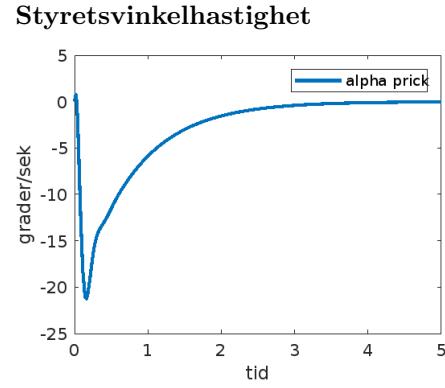
Figur 15: Lutningens vinkelhastighet under LQR-kontroll

Tabell 2: Optimala förstärkningar K^*

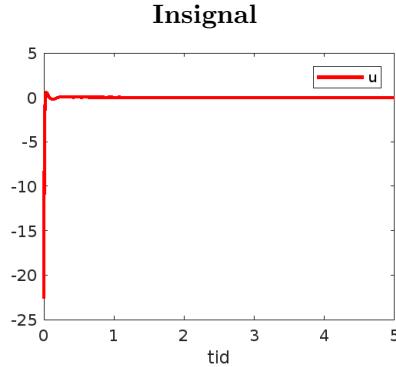
Tillstånd	θ	θ'	α	α'
K^*	0.6406	0.1964	0.3150	0.0742



Figur 16: Styrvinkel under LQR-kontroll



Figur 17: Styrets vinkelhastighet

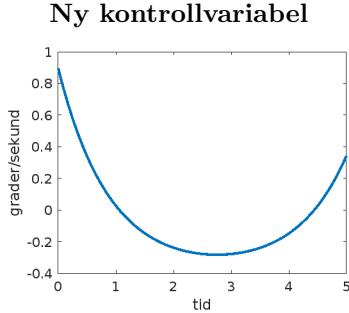


Figur 18: Insignal vid LQR-kontroll

9 Diskussion

9.1 Optimal kontroll

Det som observerades var att tillstånden konvergerade mot noll vilket tyder på att cykeln lyckas balanseras med hjälp av styrvariabeln. Då starttillståndet varieras så konvergerar tillstånden fortfarande mot noll vilket betyder att cykeln balanseras oberoende av starttillstånd. Dock konvergerar kontrollvariabeln δ till olika värden beroende på starttillstånd vilket är rimligt då vinkelhastigheten vid styret som krävs för att balansera cykeln är olika beroende på starttillståndet cykeln är i början. Ett exempel är om starttillståndet ändras till $[70 \ 10 \ 40]^T$ så varierar styrvariabeln δ mellan större värden vilket är rimligt då ifall cykeln är lutad mer behövs en högre vinkelhastighet vid styret för att upprätthålla balans.



Figur 19: Styrvariabel för nytt tillstånd

9.2 LQR-kontroll

Det som observerades var att det krävdes mest kontroll aktivitet då tillstånden var som mest nollskilda. Alla tillstånden konvergerade mot noll vilket indikerar på att LQR-kontrollen lyckats stabilisera cykeln. Små oscillationer förekom men dem som observerades var rimliga vid balansering av cykeln, till exempel så varierade lutningsvinkelhastighet snabbt mellan 1 och -3 grader/sekund vilket verkar rimligt.

Då kontrollvariablerna är moment vid styret respektive längs θ -led så gjordes kostnaden för kontrollvariablerna, R , hög relativt kostnaderna för nollskilda tillstånd Q . Detta för att insignalerna inte skulle gå mot orimliga värden som hade varit svårt att åstadkomma realistiskt. Tillstånden konvergerade relativt snabbt, runt en halv sekund, så ifall det var en riktig kontroller som var placerad på cykeln skulle cykeln inte hinna falla över innan kontrollerna hinner stabilisera den.

9.3 Förbättringar

Denna undersökning är på många sätt ofullständig. Ekvationerna som användes för att modellera cykeln är ideal och använder sig av många förenklingar samt antaganden som gör den bristfällig. Ekvationerna linjäriseras vilket innebär att de i bästa fall fungerar för små avvikelse och kan inte användas för att simulera ett verkligt scenario. Mer fullständiga ekvationer för att modelera cykeln samt bättre approximationsmetoder hade kunnat ge bättre resultat.

,

Referenser

- [1] Carlsson et al. *Stochastic Differential Equations: Models and Numerics*. 2021.
- [2] Glad Ljung. *Reglerteknik, Grundläggande teori*. Studentlitteratur, Stockholm, 2020.

- [3] Sandberg. *Approximation of Optimally Controlled Ordinary and Partial Differential Equations*. Universitetsservice US AB, Stockholm, 2006.
- [4] Stephen Timoshenko. *Advanced dynamics*. McGraw-Hill, New York, 1. ed.. edition, 1948.