UMEÅ UNIVERSITET

Med uppgift att lära

Om matematikuppgifter som en resurs för lärande

Jonas Jäder

Institutionen för naturvetenskapernas och matematikens didaktik
Umeå 2019

Detta verk är skyddat av svensk upphovsrätt (Lag 1960:729)
Avhandling för filosofie doktorsexamen
ISBN (tryckt): 978-91-7855-155-2
ISBN (digitalt): 978-91-7855-179-8
Omslagsfoton: I förgrunden, två elever i arbete med matematikuppgifter. I bakgrunden, uppgifter i läroböcker ingående i studie 1.
Illustrationer (figur 5, 6 och 11): Edward McNamara
Elektronisk version tillgänglig på: http://umu.diva-portal.org/
Tryck: Umu Tryckservice, Umeå Universitet
Umeå, Sverige, 2019

"Man tror man kan räkna ut
hur allt ska bli
Men man får allt ha en jävla tur
och ett spel som är stämt i dur
och inte minst min vän,
en hygglig fantasi"
(Lundell, 1982)

Innehållsförteckning

Abstract

Students' opportunities to develop their mathematical skills are influenced by the tasks they engage in. It is possible to make a distinction between routine tasks and mathematical problems. A routine task is a task that a student can solve by using familiar methods, or by imitating a template. To solve a mathematical problem, however, the student needs to construct, a for her, new solution method. To develop their mathematical knowledge, students need to meet both routine tasks and mathematical problems. It has been shown that students who are working with mathematical problems develop a greater mathematical understanding than students who work with routine tasks. Through problem solving a student can develop both a creative, problem-solving skill, and a conceptual, mathematical understanding. Too much emphasize on root learning and work on routine tasks is one reason for students' difficulties in learning mathematics.

This thesis consists of five studies. The purpose of study 1-3 was to investigate the opportunities to work with mathematical problem solving for students in upper secondary school. The purpose of studies 4 and 5 was to deepen the understanding of problem solving, by examining the challenges students encounter in problem solving, with a focus on conceptual and creative aspects.

The textbook analysis in study 1 investigated the proportion of mathematical problems in textbooks from twelve countries by analyzing whether a task could be solved by imitating a solution template presented by the textbook, or if a solution method had to be constructed. The analysis was conducted so that the proportion of mathematical problems for each of the different headings and task labels in each of the textbooks were recorded. Through classroom observations, study 2 examined the extent to which students used either routine work or problem solving to solve textbook tasks. Study 3 examined the relationship between students' beliefs of mathematics and their task solutions, with regard to routine work or problem solving through observations and interviews.

In studies 4 and 5, an analytical framework was developed and tested to identify creative and conceptual challenges in students' problem solving. To further deepen the understanding of the challenges and of mathematical problem solving, the challenges were characterized. In study 4, observations and interviews supported the analysis of students' mathematical problem solving

and the challenges they encountered. In study 5, data was collected from group interviews with teachers. Their expectations of the challenges students encounter in problem solving were analyzed.

Approximately 10 percent of the analyzed textbook tasks were mathematical problems. The students worked almost exclusively with the tasks labeled as easier. Among these tasks, the proportion of mathematical problems was 4 percent. Students seldom worked on mathematical problems. Instead, routine work and imitation constituted the greater part of their work on tasks. In task sections with heading such as ' problem solving ' or ' explore ' the proportion of mathematical problems was still well below 50 percent. The results were relatively similar for the textbooks from all twelve countries. Students' held beliefs that routine work is safer and something that is reasonable to expect in mathematics. These beliefs may impact their strive for mathematical problem solving. Considering the positive effects that have been demonstrated for students working with mathematical problems, the opportunities seems limited. There is potential in the development of textbooks to increase the proportion of mathematical problems, as well as in a deliberate task selection from these textbooks.

The analytic framework was developed with the support of the theory of concept image and used the concept of discrepancy in order to describe the challenges. Conceptual and creative challenges proved to be the most central in students' problem solving. Through the characteristic that was linked to each of the challenges, a discussion on the relationship between task and challenge is made possible.

Sammanfattning

Elevers möjligheter att utveckla sin kunskap i matematik påverkas av de uppgifter de arbetar med. Det är möjligt att göra en distinktion mellan rutinuppgifter och matematiska problem. En rutinuppgift är en uppgift som en elev kan lösa genom att använda en välbekant metod, eller genom att imitera en förlaga. För att lösa ett matematiskt problem behöver däremot eleven konstruera en för henne ny lösningsmetod. För att utveckla sin matematiska kunskap behöver elever möta såväl rutinuppgifter som matematiska problem. Problemlösning kan skapa förutsättningar för en elev att utveckla såväl en kreativ problemlösningsförmåga, som en konceptuell, matematisk förståelse. En anledning till elevers svårigheter i matematik är att undervisningen i alltför hög utsträckning fokuserar på arbete med rutinuppgifter och utantillinlärning.

Avhandlingen består av fem studier, där studie 1-3 syftade till att undersöka vilka möjligheter att arbeta med matematisk problemlösning genom matematikuppgifter, som elever i gymnasieskolan erbjuds. Syftet med studie 4 och 5 var att fördjupa förståelsen för problemlösning, genom att undersöka de utmaningar elever möter vid problemlösning, med ett fokus på konceptuella och kreativa aspekter.

I studie 1 undersöktes andelen matematiska problem i läroböcker från tolv länder genom att analysera möjligheten för en elev att imitera tidigare presenterade lösningsmetoder. Dessutom undersöktes andelen matematiska problem under olika rubriker och etiketter i läroböckerna. I studie 2 undersöktes i vilken omfattning elever använde rutinarbete respektive problemlösning för att lösa läroboksuppgifter, genom klassrumsobservationer. Och i studie 3 undersöktes, genom observationer och intervjuer, relationen mellan elevers uppfattningar om matematik och deras uppgiftslösning med avseende på rutinarbete eller problemlösning.

I studie 4 och 5 utvecklades och prövades ett analytiskt ramverk för att identifiera kreativa och konceptuella utmaningar i elevers problemlösning. Respektive utmaning karaktäriserades för att ytterligare fördjupa förståelsen för dessa och för problemlösning. I studie 4 studerades elevers arbete med matematiska problem och de utmaningar de mötte genom observationer och intervjuer. I studie 5 studerades lärares förväntningar på de utmaningar elever möter vid problemlösning, genom gruppintervjuer.

Av de analyserade läroboksuppgifterna utgjorde ungefär 10 procent matematiska problem. Eleverna arbetade nästan uteslutande med de uppgifter som av läroboksförfattarna kategoriserats som enkla. Bland dessa uppgifter var andelen matematiska problem 4 procent. Elever arbetade med problemlösning endast ett fåtal gånger. Istället utgjorde rutinarbete och imitation den större delen av deras arbete med uppgifterna. Inte heller bland uppgifter som kategoriserats som till exempel ’problemlösning’ eller ’utforska’ var matematiska problem i övervikt. Resultaten var relativt lika för de tolv ländernas läroböcker. Elevers uppfattningar om att rutinarbete är säkrare och något som är rimligt att förvänta sig i matematik kan ha en ytterligare påverkan på deras möjligheter att arbeta problemlösande. Med tanke på de positiva effekter som påvisats för elever som arbetar med problemlösning verkar elevers möjligheter att arbeta med problemlösning begränsade. Det finns potential i att såväl utveckla innehållet i läroböckerna för att öka andelen matematiska problem, som i ett medvetet uppgiftsurval från dessa läroböcker.

Det analytiska ramverket utvecklades med stöd av teorin om begreppsbilder och nyttjade begreppet diskrepans för att kunna beskriva utmaningarna. Konceptuella och kreativa utmaningar visade sig vara de mest centrala vid elevers problemlösning. Genom den karaktäristik som knöts till respektive utmaning kan svårigheter med att identifiera, framför allt kreativa utmaningar, och relationen mellan uppgift och utmaning diskuteras.

1 Inledning

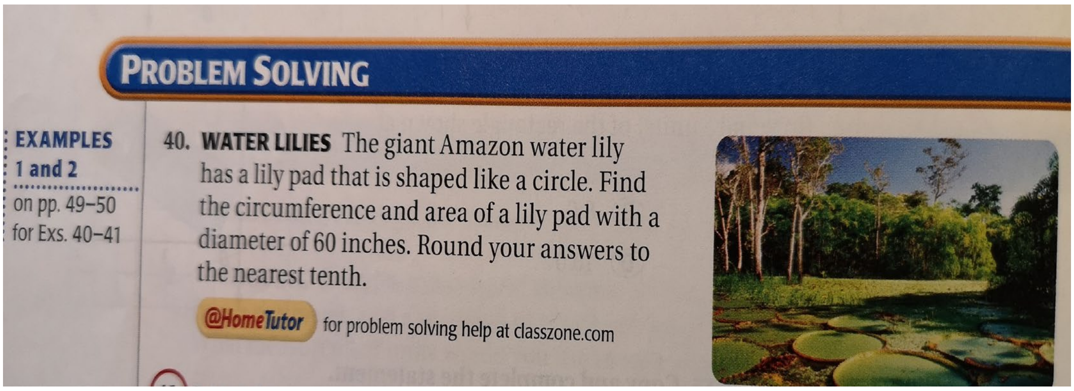
Ett övergripande fokus i den här avhandlingen är matematikuppgifter. Det vill säga, de uppgifter, i till exempel en lärobok, som elever arbetar med för att utveckla sin kunskap i matematik (Halldén, Scheja & Haglund, 2008; Stein & Smith, 1998). I matematik-undervisningen i Sverige och internationellt används läroböcker och matematikuppgifter som ett viktigt inslag och verktyg (Boesen m.fl., 2014; Mullis, Martin, Foy & Arora, 2012). I de sju medverkande länderna i TIMSS video study rapporterades att 80 procent eller mer av undervisningstiden upptogs av elevers uppgiftslösning (Hiebert, Gallimore, Garnier, Givvin, Hollingsworth, Jacobs, m.fl., 2003). Även i den svenska skolan rapporteras det att en stor del av undervisningstiden ägnas åt enskilt arbete då eleverna övar genom att lösa uppgifter från läroboken och från andra källor (Skolinspektionen, 2010). Dessa läroböcker och uppgifter påverkar elevernas möjligheter till lärande (Hiebert & Wearne, 1993; Schmidt m.fl., 2001; Valverde, Bianchi, Wolfe, Schmidt och Houang, 2002; Stein & Lane, 1996; Stein, Remillard & Smith, 2007). I resten av texten syftar termen uppgift hela tiden på en övningsuppgift i matematik.

Möjlighet är en översättning av engelskans *opportunity*. Att något görs möjligt innebär att det ”kan tänkas förekomma i visst sammanhang” (Nationalencyklopedin, utan datum). Opportunities to learn, möjligheter att lära, används inte sällan för att beskriva någon specifik aspekt av undervisningen i relation till elevers möjligheter att utveckla en viss förmåga. Möjligheterna baseras på en bild av det som erbjuds eleven. Lärande kan ses som en kognitiv process som pågår i en social miljö (Yackel & Cobb, 1996), vilket gör det ytterst komplext och något som påverkas av ett flertal parametrar. Att i relation till lärande då kunna säga något om vilka förutsättningar som krävs eller om en optimal omfattning av olika typer av lärandesituationer är svårt, eller omöjligt (Stylianides, 2009). Med avseende på möjligheter till lärande är det klart att med ökade möjligheter till lärande ökar sannolikheten att en elev utvecklar avsedd förmåga (Hiebert & Carpenter, 1992). En förmåga kan beskrivas som; ”en välinformerad beredskap att agera på lämpligt sätt i situationer som innebär en speciell typ av matematisk utmaning” (översatt beskrivning av danskans kompetence, från Niss & Jensen, 2002, s. 43).

Ju mer specifika vi kan bli kring vilken kunskap och vilka förmågor vi önskar utveckla, ju större potential finns för att undervisningen ska bli relevant och effektiv (Hiebert & Grouws, 2007). Desto mer vi känner till om hur olika förmågor relaterar till, exempelvis elevers arbete med matematikuppgifter, desto större möjligheter har vi att utveckla undervisningen i en önskad riktning (Niss, Bruder, Planas, Turner, & Villa-Ochoa, 2016). Genom att tydliggöra undervisningens lärandemål kan uppgifter utformas och väljas utifrån de förmågor som förväntas aktiveras vid uppgiftslösning (Fan & Bokhove, 2014; Simon & Tzur, 2004; Son & Kim, 2015; Watson & Sullivan, 2008).

1.1 Olika typer av uppgifter

För att i texten närma mig avhandlingens fokus, matematikuppgifter, presenteras i följande avsnitt tre olika uppgifter. Några av uppgifternas särskiljande drag beskrivs som en introduktion till resten av texten och som en grund för förståelse för de val som gjorts i arbetet med avhandlingen och dess studier. I en lärobok från USA återfinns uppgiften:


PROBLEM SOLVING

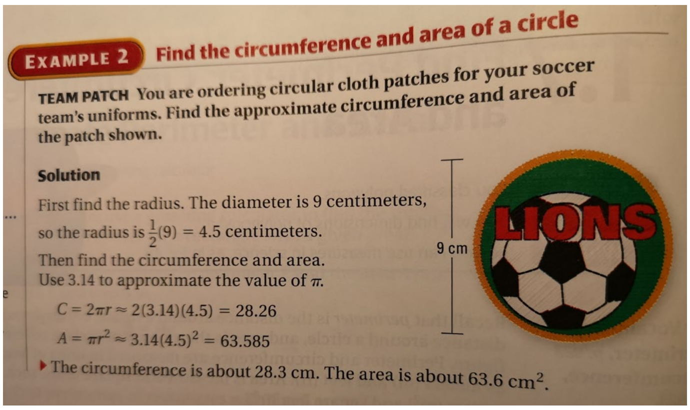
EXAMPLES 1 and 2 on pp. 49–50 for Exs. 40–41

40. WATER LILIES The giant Amazon water lily has a lily pad that is shaped like a circle. Find the circumference and area of a lily pad with a diameter of 60 inches. Round your answers to the nearest tenth.

@HomeTutor for problem solving help at classzone.com

Figur 1. Exempeluppgift 1 (Uppgift 40 i avsnitt 1.7, från Larson, Boswell, Kanold & Stiff, 2007, s. 54)

Intill uppgiften finns en hänvisning till ett löst exempel tidigare i samma avsnitt där beräkningar av omkretsen och arean på en tyglapp utifrån en angiven diameter, och med hjälp av formler, presenteras (se figur 2).


EXAMPLE 2 Find the circumference and area of a circle

TEAM PATCH You are ordering circular cloth patches for your soccer team's uniforms. Find the approximate circumference and area of the patch shown.

Solution

First find the radius. The diameter is 9 centimeters, so the radius is $\frac{1}{2}(9) = 4.5$ centimeters.

Then find the circumference and area. Use 3.14 to approximate the value of π.

$C = 2\pi r \approx 2(3.14)(4.5) = 28.26$

$A = \pi r^2 \approx 3.14(4.5)^2 = 63.585$

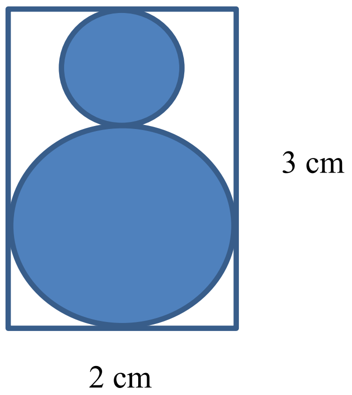
The circumference is about 28.3 cm. The area is about 63.6 cm^2.

Figur 2. Lösningsmall till exempeluppgift 1 (Från avsnitt 1.7, från Larson, Boswell, Kanold & Stiff, 2007, s. 50)

Om en elev som möter uppgiften är osäker på hur hon ska gå till väga finns alltså en möjlighet till vägledning i och med det lösta exemplet som i hög utsträckning påminner om uppgiften. Uppgiften kan således betraktas som en rutinuppgift. Genom att arbeta med uppgiften finns en god möjlighet för en elev att träna sig i att använda den procedur det innebär att beräkna radien utifrån en diameter och sedan sätta in detta värde i formlerna för omkrets och area.

Om en elev däremot möter en uppgift där hon vare sig, sedan tidigare känner till en lämplig lösningsmetod, eller kan få stöd av till exempel en lärare eller ett löst exempel med att finna en sådan metod, krävs ett annat angreppssätt. Ett exempel på en sådan uppgift kan vara nedanstående uppgift, hämtad från en svensk lärobok:

Hur stor andel av rektangeln i figuren nedan är skuggad?



Figur 3. Exempeluppgift 2 (Uppgift 4a i avsnittet ”Svarta sidorna”, från Carlsson, Hake & Öberg, 2017, s. 94)

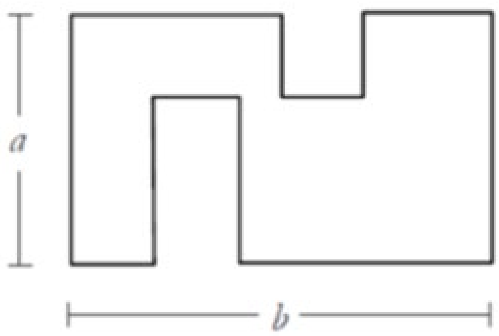
Även här krävs det att eleven beräknar arean på en cirkel. I fallet med den mindre cirkeln behöver först diametern beräknas som differensen mellan rektangelns sida (3 cm), och den större cirkelns diameter (2 cm). Det som krävs för att lösa uppgiften går alltså utanför proceduren för att beräkna arean med hjälp av en formel och en angiven diameter. Beroende på vad eleven har för tidigare erfarenheter kan givetvis även denna uppgift betraktas som en rutinuppgift. Å andra sidan kan det vara så att en elev inte tidigare har stött på en liknande frågeställning och inte behövt föra motsvarande resonemang som de som krävs för att komma fram till och genomföra beräkningen av diametern på den lilla cirkeln. För att lösa uppgiften behöver således eleven finna en, för henne, delvis ny lösningsmetod för att beräkna diametern och även integrera denna med en procedur för beräkningen av arean, som eventuellt är bekant. Eleven bereds i så fall genom arbete med uppgiften en möjlighet i att öva sig i att på egen hand konstruera en lösnings-metod. Beräkningen av den lilla cirkelns diameter bygger bland annat på att diametern på en cirkel är längden av sträckan från en ytterkant till en annan, genom mittpunkten. Det innebär i praktiken att en cirkels diameter är densamma oavsett riktning. Med hjälp av detta kan således sträckan 2 cm, som anges som ett mått för rektangelns bas, horisontellt, också beskriva ett vertikalt mått motsvarande den stora cirkelns diameter. Förutom att skapa en lösningsmetod behöver alltså en elev, för att lösa uppgiften, beakta specifika matematiska egenskaper hos de ingående begreppen, i detta fall, en cirkels diameter.

Ett exempel på en uppgift, med vars hjälp olika typer av kunskap kan beskrivas är följande uppgift, hämtad från ett äldre nationellt prov i Matematik:

Vilket av följande uttryck motsvarar figurens omkrets?

$a+b$ $2a+2b$ $3a+2b$ $3a+3b$ $4a+2b$

Motivera ditt svar.



Figur 4. Exempeluppgift 3 (Uppgift från Nationella kursprovet i Matematik, kurs A, vt 2010, del I, Skolverket, 2010, s. 3)

Om figuren i uppgiften istället föreställt en rektangel med basen b och höjden a hade sannolikt en elev i gymnasieskolan utan längre tvekan svarat att omkretsen är $2a+2b$. Antingen känner eleven sedan tidigare till att omkretsen av en rektangel beräknas som basen multiplicerat med 2, adderat med höjden multiplicerat med 2, eller så använder sig eleven av sin kunskap om omkrets som en summa av längden av alla sidor i en figur och beräknar omkretsen som $a+b+a+b$. I detta fall, då figuren inte är en rektangel krävs dock, förutom kunskapen om omkrets som en summa av längden av alla sidor i en figur, en metod för att hantera de avvikelser från en rektangel som finns i form av ”inbuktningar”, vars sidor inte har någon angiven längd.

1.2 Elevers arbete med uppgifter

Dessa exempel illustrerar hur olika uppgifter kan leda till att en elev arbetar med matematiken på olika sätt. I avhandlingen görs en distinktion mellan två huvudtyper av uppgifter, de av rutinkaraktär som kan lösas med en inlärd eller på annat sätt tillgänglig metod, och matematiska problem, där en elev behöver konstruera en, för henne, ny lösningsmetod (Lithner, 2008; Schoenfeld, 1985a; Skolverket, 2011a). Det har visat sig att alltför ensidigt fokus på rutinuppgifter och utantillinlärning hämmar utvecklingen av matematisk kunskap (Hiebert, 2003). Matematisk problemlösning, det vill säga arbete med ett matematiskt problem (Skolverket, 2011), kan dessutom innefatta aktiveringen av andra förmågor, och leda till att dessa andra förmågor utvecklas på ett positivt sätt (Boaler & Selling, 2017; Boaler, 1998; Hiebert m.fl., 1996; Hiebert, 2003; Jonsson, Norqvist, Liljekvist & Lithner, 2014; Schoenfeld, 1985a). I resten av texten syftar termen problemlösning hela tiden på en matematisk problemlösning.

Utmaningar, och ett visst mått av ansträngning och uthållighet har visat sig vara värdefulla komponenter vid problemlösning (Hiebert & Grouws, 2007; Russo & Hopkins, 2017a; Sullivan m.fl., 2015). I relation till problemlösning finns åtminstone två huvudtyper av utmaningar för elever, och som behandlas i den här avhandlingen. En konceptuell och en kreativ (Lithner, 2017), som var för sig kan säga något om vilken typ av arbete en elev involveras i vid problem-lösning. Genom att göra distinktionen mellan rutinuppgifter och matematiska problem tydliggörs den kreativa utmaningen. I den andra exempeluppgiften ovan beskrivs denna utmaning kunna bestå i att konstruera den del av lösningsmetoden där beräkningen av den lilla cirkelns diameter beräknas. Om denna metod på något sätt är ny för eleven, krävs att metoden konstrueras och knyts till de tidigare välbekanta delmetoderna för att skapa en helhetslösning. I exempeluppgiften beskrivs även en konceptuell utmaning som det kan innebära att beakta diameterns egenskaper för att kunna lösa uppgiften.

1.3 Syfte och frågeställningar

Avhandlingen består av två huvudsakliga delar. Syftet med den första delen, som kopplas till *studie 1-3*, är att undersöka vilka möjligheter att arbeta med matematisk problemlösning genom matematikuppgifter, som elever i gymnasieskolans erbjuds. Riktade möjligheter till lärande, inte minst genom arbete med matematisk problemlösning har visat sig viktigt för elevers lärande (Hiebert, 2003; Hiebert & Grouws, 2007). För elevers möjligheter till lärande i matematik spelar läroböcker och uppgifter en central roll (t.ex. Schmidt m.fl., 2001). Fokus i avhandlingen är på de aspekter av matematisk problemlösning som har att göra med elevers konstruktion av nya lösningsmetoder och de resonemang de behöver föra för att förutse och verifiera denna lösningsmetod. Detta undersöks genom att i:

- *Studie 1,* i ett urval av internationella läroböcker, undersöka andel rutinuppgifter respektive matematiska problem, samt var i läroböckerna dessa olika typer av uppgifter återfinns.
- *Studie 2* undersöka hur elever tar sig an dessa olika typer av uppgifter med avseende på rutinarbete eller matematisk problemlösning och de resonemang som förs.
- *Studie 3* undersöka och jämföra de sätt som elever angriper matematiska problem på med de uppfattningar om matematik som indikeras genom elevernas agerande.

Den andra delen av avhandlingen relaterar till *studie 4 och 5*. Genom att utveckla ett analytiskt ramverk för att kunna identifiera och särskilja de utmaningar som elever ställs inför vid matematisk problemlösning, är syftet med dessa två studier är att öka förståelsen för elevers möjligheter till lärande med stöd av matematikuppgifter och specifikt matematiska problem. Elevers lärande går hand i hand med de möjligheter de erbjuds att utveckla specifika förmågor (Hiebert & Carpenter, 1992; Hiebert & Grouws, 2007). En förmåga kan utvecklas genom att en elev möter en viss typ av utmaning (Niss & Jensen, 2002), och genom en utvecklad förståelse för relationen mellan dessa utmaningar och elevers arbete kan undervisningen utvecklas (Niss m.fl., 2016). Med utgångspunkt i initiala definitioner för konceptuella och kreativa utmaningar (Lithner, 2017) undersöks i:

- *Studie 4,* elevers arbete med matematiska problem och de utmaningar de möter.
- *Studie 5,* lärares förväntningar på de utmaningar elever kan möta.

Avhandlingen behandlar följande frågeställningar:

1. Vilka möjligheter erbjuds elever i gymnasieskolan att arbeta med problemlösning?

   Frågan behandlas framför allt med avseende på;

   a. andelen rutinuppgifter respektive matematiska problem i läroböcker
   b. hur elever arbetar med rutinuppgifter respektive matematiska problem
   c. elevers uppfattningar om matematik och matematiska problem

2. Vilka utmaningar möter elever vid problemlösning?

   Frågan behandlas genom att

   a. ett analytiskt ramverk utvecklas
   b. kreativa och konceptuella utmaningar identifieras och karaktäriseras

1.4 Avhandlingens fem studier

Avhandlingen bygger på fem studier. I samtliga fem studier studeras förhållandet mellan en elev och en uppgift, då en elev tillåts arbeta mer självständigt med en uppgift. I studie 1 och 5 är elevers arbete implicit och studierna bygger på en tänkt relation mellan elev och uppgift.

I avhandlingens studier används begreppen problemlösning (*studie 1, 4 och 5*), kreativa matematiska resonemang (*studie 2 och 3*), och arbete med icke-rutinuppgifter (*studie 2*), som kontraster till arbete med rutinuppgifter.

1.4.1 Studie 1: Mathematical problem solving in textbooks from twelve countries

Syftet med studien var att undersöka i vilken omfattning som läroböckerna erbjuder eleverna matematiska problem att arbeta med, och på vilket sätt omfattningen varierar mellan olika länder.

Studien presenteras i en artikel publicerad online i *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology.*

Avhandlingens författare är huvudförfattare till artikeln och har ansvarat för utformningen av analysmetoden, genomfört datainsamlingen och analysen samt författat artikeln med stöd av de två medförfattarna Johan Lithner och Johan Sidenvall. De bägge medförfattarna har bidragit kontinuerligt under processen med utformningen av analysmetoden samt stärkt reliabiliteten genom att inledningsvis parallellanalysera data, samt aktivt medverkat i skrivprocessen.

1.4.2 Studie 2: Students' reasoning in mathematics textbook task-solving

Syftet med studien var att undersöka på vilket sätt elevers resonemang påverkar deras uppgifts-lösande och hur detta relaterar till olika uppgiftstyper. Studien genomfördes parallellt med den första studien. De bägge studierna informerade varandra och till viss del utvecklades en djupare förståelse för läromedlen när vi fick se hur de användes, samtidigt som läromedlens uppbyggnad bidrog till hur klassrumsarbetet kunde analyseras.

Studien presenteras i en artikel publicerad i *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*.

Avhandlingens författare har bidragit till artikeln genom ett kontinuerligt samarbete med huvudförfattaren Johan Sidenvall och den andra medförfattaren Johan Lithner, kring utformningen av analysverktyget och i tolkningen av viss empiri, samt som ett stöd vid utformningen av texten.

1.4.3 Studie 3: Students' mathematical reasoning and beliefs in non-routine task solving

Studiens syfte var att undersöka vilka uppfattningar om matematik och problemlösning som elever visar upp i relation till de resonemang som förs vid problemlösningen.

Studien presenteras i en artikel publicerad i *International Journal of Science and Mathematics Education*.

Avhandlingens författare samt Johan Sidenvall är huvudförfattare till artikeln och har tillsammans genomfört datainsamlingen, analysen och skrivit artikeln med stöd av medförfattaren Lovisa Sumpter. Studien genomfördes i sin helhet efter de två inledande studierna.

1.4.4 Studie 4: The challenges of mathematical problem solving – The conceptual and the creative challenge

Syftet med studien var att utveckla ett analytiskt ramverk för att identifiera de utmaningar som elever möter vid problemlösning. Studien syftade även till att med hjälp av ramverket karaktärisera dessa utmaningar. Studien presenteras i en manuskript.

1.4.5 *Studie 5: The anticipated challenges of students' problem solving – Teachers' perception of conceptual and creative challenges*

Studiens syfte var att fördjupa förståelsen för konceptuella och kreativa utmaningar och dess karaktäristik och på så sätt skapa underlag för att vidareutveckla det analytiska ramverk som utvecklades i studie 4. Studien presenteras i ett manuskript.

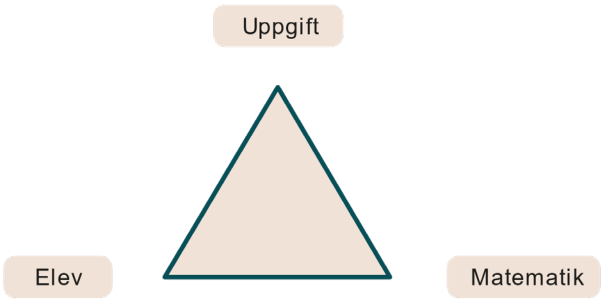
Avhandlingens författare är ansvarig för bägge manuskripten, och har med visst stöd av sina handledare Johan Lithner, Anna Teledahl och Mathias Norqvist, genomfört initiala litteraturgenomgångar, utvecklingen av det analytiska ramverket, insamlingen av empirin och analysen av densamma, samt författat manuskripten. Handledarna har bidragit som bollplank genom hela processen.

1.5 Allmänt om avhandlingen

Kappan för denna doktorsavhandling bygger delvis på författarens kappa till licentiatavhandlingen ”Elevers möjligheter till lärande av matematiska resonemang” (Jäder, 2015). Vissa delar av kappan är identiska eller har stora likheter med den tidigare publicerade licentiatavhandlingen, medan andra avsnitt, som utvecklar och ytterligare problematiserar texten med fokus på de studier som tillkommit, är nyskrivna. Två av doktorsavhandlingens artiklar (studie 2 och 3) ingick som en del av licentiatavhandlingen. Dessutom har artikeln för studie 1 reviderats från en tidigare, opublicerad version med annan titel, som ingick i licentiatavhandlingen.

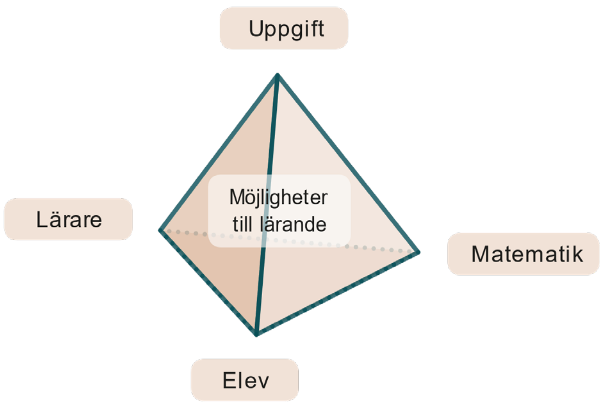
2 Bakgrund

Bakgrunden är uppbyggd för att kunna undersöka och diskutera de bägge övergripande frågorna om elevers möjligheter att arbeta med matematiska problem, respektive de utmaningar elever möter vid problemlösning. Genom undervisningsverktyg såsom läroböcker och uppgifter möter elever matematiken. I det följande sammanfattas dessa verktyg i det som utgör kärnan i avhandlingen, nämligen uppgifter. Likt den didaktiska triangeln kan relationen mellan elev, uppgift och matematiken visualiseras genom en triangel.



Figur 5. Matematikuppgifter som ett verktyg för lärande (fritt översatt och tolkad från Rezat & Strässer, 2012).

I bakgrunden är det i relationen kring matematiken, mellan elev och uppgift som fokus ligger. Det går dock att utveckla modellen genom att även knyta läraren till samspelet. På så sätt skapas en modell, med den didaktiska triangeln som grund, och med undervisningsverktyg (t ex uppgifter) som toppen på en tetraeder (Rezat & Strässer, 2012). De möjligheter till lärande som genereras med hjälp av uppgifter, ramas in av den didaktiska tetraedern och påverkas av de förutsättningar som ges av relationerna mellan de fyra parametrarna; elev, uppgift, matematik och lärare.



Figur 6. Den didaktiska tetraedern (fritt översatt och tolkad från Rezat & Strässer, 2012).

Tetraedern synliggör inte bara relationen mellan elev, uppgift och matematiken, utan skapar även grund för att, till exempel beskriva en lärares roll att påverka relationen mellan elev och uppgift. En adidaktisk situation skapas av en lärare för att ge en elev möjlighet att möta matematiken genom, till exempel en uppgift (Brousseau, 1997). Med tanke på lärares centrala roll för undervisningen, behandlas i ett avsnitt i bakgrunden även relationen mellan lärare och uppgift med avseende på uppgiften som undervisningsverktyg för elever. Det är således de relationer som synliggörs i de två framåtvända sidorna i tetraederna som är grunden för bakgrunden.

2.1 Uppgifter och läroböcker i matematik

Termen *uppgift* (engelskans *task*) används inte sällan utan att definieras. Förståelsen för termen skapas istället utifrån det sammanhang som den används i. I flera fall lyfts exempel på uppgifter fram för att tydliggöra vad som avses med termen. En uppgift kan till exempel innebära en övning i en lärobok (t.ex. Bergqvist, Lithner & Sumpter, 2008), eller en instruktionsuppgift, som innebära en aktivitet, frågeställning, situation eller instruktion som en lärare presenterar som underlag för att beskriva ett matematiskt innehåll (Boston & Smith, 2011; Kaur, 2010; Watson & Sullivan, 2008). Även uppgiftens roll för att skapa mening åt matematiken och dess påverkan på klassrummet lyfts fram (Gresalfi & Barab, 2011). En uppgift som ett verktyg för undervisning, meningsskapande, målinriktning eller för att fokusera en specifik matematisk idé, återkommer i flera definitioner, där lärarens syfte med uppgiften är centralt (Berg, Fuglestad, Goodchild & Sriraman, 2012; Coles & Brown, 2016; Guberman & Leikin, 2013; Boston & Smith, 2011). Då relationen mellan elev och uppgift är i fokus är aktivitet en central del av definitionerna (Doyle, 1983; Stein & Smith, 1998; Zaslavsky, 2008). Doyle (1983) beskriver denna aktivitet som något som utgår från en frågeställning eller uppfordran och som utmynnar i ett slutresultat.

En *uppgift* definieras i denna avhandling som en övning som används för att stötta en elevs lärande (Halldén, Scheja & Haglund, 2008), genom att rikta elevens uppmärksamhet på, och aktivitet mot, specifika matematiska idéer (Boston & Smith, 2011; Stein & Smith, 1998). Den didaktiska tetraedern beskriver relationerna genom att de uppgifter som används i undervisningen, tillsammans med eleven och matematiken bildar en sida, en triangel (Rezat & Strässer, 2012). Definitionen smalnas av ytterligare till att gälla uppgifter som är väl avgränsade i form av en frågeställning eller instruktion, och där detta formulerats skriftligt som en del i en sekvens av uppgifter i till exempel en lärobok, på ett prov eller i en annan uppgiftssamling. Definitionen innebär därmed inte att det nödvändigtvis är en lärare som aktivt skapat lärande-situationen, utan kan vara något som en elev företar sig på eget initiativ (Coles & Brown, 2016).

Den, för undervisningen i matematik, viktigaste uppgiftssamlingen är läroboken (Stein, Remillard & Smith, 2007). En *lärobok*, kan beskrivas som en bok som är anpassad efter en viss målgrupp eller ålderskategori och som består av en strukturerad samling genomgångar med tillhörande uppgifter. Det har rapporterats från flera länder att en av lärobokens mest avgörande funktioner är just tillhandahållandet av uppgifter för elever att arbeta med (O'Sullivan, 2017; Pepin & Haggarty, 2001; Skolinspektionen, 2010; Stein, Remillard & Smith, 2007). I vissa läroböcker kategoriseras dessutom uppgifterna av författarna utifrån svårighetsnivån (Brehmer, Ryve & van Steenbrugge, 2016) eller förväntningar på arbetssätt (Schmidt m.fl., 2001) genom etiketter eller rubriker. Lärares och elevers uppfattning om läroboken är främst som en uppgiftssamling (Pepin & Haggarty, 2001; Randahl, 2012). Det har tidigare visat sig att de uppgifter som svenska gymnasieelever främst arbetar med, hämtas från läroböcker (Skolinspektionen, 2010). Genom att studera uppgifterna i läroböcker kan man skapa sig en översiktlig bild av det matematiska innehållet i boken (Schmidt, 2012). Schmidt (2012) beskriver läroboken som en mall för skeendet i klassrummet, och ser tydligt kopplingen mellan läroboken, undervisningen och lärandet. Trots att en lärobok kan användas på många olika sätt kan dess innehåll fungera som en indikator på elevernas möjligheter till lärande (Schmidt, 2012). Ett sätt att utveckla undervisningen kan därför vara genom att utveckla en läroboks utformning (Newton & Newton, 2007; Van Steenbrugge & Ryve, 2018).

2.2 Läroboks- och uppgiftsanalys

Förutom ett fåtal studier som använt sig av TIMSS-data (t.ex. Schmidt m.fl., 2001; Valverde m.fl., 2002), har inga studier där läroböcker från fler än tre länder analyseras med samma verktyg, identifierats. En övergripande slutsats som dras i flera studier baserad på data från TIMSS är att läroböcker behöver utvecklas för att erbjuda större utmaningar för elever i alla åldrar och på alla kunskapsnivåer (Schmidt m.fl., 2001; Valverde m.fl., 2002). Trots att uppgifterna utgör en central del av många läroböcker i matematik, har få studier ett fokus på uppgifterna i läroboken (Li, 2000), och ännu färre en inriktning på de möjligheter till lärande av specifika kompetenser, som erbjuds med stöd av uppgifter. Av relevans för denna avhandling är framför allt studier med fokus på matematiska resonemang och problemlösning, och på analys av läroböcker för undervisning på gymnasiet. Då urvalet visade sig högst begränsat har även läroböcker som används i undervisningen åren före eller efter gymnasiet inkluderats.

I en studie av svenska gymnasieläroböcker uppmärksammas att de matematiska problemen är få, och ofta svårtillgängliga i slutet av kapitlen (Brehmer m.fl., 2016). Även på universitetsnivå verkar uppgifter som erbjuder problemlösning vara få (Lithner, 2004). Liknande resultat presenteras för irländska gymnasieläroböcker, likväl som för undervisning i Singapore (Kaur, 2010; O'Sullivan, 2017). Wijaya, van den Heuvel-Panhuizen och Doorman (2015) undersöker applikationsuppgifter i indonesiska läroböcker i årskurs 9 och 10, och drar bland annat slutsatsen att få uppgifter kräver att elever reflekterar över sitt tillvägagångssätt och den matematik som används, medan många uppgifter är av rutinkaraktär. I högstadieläroböcker i Australien visar sig en obalans i form av en hög andel rutinuppgifter på bekostnad av matematiska problem (Vincent & Stacey, 2008). Liknande resultat presenteras för läroböcker på mellanstadiet från USA (Jones & Tarr, 2007) och Kina (Li, 2000). I matematisk bevisföring är resonemangen och de argument som används centrala. Det finns flera studier som undersöker elevers möjligheter att utveckla sin förmåga att genomföra matematiska bevis. Sammantaget visar dessa studier på en låg andel uppgifter med bevisföring i läroböcker från USA (Bieda, Ji, Drwencke & Picard, 2014; Thompson, Senk & Johnson, 2012; Davis, Smith, Roy, & Bilgic, 2014; Stylianides, 2009), Kanada (Hanna & de Bruyn, 1999), England och Japan (Jones & Fujita, 2013), samt Sverige och Finland (Bergwall & Hemmi, 2017).

Dessa resultat sammantaget visar att andelen matematiska problem i läroböckerna är låg i relation till andelen rutinuppgifter. Inte heller på internet är omfattningen av matematiska problem bland uppgifter av högre omfattning (Liljekvist, 2016). Termer som 'låg' och 'hög' är i sammanhanget relativa termer, och det är inte klart om det finns någon ideal fördelning mellan olika typer av uppgifter, och vilken den fördelningen i så fall är (Stylianides, 2009).

2.3 Problemlösning

En distinktion mellan olika typer av uppgifter kan göras genom att betrakta huruvida en lösningsmetod används på rutin eller konstrueras av eleven som löser uppgiften. Ett *matematiskt problem* definieras som en typ av uppgift där en elev behöver konstruera en för henne ny lösningsmetod (Lithner, 2008; Schoenfeld, 1985a, Skolverket, 2011). I kontrast till matematiska problem finns rutinuppgifter vilka en elev kan lösa genom att använda välbekanta eller på annat sätt tillgängliga lösningsmetoder. Detta kan till exempel innebära att metoden presenteras i en lärobok eller av en lärare. I vissa fall används 'matematiskt problem' synonymt med 'uppgift' (t.ex. Hiebert & Wearne, 1993), vilket inte avses i denna avhandling.

Kategoriseringen av uppgifter är beroende av förhållandet mellan vad som krävs för att lösa uppgiften, och vilka erfarenheter en elev har av liknande uppgifter.

Arbete med *rutinuppgifter* karaktäriseras av att det finns en för eleven välbekanta eller på annat sätt tillgänglig metod, lämplig att använda (Lithner, 2008). Detta kan betraktas som ett *procedurellt* tillvägagångssätt (Hiebert & Carpenter, 1992). En procedurell kunskap består av det formella matematiska språket och algoritmer (Hiebert & Lefevres, 1986). Detta inkluderar till exempel en medvetenhet om de matematiska symbolerna och om hur man hanterar dem, samt regler, procedurer och algoritmer som kan användas för att lösa matematiska uppgifter (Hiebert & Lefevre, 1986). Procedurell kunskap, eller metodförmåga kan också innebära att välja och värdera ändamålsenliga metoder (Skolverket, 2011a; Skolverket, 2011b). *Problemlösning* å andra sidan innebär att en elev arbetar med ett *matematiskt problem*, för vilket hon inte har en tillgänglig lösningsmetod (Lithner, 2008; Schoenfeld, 1985a; Skolverket, 2011a). Huruvida en uppgift är ett matematiskt problem baseras således på relationen mellan vad uppgiften kräver och de erfarenheter en elev har, och vad som är ett matematiskt problem för en elev, behöver inte nödvändigtvis vara det för en annan. En problemlösningsprocess är svår att förutse då den bygger på individens kreativitet, och på de resonemang som förs för att konstruera en ny lösningsmetod (Boston & Smith, 2009; Choppin, 2011). Definitionen av problemlösning skulle kunna inkludera att en viss ansträngning (Hiebert & Grouws, 2007), uthållighet (Russo & Hopkins, 2017a; Sullivan m.fl., 2015), eller utforskande verksamhet (Schoenfeld, 1985a) krävs. I avhandlingen ligger dock fokus på just konstruktionen av en ny lösningsmetod.

Det finns flera sätt att särskilja olika typer av uppgifter, som ställer olika krav på en elev (e.g. Stein & Smith, 1998; Fan & Bokhove, 2014). Stein och Smith (1998) gör detta genom att kategorisera uppgifter som låg- eller högnivåuppgifter, utifrån den kognitiva ansträngning som krävs, och de resonemang en elev kan tänkas behöva för att lösa uppgiften. Lågnivåuppgifter kan lösas genom att en metod eller ett svar memorerats eller genom att en procedur används utan kopplingar till ingående begrepp. I uppgifter på hög nivå förväntas eleverna antingen använda procedurer med koppling till de ingående begreppen i bekanta situationer, eller ”matematisera”, vilket innebär ett mer utforskande arbetssätt där metoden inte är given, utan konstrueras i takt med att de i uppgiften ingående begreppen utforskas. En liknande kategorisering föreslås av Fan och Bokhove (2014).

Olika typer av uppgifter kan kopplas till olika lärandemål (Fan & Bokhove, 2014). De matematiska förmågor som en elev använder sig av vid uppgiftslösning ger en bild av elevens kunskap (Sierpinska, 1994). De krav på användning av olika matematiska förmågor som en uppgift kräver skapar dessutom möjligheter för eleven att utveckla dessa förmågor (Heibert & Carpenter, 1992). De olika förmågorna representerar inte diskreta kategorier, utan är ibland överlappande, och relaterade till samt stöttar varandra (Niss, 2003). Då en elev möter en rutinuppgift är det sannolikt att hon inte argumenterar för sin lösning (strategival) på annat sätt än genom ett *imitativt resonemang* (Lithner, 2008) som kan kopplas till utantillinlärning (Lithner 2008; Hiebert, 2003) och en låg kognitiv ansträngning som i lågnivåuppgifter (Stein & Smith, 1998). Eleven baserar argumenten (för en diskussion om argument vid uppgiftslösning, se Lithner, 2008) på en hänvisning till tidigare erfarenheter och tidigare lösta uppgifter (Lithner, 2008; Liljekvist, Lithner, Norqvist & Jonsson, 2013). I kontrast till arbete med rutinuppgifter kan arbete med högnivåuppgifter betraktas som mer än att inneha information. Om eleven får arbeta med ett matematiskt problem ökar möjligheten att hon tränar sin problemlösningsförmåga genom att använda ett *kreativt matematiskt resonemang*, där konstruktionen av lösningsmetoden (strategivalen) baseras på matematiskt grundade (implicita eller explicita) argument och motiv (Lithner, 2008; Liljekvist m.fl., 2013). Likt i högnivåuppgifter krävs att hänsyn tas till de ingående matematiska begreppen och på förståelse (Fan & Bokhove, 2014). Genom att matematisera utför en elev något som har potential att utveckla hennes förståelse för matematiken (Stein & Smith, 1998). Att utveckla en problemlösningsförmåga kan ses som såväl ett mål i sig, som ett medel för att utveckla andra förmågor (Skolverket, 2011a), så som en resonemangsförmåga och konceptuell förståelse. Ett resonemang kan användas för att förklara eller bevisa en kunskap. Men resonemang kan även användas för att utforska, för en elev, ny matematik och skapa förståelse för nya begrepp eller procedurer och bygga ny kunskap. Ball och Bass (2003) beskriver det som att en diskussion om matematisk förståelse blir meningslös utan en tonvikt på resonemang. Att resonera innebär att flera andra förmågor införlivas i en process för att kunna dra önskade slutsatser. I avhandlingen definieras resonemang enligt Lithner (2008) som utfallet av den tankebana som antagits för att formulera påståenden och dra slutsatser. En elevs tankebanor är således en produkt av något som skapas i en specifik miljö. Till exempel bör det beaktas att en elevs presentation av en lösning på en uppgift beror på den miljö vilken eleven befinner sig i. Definitionen gör det möjligt att kategorisera resonemang utifrån vilken typ av kunskap som används, och som imitativt eller kreativt matematiskt. De resonemang som en elev använder vid uppgiftslösning kan betraktas som centrala för elevens möjligheter till lärande, där imitativa resonemang kopplas till arbete med rutinuppgifter och kreativa matematiska resonemang till problemlösning (Jonsson m.fl., 2014; Lithner, 2008).

Hur förståelsen för de matematiska begreppen används kan exemplifieras med hjälp av ett exempel tidigare presenterat av Lithner (2003).

> En elev frågar sin lärare om $a^5 \cdot a^3 = a^{15}$. Eleven minns att beräkningen har något att göra med att addera eller multiplicera exponenterna, men inte vilket av räknesätten som är det korrekta.

Det är inte självklart att elever tar sig an den utmaning det innebär att, till exempel använda och utnyttja en matematisk förståelse (Stein, Grover & Henningsen, 1996). Eleven i exemplet har som föresats att minnas ett tillvägagångssätt snarare än att förstå vad tal skrivna i exponentform innebär. Målet för en elev är inte nödvändigtvis att lära sig något specifikt, utan att lösa uppgiften (Rezat, 2009). Exemplet visar hur en algoritmisk syn på matematiken och ett procedurellt tillvägagångssätt kan hämma eleverna i deras utveckling av en förståelse för matematiken. En fråga som bör ställas i relation till exemplet är, varför eleven, istället för att försöka erinra sig en specifik algoritm, inte beaktar de grundläggande egenskaperna hos potenstal. I detta fall hade det räckt att eleven förstod och beaktade att a^{m} bara är ett mer smidigt sätt att representera en upprepad multiplikation $\mathrm{a} \cdot \mathrm{a} \cdot \mathrm{a} \cdot \mathrm{a} \cdot \cdot \cdot \mathrm{a}$ med m faktorer. Med hjälp av denna förståelse och ett resonemang kring antalet faktorer i a^5 respektive a^3 kan en slutsats dras där $\mathrm{a}^5 \cdot \mathrm{a}^3 = \mathrm{a}^8$. Länken mellan metodvalet och det konceptuella kan synliggöras i de argument, matematiska resonemang, som baseras på en matematisk grund (Lithner, 2008). Det går att se en tankebana, som pseudokonceptuell (Vinner, 1997) där de uppgifter som en elev arbetar med i klassrummet involverar matematiska begrepp, men även möjliggör att begreppen används på ett mer rutinmässigt sätt, utan att reella konceptuella hänsyn tas. Sättet som en elev använder matematiken kan sägas spänna från användningen av helt memorerade svar, via användningen av procedurer med varierad koppling till de bakomliggande matematiska begreppen, till matematiserande, där eleven utforskar sambanden mellan begrepp och dess egenskaper och representationer (Stein & Smith, 1998). Fan och Bokhove (2014) beskriver att förmågan att utvärdera och konstruera en lösningsmetod kan utvecklas i samspel med såväl en förståelse för varför en metod fungerar rent matematiskt, samt med förmågan att välja och nyttja de algoritmer som redan är välbekanta.

Skemp (1976) beskriver två typer av förståelse som särskiljs genom att man antingen enbart vet hur något genomförs, eller vet hur samt varför någonting genomförs. Om valet av metod baseras enbart på argument som att ”det fungerade förra gången”, ”min kompis/boken/läraren använde den metoden” eller ”uppgiften påminner om en annan där metoden fungerade” kanske inte några konceptuella hänsyn tas. Detta kan visa sig i såväl förutsägande som verifierande argument i en elevs lösning till en uppgift (Lithner, 2008). Arbete med rutinuppgifter är svårt att förena med ett fokus på förståelse för varför något fungerar (McNeal, 1995). Algoritmer kan i själva verket motverka utvecklingen av en konceptuell kunskap (Kamii & Dominick, 1997). Det finns skäl att tro att färdiga resonemang som presenteras för en elev inte i samma utsträckning utvecklar en förståelse för matematiken, som om eleven själv får utveckla dessa resonemang (Norqvist, 2017). Inom en begränsad kontext och mer kortsiktigt kan ”rules without reasons” (Skemp, 1976), grundlösa regler, vara välmotiverat. Men om å andra sidan en förståelse för en större helhet finns skapas utrymme för en större flexibilitet (Skemp, 1976). Det har visat sig mer värdefullt och effektivt att skapa en förståelse för de procedurer som används i matematiken än att lära sig utantill (Hiebert, 2003). Hiebert (2003) menar att det är mer troligt att en elev minns en procedur om hon förstår hur den fungerar. Dessutom ökar då sannolikheten att eleven kan applicera proceduren i nya sammanhang.

En konceptuell förståelse, att utveckla en problemlösningsförmåga och förmågan att resonera matematiskt betonas som värdefullt av forskning (Niss m.fl., 2016; Schoenfeld, 1985a), och i styrdokument för skolan i Sverige (Skolverket, 2011a), och internationellt (Boesen m.fl., 2014; Department of Education, Republic of South Africa, 2008; Ministry of Education, Ontario, 2005; Kilpatrick m.fl., 2001; Ministry of Education, Singapore, 2012; NCTM, 2000). Forskning har visat att ett alltför ensidigt fokus på arbete med rutinuppgifter kan hämma kunskapsutvecklingen och skapa svårigheter i inlärningen (Hiebert, 2003). Problemlösning och att utveckla en problemlösningsförmåga är dock inte bara ett mål i sig, utan kan även användas som ett verktyg för att utveckla andra förmågor (Skolverket, 2011a), så som en resonemangsförmåga och konceptuell förståelse (Hiebert m.fl., 1996; Hiebert, 2003; Jonsson m.fl., 2014; Boaler, 1998; Schoenfeld, 1985a). Likt problemlösning kan matematiska resonemang beskrivas som såväl ett mål som ett medel (Ball & Bass, 2003). Genom ett minskat fokus på procedurellt arbete kan möjligheterna till att utveckla en djupare förståelse för de matematiska begreppen skapas (Boaler, 1998) och resonemangsförmågan utvecklas (Jonsson m.fl., 2014). Elever som kontinuerligt i sin matematikundervisning får arbeta med problemlösning uppvisar också en större förståelse för ämnets relevans för vardags- och yrkesliv (Boaler & Selling, 2017), och presterar bättre på prov (Boaler, 1998).

2.4 Elevers uppgiftslösning

Möjligheterna för en elev att utveckla sin kunskap beror inte bara på en uppgifts utformning utan även på sättet som eleven väljer att angripa uppgiften på (Stein, Grover & Henningsen, 1996). För att förstå vilka potentiella möjligheter till lärande som erbjuds av olika typer av uppgifter, är det viktigt att kunna beskriva och förutse elevers arbete med dessa uppgifter (Stein, Engle, Smith & Hughes, 2008). Att lösa en uppgift kan beskrivas som att gå igenom flera olika faser och att genomföra olika handlingar. Lösningsprocessen beror på vilken typ av uppgift som en elev arbetar med (Lithner, 2008). Genom att identifiera olika faser i lösningsprocessen och hur dessa kan se ut i relation till, till exempel rutinuppgifter respektive matematiska problem, är det möjligt att koppla en elevs lösningar till olika uppgiftstyper.

Pólya (1957) beskriver en problemlösningsprocess som en sekvens av handlingar som måste genomföras för att nå en slutsats. Det första steget är att förstå själva problemet. Därefter ska en lösningsmetod konstrueras genom att identifiera de centrala matematiska begreppen av betydelse för lösningen. Steg tre blir att implementera lösningsmetoden och slutligen bör metoden och slutresultatet verifieras. Beskrivningen liknar den som Schoenfeld (1985a) föreslår, där en iteration av samtliga eller några av de sex handlingarna; läsa, analysera, utforska, planera, implementera och verifiera betonas. Processen kan appliceras även på rutinarbete. Men i dessa fall består arbetet fram till implementeringen framför allt av att bekräfta likheten med tidigare lösta uppgifter. En iteration kan svara mot hela uppgiftens frågeställning eller en deluppgift som kan användas för att komma vidare i uppgiftslösningen (Lithner, 2008). Efter att eleven läst, tolkat och förstått uppgiften ställs hon inför en första deluppgift, med tillhörande frågeställning. Deluppgiften bygger på en önskad progression i uppgiftslösningen och på de matematiska begrepp som anses centrala för uppgiften. Eleven behöver möta deluppgiften genom att göra ett strategival. Då en elev löser en rutinuppgift, kan implementeringen följa mer eller mindre direkt på att (del)uppgiftens innebörd har blivit klar, med en enbart basal planering. Planeringen består då inte av att konstruera en för eleven ny eller bortglömd lösningsmetod, utan bygger på bekanta aspekter av uppgiften som kan kopplas till tidigare lösta uppgifter och dess lösningsmetod, som kan imiteras. Ett strategival bygger i dessa fall således på ytliga egenskaper hos uppgiften (Lithner, 2008). Å andra sidan, då en elev möter ett matematiskt problem, till vilket en lösningsmetod inte är given för eleven, krävs andra avvägningar. Strategivalet kan vara att utforska de matematiska begreppen i uppgiften för att kunna göra ett lämpligt val, eller att konstruera en lösningsmetod som för eleven inte är välbekant (i sin helhet). En explicit eller implicit argumentation krävs för att motivera valet, och för att förutse och verifiera en lösningsmetod och ett svar eller slutsats (Lithner, 2008). Lösningssekvensen avslutas så med en slutsats som leder, antingen till en ny deluppgift och en ny iteration, eller till att uppgiften fått en slutlig lösning. Deluppgifterna kan redan från start vara givna av en mer övergripande lösningsidé, eller utvecklas på vägen i ett mer utforskande arbetssätt (Schoenfeld, 1985a), där slutsatsen från en deluppgift är del av ett underlag för formuleringen av en ny deluppgift.

2.5 Elevers uppfattningar om matematik

Elevers uppfattningar om matematik har visat sig i hög utsträckning påverka sättet som de angriper matematiska problem på och deras möjligheter till lärande (Schoenfeld, 1992). I relation till undervisning och lärande byggs uppfattningen om matematik upp, av till exempel uppfattningar om de matematikuppgifter som används i undervisningen (Hiebert & Wearne, 1993), och av uppfattningar om vad som är matematisk kunskap (Lampert, 1990).

Jag har i avhandlingen valt att fritt översätta det engelska begreppet *beliefs*, med *uppfattningar*. Detta är inte självklart, och affektiva begrepp omfattas ofta av ett stort mått av intuitiv förståelse. Vid en översättning av ett begrepp finns en risk att den intuitiva förståelsen delvis ändras. Uppfattningar kan betraktas som baserade på såväl konceptuella som affektiva komponenter (McLeod, 1992), och som stabila, och mer beständiga i jämförelse med exempelvis känslor (Hannula, 2006). Stabiliteten beror dock på de definitioner som används (Liljedahl, Oesterle & Bernèche, 2012). I denna avhandling betraktas en uppfattning som en individs bild av vad som är matematik, vilket påverkar individens matematiska beteende och sättet varmed individen förstår matematiken (Sumpter, 2013).

I relation till elevers uppgiftslösning har tre olika typer av uppfattningar hos elever identifierats; förväntningar, motivation och säkerhet (Sumpter, 2013). Förväntningar kan vara antingen i relation till eleven själv, till exempel att man bara klarar av att lösa en uppgift genom att använda ett memorerat tillvägagångssätt (Schoenfeld, 1992), eller i relation till externa faktorer så som till exempel hur uppgifter ska lösas. Exempel på sådana förväntningar som kan påverka eleverna är att en uppgift enbart har en korrekt lösning och ett korrekt svar och att uppgifter ska kunna lösas inom fem minuter, eller inte alls (Schoenfeld, 1992). Elever har dessutom visat sig ha uppfattningen att matematik är fragmentariskt och uppbyggt av separata procedurer som man inte kan förväntas förstå (Jankvist & Niss, 2018; McNeal, 1995; Schoenfeld, 1992). Vissa elever har uttryckt en uppfattning att det är bättre att komma ihåg, än att reflektera i matematik-klassrummet (Boaler, Wiliam & Brown, 2000), vilket kan sägas vara en kombination av en förväntning på sig själv och en förväntning på ämnet matematik. Det finns såväl en inre som en yttre motivation som kan identifieras (Ryan & Deci, 2000). En inre motivation kan till exempel vara att vilja lära sig om koordinatsystem för att kunna använda CNC-maskinerna i industri-hallen bättre, eller om hur man mäter längder för att såga till virket för ett fotbollsmål. Ett exempel på en yttre motivation är att vilja kunna någonting för att kunna få ett bra betyg, eller att vilja använda de lösningsmetoder som läraren visar upp, snarare än att konstruera egna metoder (Schoenfeld, 1992). Säkerhet visar sig i relation till uppgiftslösning och den egna förmågan, och kan till exempel innebära en uppfattning om att den egna förmågan att resonera matematiskt inte är tillräcklig för att använda på ett tryggt sätt (Sumpter, 2013). Elever har dessutom visat sig ha uppfattningen att matematik är något man sysslar med på egen hand (Schoenfeld, 1992), till exempel genom att lösa uppgifter i läroboken. Olika uppfattningar samspelar och påverkar elevers arbete med uppgifter och även deras lärande (Op't Eynde m.fl., 2002). Samtidigt som en elevs uppfattningar påverkar hennes uppgiftslösning, kan uppgifterna som används i klassrummet visa vad som är legitimt och vad som är att betrakta som matematisk kunskap (Lampert, 1990).

De möjligheter till lärande som erbjuds inom ramen för den didaktiska tetraedern beskriven tidigare, skapas av lärare och elever och påverkas av såväl ämnet matematiks karaktär, som de läroböcker och uppgifter som används i undervisningen (Rezat & Strässer, 2012). I samspelet mellan elever och lärare skapas och vidareutvecklas implicita regler och normer som när de är matematikspecifika kan benämnas sociomatematiska normer (Yackel & Cobb, 1996). Brousseau (1997) väljer att beskriva grunden till undervisningen, och till sådana normer, som ett didaktiskt kontrakt mellan elev och lärare. Kontraktet bygger på en ömsesidig förståelse för att en lärare har erforderliga kunskaper i och om ämnet och ansvarar för att stötta eleven i dennes lärande (Brousseau, 1997). De sociomatematiska normer som finns i varje enskilt matematikklassrum är en produkt av vad lärare och elever för med sig avseende kunskap och uppfattningar, samtidigt som detta påverkar såväl lärare som elevers uppfattningar (Cobb, Wood & Yackel, 1993; Yackel & Rasmussen, 2002). En elevs uppfattningar är på så sätt kontextberoende (Francisco, 2013).

2.6 Hur lärare kan påverka relationen mellan elev och uppgift

Förhållandet mellan elev och uppgift påverkas av en mängd faktorer, och inte minst interaktionen med en lärare (Rezat & Strässer, 2012; Greer, Verschaffel & de Corte, 2002). Jablonka och Johansson (2010) beskriver ett förhållande mellan läroboken och läraren där bokens giltighet godkänns av läraren samtidigt som boken stöttar läraren i uppbyggnaden av undervisningen.

En av lärarens uppgifter är att förbereda och tillhandahålla adidaktiska situationer, då en elev, på egen hand interagerar med matematiken, med syfte att lära sig något specifikt (Brousseau, 1997). En stor del av undervisningen i matematik består av tid då lärare skapat lärande-situationer genom ett urval av uppgifter som eleverna arbetar självständigt med (Hiebert m.fl. 2003; Skolinspektionen, 2010). Urvalet av uppgifter för undervisningen är en av lärarens viktigaste åligganden (Hiebert m.fl., 1997; Lappan, 1997; Visnovska, Cobb & Dean, 2012). Det har dock visat sig svårt för lärare att välja och implementera mer utmanande uppgifter (Henningsen & Stein, 1997). Ett tydligt formulerat lärandemål är en grundförutsättning för att göra ett medvetet uppgiftsurval (Brousseau, 1997; Nyman, 2016; Simon & Tzur, 2004). Det riskerar ändå att finnas ett avstånd mellan de ursprungliga intentionerna med en uppgift och vad en elev gör med den (Coles & Brown, 2016). För att planera undervisningen och göra ett urval av uppgifter för elever att arbeta med, är det av stor vikt att kunna förutse elevers sätt att tänka kring matematik (Niss m.fl., 2016). Detta har visat sig svårt (Son & Kim, 2015), men möjligt att utveckla genom att iaktta och aktivt reflektera över relationen mellan elevers arbete och de uppgifter eleverna arbetar med (Boston & Smith, 2009; Choppin, 2011).

2.7 Utmaningar vid problemlösning

Uppgifter som kräver att en elev utvecklar sin kunskap och som erbjuder möjligheter till nya erfarenheter är de uppgifter som bäst stimulerar till lärande (Shimizu, Kaur, Huang & Clarke, 2010; Zaslavsky, 2005). Det har till och med visat sig fruktbart med uppgifter med utmaningar som eleverna inte på egen hand lyckas komma förbi, om dessa efterarbetas på ett medvetet sätt av lärare och elev (Kapur, 2014). Det är dock avgörande att utmaningen är rimlig för eleven att komma förbi (Hiebert & Grouws, 2007; Olsson & Granberg, 2018). I en studie baserad på data från TIMSS (Hiebert m.fl., 2003) rapporteras att en särskiljande faktor hos de länder som presterar bra är att eleverna får möjligheter att arbeta med matematiska problem som kräver att de behöver knyta samman olika aspekter av den matematik de känner till. Termen utmaning används i avhandlingen för att beskriva en svårighet som det är rimligt att en elev kan ta sig an och komma förbi, och betraktas som produktiv i avseende att den kan generera möjligheter till lärande.

I problemlösning har åtminstone två utmaningar framträtt som viktiga komponenter: den konceptuella och den kreativa (Lithner, 2017). Dessa två utmaningar är något som inte ingår i arbetet med rutinuppgifter, men däremot vid problemlösning. Utmaningar som beror på, till exempel språkliga svårigheter eller tekniska svårigheter som kan leda till slarvfel (Movshovitz-Hadar, Zaslavsky & Inbar, 1987) är möjliga även vid rutinarbete. När en elev arbetar med matematiska problem behöver hon ta hänsyn till flera olika frågor, så som vilken förståelse hon har för de ingående begreppen, och vilka metoder hon har tillgängliga (Schoenfeld, 1985a). Den konceptuella utmaningen består i att ta hänsyn till de i en uppgift ingående matematiska begreppen. En konceptuell utmaning kan till exempel vara att det finns motstridiga påståenden om, eller otillräcklig förståelse för de ingående begreppen. Ett motstridigt påstående kan till exempel uppstå då en elev har missuppfattat något. Det kan exemplifieras med hjälp av det tidigare presenterade uppgiftsexemplet (se avsnitt 1.1) med en figur vars omkrets efterfrågades. En elev kan ha förståelsen att omkretsen är längden av den närmaste vägen runt en figur, vilket i detta fall inte är detsamma som den mer korrekta och nödvändiga förståelsen att omkretsen på en figur är summan av längden av alla sidor. En kreativ utmaning kan liknas med en osäkerhet kring en oklar väg framåt, det vill säga ett behov av att finna eller konstruera en hittills obekant lösningsmetod. Den kreativa utmaningen är även jämförbar med det Turner, Dossey, Blum och Niss (2013) benämner problemlösningssvårighet, vilket innebär att konstruera en lösningsstrategi.

Utmaningarna liknar det som Zaslavsky (2005) benämner osäkerheter, och beskriver som värdefullt för att utveckla en matematisk kunskap med stöd av teorier för lärande (se ex Piaget, 1952). Zaslavsky (2005) fokuserar i sin studie på möjligheterna att skapa osäkerheter genom en medveten uppgiftsdesign. Turner m.fl. (2013) presenterar ett ramverk där den förmåga som elever förväntas aktivera, samt svårighetsnivån på uppgifter värderas. Svårighetsnivån jämförs och visar sig överensstämma väl med andelen elever som lyckas lösa motsvarande uppgift på

PISA-testet. Ramverket (Turner m.fl., 2013) fungerade väl för att kunna användas av lärare till att kategorisera uppgifter efter förmåga, men var svårare att använda med avseende på svårighetsnivån i relation till respektive förmåga (Pettersen & Nortvedt, 2018).

2.7.1 Matematisk kreativitet

Kreativitet är, enligt nationalencyklopedin (utan datum) ”förmågan till nyskapande, till frigörelse från etablerade perspektiv”. Kreativitet är ett begrepp som kan förknippas med genialitet såväl som med en förmåga som kan innehas på olika nivåer (Sriraman, Haavold & Lee, 2013). I relation till en undervisnings- och lärandekontext är det rimligt att betrakta kreativitet som en förmåga som kan utvecklas (Silver, 1997), och som nödvändigtvis inte behöver förknippas med genialitet. I skolans kontext och relaterat till problemlösning så kan kreativitet beskrivas som en process som resulterar i en för eleven ny lösningsmetod (Silver, 1997; Sriraman, 2005). Det kan innefatta, till exempel att konstruera eller att använda en ny representation vid lösningen av en uppgift (Wijaya m.fl., 2015). Matematisk modellering, såväl som att representera ett matematiskt innehåll på olika sätt går att knyta till kreativitet (Terwel m.fl., 2009). Ytterligare två centrala beståndsdelar i matematisk kreativitet är att kunna använda matematiken med flyt och flexibilitet. Det kan till exempel innebära en vana i att skapa och använda nya strategier, och att kunna förhålla sig till flera olika, nya lösningar (Silver, 1997). Reflektion och en mer utdragen arbetsprocess är också något som kan förknippas med kreativitet (Silver, 1997).

Beskrivningarna av de kreativa aspekterna och av problemlösning motsäger inte att utvecklingen av dessa förmågor kan ske på olika svårighetsnivåer eller i samspel med utvecklingen av till exempel en procedurförmåga (Kilpatrick m.fl., 2001). Dock visar tidigare forskning att många elever besitter utantillkunskaper utan att klara av att överföra denna kunskap till nya situationer och att lösa, för dem nya problem (Boaler, 1998). Schoenfeld (2012) beskriver en situation där det, redan tidigt i ett barns utbildning byggs upp en kultur som består i att lösa uppgifter så snabbt och smidigt som möjligt med hjälp av inövade algoritmer, snarare än att vara kreativ i sitt arbete och låta uppgiftslösningen ta lite mer tid. Då undervisningen bygger på användningen av färdiga algoritmer riskerar det självständiga tänkandet, de matematiska resonemangen och problemlösningsförmågan att komma i skymundan (Kamii & Dominick, 1997).

2.7.2 Konceptuell kunskap

En viktig del av vad det innebär att behärska matematik är en förståelse för de begrepp som matematiken bygger på. Den konceptuella kunskapen beskrivs i olika styrdokument som en begreppsförståelse eller en förmåga att se och skapa kopplingar mellan olika begrepp, egenskaper och representationer (Skolverket, 2011a; NCTM, 2000), och står i kontrast till procedurell kunskap, där fokus inte nödvändigtvis är på en förståelse av de matematiska begreppen. Varje individ har en egen *begreppsbild (concept image)*, vilket är en inre, strukturerad bild av begreppet, dess egenskaper och de processer som kan kopplas till begreppet (Tall & Vinner, 1981).

Den del av en begreppsbild som aktiveras i en unik situation kan benämnas *framkallad (evoked) begreppsbild* (Tall & Vinner, 1981). I vissa situationer kommer en framkallad begreppsbild att vara adekvat för att lösa en uppgift, medan det i andra skapas en utmaning av diskrepansen mellan den framkallade begreppsbilden och den begreppsbild som krävs för att lösa uppgiften. En begreppsbild kan jämföras med en del av ett kunskapsnät (Hiebert & Lefevre, 1986). Nätet är uppbyggt av relationer mellan olika stycken information. Informationen kan till exempel vara egenskaper hos ett begrepp, matematiska objekt eller en process i vilken matematiska objekt används för att få ytterligare objekt som resultat (Lithner, 2008). Konceptuell kunskap är då inte den enskilda informationen, utan består av relationerna i kunskapsnätet. Till exempel kan begreppet ”ekvation” i en begreppsbild utgöras av dess egenskaper så som att ekvationen består av två uttryck med lika värde, olika objekt såsom variabler, konstanter och likhetstecken. Relationer uppstår mellan begreppet, egenskaperna och objekten. Till exempel kan likhetstecknet användas för att uttrycka likheten mellan två uttryck. I kunskapsnätet finns dessutom relationer med procedurer för att lösa ekvationer och till begrepp som bygger vidare på ”ekvation” som exempelvis andragradsekvation. En del av den konceptuella kunskapen består också av olika representationsformer i relation till begreppet (Terwel, van Oers, van Dijk & van den Eeden, 2009), som algebraiska skrivsätt och grafer.

Konceptuell kunskap kan utvecklas genom att ny information knyts till den befintliga begreppsbilden, och kunskapsnätet växer och stärks genom att fler relationer skapas. En begreppsbild byggs upp kontinuerligt och påverkas i hög utsträckning av de erfarenheter med relation till begreppet som individen är med om (Niss, 2006). Detta kan ses som att ny kunskap assimileras till den befintliga (Piaget, 1952). Ett ytterligare sätt att se assimilation av kunskap är att två till synes separata nät med hjälp av nya relationer kan växa samman. Det kan dock uppstå konflikter mellan en begreppsbild och det som en uppgift anvisar och kräver. I detta fall kan man se det som att ytterligare relationer är omöjliga att koppla till kunskapsnätet. I dessa situationer kan det vara nödvändigt att delvis omskapa den befintliga begreppsbilden och nätet för att sedan införliva det nya till begreppsbilden på ett rimligt sätt. Detta benämns av Piaget (1952) som ackommodation. Till exempel kan ackommodation vara nödvändig om en elev behöver räkna ut vad $\frac{8}{0,1}$ är, men tidigare fått höra att kvoten till en division alltid är mindre än täljaren.

Den *formella begreppsdefinitionen* av ett begrepp är ”formuleringar som används för att specificera begreppet” (fri översättning från Tall & Vinner, 1981, s. 152). Det finns en risk att en diskrepans uppstår mellan en elevs begreppsbild och den formella definitionen av ett begrepp, om grunden för definitionen inte utgör en väsentlig del av erfarenheterna, vilket kan leda till kognitiva konflikter och lärandesvårigheter (Niss, 2006; Tall & Vinner, 1981). Genom att till exempel arbeta med flera olika definitioner av samma begrepp kan elever få möjligheten att vidga sina erfarenheter (Zaslavsky & Shir, 2005). Till exempel kan en kvadrat definieras som en rektangel där två intilliggande sidor är lika långa, eller som en figur med fyra lika långa sidor och fyra lika stora (räta) vinklar. Kopplingar mellan olika begrepp bygger på likheter och skillnader, och på egenskaper som kan vara gemensamma för flera begrepp, med andra egenskaper som särskiljer dem (Hiebert & Carpenter, 1992). Till exempel delar kvadrater och rektanglar egenskapen att de har fyra räta hörn, men rektanglar behöver inte ha fyra lika långa sidor.

Beroende på hur man väljer att definiera procedurell kunskap kan den, såväl kräva som utveckla en konceptuell kunskap (Baroody, Feil & Johnson, 2007). Genom att betrakta de symboler som används i det formella matematiska språket som en representant för såväl en process som för ett matematiskt objekt, erhålls ett så kallat *procept* (Gray & Tall, 1994). Till exempel kan $\frac{20}{4}$ betraktas som ett matematiskt objekt i form av ett rationellt tal, ekvivalent med talet 5, men samtidigt som en process i form av en division med kvoten 5. Då divisionen utförs utan konceptuella hänsyn, så som att $\frac{20}{4}$ är ett rationellt tal, handlar det om en process. Genom större flexibilitet och förmågan att betrakta $\frac{20}{4}$ som såväl en process som ett matematiskt objekt, nyttjas ett procept. Detta steg har visat sig svårt, men kan leda till att nya matematiska insikter nås (Sfard, 1991). Matematiska procedurer utvecklas för att lösa problem, och en konceptuell kunskap inkluderar en medveten användning och utveckling av dessa procedurer (Baroody m.fl., 2007).

En konceptuell kunskap kan knytas till en procedurell kunskap genom en metakunskap om de metoder som används. Metakunskapen kan bestå av såväl den konceptuella kunskap som krävs för att konstruera en metod, eller göra ett metodval, som kunskap om hur metoden relaterar till andra liknande metoder eller metoder som kan användas i liknande situationer (Peled & Zaslavsky, 2008). Kopplingar mellan procedurell och konceptuell kunskap styrs i hög grad av den undervisning som bedrivs (Fan & Bokhove, 2014). För att erbjuda goda möjligheter till lärande är det centralt att en elev på egen hand får föra resonemangen som krävs, snarare än att bli presenterad för dessa (Fan & Bokhove, 2014; Norqvist, 2017). Det har visat sig möjligt att utforma sekvenser av uppgifter som till stor del är procedurella, men där det dessutom ställs krav på reflektion kring de mönster som uppstår i och med användningen av procedurerna (Schumacher & Rezat, 2019). Till exempel kan vid ekvationslösning varje steg av processen jämföras med motsvarande aritmetiska operation (Linchevski & Herscovics, 1996).

3 Ramverk

I detta kapitel presenteras de ramverk som legat till grund för de fem studierna. Ett ramverk ger stabilitet åt en studie med definitioner av centrala begrepp och beskrivningar av hur olika begrepp relaterar till varandra och kan synas i olika typer av data. Dessa beskrivningar är tänkta att fungera som ett stöd för att förstå de analyser av data som gjorts, och de resultat som genererats i relation till forskningsfrågorna. För studie 1-3 handlar det bland annat om distinktionen mellan arbete med rutinuppgifter och arbete med matematiska problem och användandet av kreativa matematiska resonemang. Inledningsvis beskrivs *resonemangs-ramverket* för elevers kreativa och imitativa resonemang som använts i studie 2 och 3. Därefter beskrivs *uppgiftsramverket*, och de modifieringar av resonemangsramverket som gjorts för att genomföra analysen av uppgifter i studie 1 som rutinuppgifter eller matematiska problem. Slutligen beskrivs *utmaningsramverket* för konceptuella och kreativa utmaningar, som växte fram i studie 4 och 5.

3.1 Ett ramverk för analys av elevers resonemang

En elevs resonemang kan definieras som utfallet av den tankebana som antagits för att formulera påståenden och dra slutsatser (översatt från Lithner, 2008, s. 257). I resonemangs-ramverket görs en distinktion mellan kreativa matematiska resonemang och imitativa resonemang (Lithner, 2008). Resonemangen som avses utgör en del av grunden till en uppgifts-lösning och betraktas som individuella. Det innebär bland annat att kategoriseringen av ett resonemang beror på relationen mellan en elev och en uppgift. Genom att fokusera på de argument som en elev använder för att motivera ett strategival eller en implementering går det att särskilja kreativt matematiska resonemang från imitativa resonemang. Ett *kreativt matematiskt resonemang* (Creative Mathematical Reasoning, CMR) karaktäriseras av två centrala aspekter. I) Resonemanget är nytt, eller återupptäckt, och II) Resonemanget bygger på argument för lösningsmetodens giltighet, som tar stöd av, för uppgiften, väsentliga matematiska egenskaper (Lithner, 2008). Ett *imitativt resonemang* (IR) å andra sidan, bygger på att en elev imiterar en välbekant eller tillgänglig lösningsmetod eller algoritm, som väljs genom att endast ytliga egenskaper i uppgiften beaktas. Det imitativa resonemanget kan kategoriseras ytterligare genom att beakta varifrån lösningsmetoden som eleven imiterar kommer ifrån. I tabell 1 presenteras en sammanfattning av de olika typerna av resonemang.

Tabell 1. Typer av resonemang (Lithner, 2008)

<table>
<tr><th colspan="6">IR</th><th colspan="2">CMR</th></tr>
<tr><td rowspan="3">MR</td><td colspan="5">AR</td><td rowspan="3">Lokalt</td><td rowspan="3">Globalt</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Bekant</td><td rowspan="2">Begränsat</td><td colspan="3">Lotsat</td></tr>
<tr><td>Lärare</td><td>Elev</td><td>Text</td></tr>
</table>

Antingen kan tillvägagångssättet vara *memorerat* (MR) eller följa en *algoritm* (AR). Det algoritmiska resonemanget kan antingen vara *bekant*, genom att en ytlig egenskap i uppgiften gör det tydligt vilken algoritm som ska användas, eller *begränsat*, så att eleven kan prova några enstaka, tänkbara algoritmer, eller *lotsat*, där eleven får stöd av en yttre källa. Lotsningen kan till exempel komma från lärare (*lärarlotsning*) eller andra elever (*elevlotsning*), men även från en läroboks genomgångar eller de tidigare lösta uppgifterna i densamma (*textlotsning*). Att ytliga egenskaper i en uppgift används kan till exempel innebära att ett nyckelord i uppgiften, exempelvis 'skillnaden', identifieras, och att uppgiften presenterar två tal, där det ena är större än det andra, och kopplas samman med ett tillvägagångssätt, i detta fall subtraktion av det mindre talet från det större. Kategorierna är i teorin diskreta, även om elevers uppgiftslösning i praktiken sällan bygger på enbart en typ av resonemang. Det kreativa resonemanget är *globalt* om det omfattar de övervägande och centrala delarna av lösningen, medan det ses som *lokalt* om lösningen till största del består av IR, men även till mindre del utgörs av CMR.

3.2 Ett ramverk för analys av uppgifter

Genom att använda delar av resonemangsramverket är det möjligt att säga något om de uppgifter som en elev arbetar med. Vid analys av uppgifter, till exempel i en lärobok, används (tänkta) elevlösningar. Metoden har tidigare använts, exempelvis vid analys av universitets-läroböcker (Lithner, 2004) och provuppgifter på gymnasiet (Boesen, Lithner & Palm, 2010; Palm, Boesen & Lithner, 2011). Potentialen, eller risken för att en elev kan textlotsas av läroboken till att använda IR, kan studeras. Med tanke på den samstämmighet som ofta råder mellan lärobokens och lärares upplägg av undervisningen (Jablonka & Johansson, 2010; Schmidt m.fl., 2001; Valverde m.fl., 2002) är det sannolikt att lärares presentation erbjuder elever liknande möjligheter att imitera (Bergqvist & Lithner, 2012). Uppgifterna kategoriseras utifrån de möjligheter att imitera en lämplig lösningsmetod som finns. Genom att studera relationen mellan lösningsmetoden och den information som finns tillgänglig i läroboken kan möjligheten till imitation bedömas. Antingen finns en *hög korrelation* (High Relatedness, HR) mellan informationen i läroboken och en tänkt lösning, och det betraktas som rimligt att en elev kan använda sig av ett textlotsat resonemang, eller så finns ingen, eller en *låg korrelation* (Low Relatedness, LR), och en elev behöver förlita sig på ett kreativt matematiskt resonemang.

Beroende på omfattningen av textlotsningen i lösningen delas en låg korrelation upp i lokalt och globalt låg. En *lokalt låg korrelation* (Local Low Relatedness, LLR) karaktäriseras av att en stor del av lösningen kan genomföras genom textlotsning, men där inslag kräver att eleven konstruerar delar av lösningsmetoden, där textlotsning inte ges. En *globalt låg* (Global Low Relatedness, GLR) uppgift karaktäriseras av att en central och större del av lösningen inte kan relateras till information i läroboken och således att textlotsning inte är möjligt.

3.3 Utvecklingen av ett utmaningsramverk

I tidigare forskning är det svårt att finna studier som presenterar analytiska ramverk för att identifiera olika typer av utmaningar. Det finns exempel på forskning där utmaningar exemplifieras och teoretiseras, men där kriterier för olika kategoriseringar saknas (e.g. Zaslavsky, 2005). Turner m.fl. (2013) har visat att det är möjligt att kategorisera uppgifter utifrån matematiska förmågor med stöd av ett ramverk. De har även gjort kategoriseringar av svårighetsnivå med viss framgång. Resultaten jämfördes med andelen elever som löste uppgiften. Analysen sker således på uppgifterna, och endast indirekt på elevlösningar, men där en hög svårighetsnivå var en förutsägelse för att få elever skulle lösa uppgiften. Med andra ord visar det att de identifierade höga utmaningarna var oövervinnerliga för de flesta eleverna. Det visade sig dock svårare för lärare att använda ramverket än för de forskare som var tränade i att använda ramverket (Pettersen & Nortvedt, 2018).

Arbetet med utmaningsramverket har haft som utgångspunkt att åtminstone två tydliga utmaningar är rimliga att relatera till kreativa matematiska resonemang och till problemlösning (Lithner, 2017). Genom definitionen på CMR urskiljs två tänkbara utmaningar, som inte ingår i IR; en kreativ som har att göra med att konstruera en ny metod, och en konceptuell som bygger på den hänsyn till de i lösningen ingående matematiska begreppen som är nödvändig.

Att skapa ett ramverk för att identifiera kreativa och konceptuella utmaningar har varit en utmaning i sig. Flera aspekter har krävt noggranna överväganden, och ramverket är ännu inte ett färdigt ramverk. Att skapa ett underlag för förståelse för det kreativa respektive det konceptuella var inledningsvis ett stort arbete. Därefter prövades flera idéer som knöt samman elevers arbete med uppgifter, med de utmaningar som de ställdes inför. Med stöd av karaktäristiken hos kreativa matematiska resonemang gjordes valet att beskriva den kreativa utmaningen genom ett fokus på huruvida lösningsmetoden var ny för en elev eller inte. Avseende den *konceptuella utmaningen* fanns behov av att ytterligare strukturera vad som egentligen var utmaningen, och hur en diskrepans kan beskrivas. Stödet fanns i teorin om begreppsbilder (Tall & Vinner, 1981) och införandet av termen adekvat begreppsbild (adequate concept image). En adekvat begreppsbild relaterar till den uppgift en elev arbetar med. Sannolikt finns flera sätt att angripa uppgiften att skapa ett liknande ramverk, men en slutsats som kunde dras av flera piloter och många diskussioner, var att genom att beakta diskrepansen mellan elevers tidigare erfarenheter och kunskaper, och det som krävs för att lösa en uppgift, kan en bild av utmaningarna åskådliggöras.

3.4 Ett ramverk för att identifiera utmaningar vid problemlösning

Utmaningsramverket skiljer på två, vid problemlösning centrala utmaningar, en kreativ och en konceptuell utmaning. Problemlösning består av att konstruera en för eleven ny lösningsmetod, vilket relaterar till den kreativa utmaningen. Det relaterar även till att föra ett för eleven nytt resonemang. Den konceptuella utmaningen relaterar till den andra aspekten av ett kreativt matematiskt resonemang, att konceptuella hänsyn tas.

Utmaningsramverket möjliggör att identifiera kreativa och konceptuella utmaningar i elevers arbete med matematiska problem. Vid arbete med rutinuppgifter, då en elev använder imitativa resonemang finns per definition inga utmaningar. Metodvalet baseras då på möjligheten att imitera välkända eller på annat sätt tillgängliga lösningsmetoder, och implementeringen kräver inte att några konceptuella aspekter behöver beaktas. Centralt för ramverket är diskrepans. Genom att beakta diskrepansen mellan en, för en uppgift, tänkbar lösningsmetod, och de erfarenheter i relation till denna lösningsmetod som en elev har beskrivs den *kreativa utmaningen*. Den *konceptuella utmaningen* kan beskrivas som en diskrepans mellan en för uppgiften adekvat begreppsbild och en framkallad begreppsbild. Då ingen diskrepans finns, existerar inte heller någon utmaning.

4 Metoder och metodöverväganden

Initialt gjordes valet att studera elevers möjligheter att arbeta med problemlösning med tre olika metoder. Först genom att studera de uppgifter som finns i läroböcker, sedan genom att studera de resonemang som elever använder vid uppgiftslösning, och slutligen genom att studera elevers uppfattningar om matematik och problemlösning.

För att ytterligare nyansera bilden av problemlösning har ett analytiskt ramverk utvecklats för att identifiera de utmaningar elever möter vid problemlösning. I utvecklingsprocessen genererades data från såväl elever som lärare för att fördjupa kunskapen om utmaningarna och för att skapa underlag för en fortsatt utveckling av ramverket. Först bestod data av elevers arbete med matematiska problem och sedan lärares beskrivningar av de utmaningar som de förväntade sig att elever skulle möta. I tabellen nedan presenteras en översikt av de fem studierna.

Tabell 2. Översikt av studierna och de data som samlats in.

Studie	Urval	Datainsamling	Data	Analysmetod
1	Läroböcker från 12 länder	Uniformt uppgiftsurval med stöd av TIMSS rubriker för matematiskt innehåll	5378 uppgifter	Kategorisering av uppgifter (uppgiftsramverk)
2	15 elever	Video och observation av klassrumsarbete, fotograferade uppgiftslösningar	39 uppgifter 86 elevlösningar	Kategorisering av uppgifter och elevers använda resonemang (resonemangs- och uppgiftsramverk)
3	8 elever 4 uppgifter	Video av pararbete i grupprum (tänka högt), skriftliga uppgiftslösningar, video av minnesstimulerade, enskilda intervjuer	32 elevlösningar 8 intervjuer	Kategorisering av elevers använda resonemang och uppfattningar (resonemangs-ramverk och tematisk analys)
4	12 elever 7 uppgifter	Video av enskilt arbete i grupprum (tänka högt), skriftliga uppgiftslösningar, video på intervjuer	72 elevlösningar 12 intervjuer	Identifiering, kategorisering och karaktärisering av utmaningar (utmanings-ramverk)
5	15 lärare 8 uppgifter	Video av gruppintervjuer, skriftliga uppgiftslösningar med utmaningsbeskrivningar	120 lärarlösningar med utmaningsbeskrivningar 5 gruppintervjuer	Identifiering, kategorisering och karaktärisering av utmaningar (utmanings-ramverk)

Avhandlingens empiriska validitet har stärkts genom att olika metoder använts för att undersöka de övergripande frågorna (Esaiasson, Gilljam, Oscarsson & Wängnerud, 2007). De tre första studierna hålls samman genom ett gemensamt begreppsramverk vilket skapar förutsättningar för att göra övergripande tolkningar av resultaten med bibehållen begreppsvaliditet (Esaiasson m.fl., 2007). På motsvarande sätt utgår de två sista studierna från ett gemensamt ramverk. I avhandlingens inledande tre studier har dessutom ramverk och metoder som sedan tidigare är beprövade i flera studier, använts (ex. Bergqvist m.fl., 2008; Lithner, 2003; Lithner, 2004; Lithner, 2008; Palm m.fl. 2011; Sumpter, 2013). De operationaliseringar som gjorts har därför tidigare prövats.

4.1 **Urval**

I avhandlingens samtliga studier har strategiska urval gjorts. Ett strategiskt urval kan begränsa möjligheterna att generalisera resultaten (Esaiasson m.fl., 2007). En grund för samtliga urval har dock varit att genom tydliga begränsningar och kriterier för urval skapa möjligheter till en god intern validitet, och att genom jämförelser dra slutsatser. Dessutom har urvalet baserats på att inkludera vanliga elever ur hänseendet att de varken skulle vara tydligt låg-, eller högpresterande. Resultat som erhålls med ett strategiskt urval kan ses som exempel på praxis, och i detta fall som något att beakta när matematikundervisning och matematisk kunskap diskuteras. Urvalet av elevgrupper, elever och lärare har i samtliga studier utom studie 4 gjorts från två eller fler skolor, och i samtliga fall från flera klasser och program för att bredda urvalet, och öka den externa validiteten (Esaiasson m.fl., 2007).

4.1.1 Urval för läroboksanalys

Urvalet av läroböcker för *studie 1* begränsades av språkliga faktorer då det bedömdes önskvärt att all analys kunde göras av samma person, och utan att läroboken först skulle tolkas i form av en översättning. Det innebar att länder där svenska eller engelska är ett stort språk i undervisningen var aktuella. Ett mål med urvalet var samtidigt att kunna studera läroböcker från länder med bred geografisk spridning för att kunna säga något om likheter och skillnader mellan böcker från olika delar av världen. Urvalet av läroböcker för analys byggde på en, för varje land, vanligt förekommande lärobok, vilket ytterligare indikerar att många elever och lärare använder boken i undervisningen i matematik. Skolpersonal, lärarutbildare och forskare med god insyn i skolan i Sverige, Finland, England, Skottland, Irland, Australien, Kanada, USA, Singapore, Nepal, Indien, Tanzania och Sydafrika kontaktades. De ombads hänvisa till en eller flera för undervisningen på gymnasienivå i landet vanligt förekommande läroböcker, eller läroboksserier. I flera fall fick vi mer än ett förslag på lärobok eller läroboksserie. Då genomfördes en översiktlig undersökning för att se huruvida det fanns tydliga skillnader i böckerna, avseende till exempel antalet uppgifter eller mängden lösta exempel. I samtliga fall visade det sig att de rekommenderade böckerna från varje land på denna översiktliga nivå liknade varandra i hög utsträckning. Valet av bok baserades då på hur väl dess matematiska innehåll stämde överens med det som önskades för analysen (ekvationer och uttryck, samt omkrets, area och volym, se nedan). Då utbildningssystemen varierar en del med avseende på till exempel skolstart, antalet undervisningstimmar i olika årskurser och tematisering av undervisningen krävdes ett visst spann i ålder och årskurs för att finna böcker med motsvarande matematiskt innehåll. En alternativ metod för urval av vanligt förekommande läroböcker hade till exempel varit att jämföra försäljningssiffrorna. Det visade sig dock svårt att få ta del av dessa siffror, varför den beskrivna, alternativa metoden användes. Avseende urvalet av länder och läroböcker för studie 1 bör det kunna betraktas som relativt brett, då länderna spänner över fem kontinenter och länder som presterar på olika nivå vad gäller internationella jämförelsestudier som TIMSS (Mullis m.fl., 2012) och PISA (OECD, 2014).

För att öka förutsättningarna för en hög intern validitet (Esaiasson m.fl., 2007) och en möjlighet att jämföra läroböckerna med varandra valdes två matematiska områden ut vars uppgifter analyserades i respektive bok. Detta urval gjordes efter en översiktlig genomgång av samtliga läroböcker, med hjälp av den struktur för matematiska områden som TIMSS erbjuder (Mullis m.fl., 2008). Ett område från algebran och ett från geometrin valdes ut då algebra och geometri sågs som centrala för matematikundervisningen på gymnasiet internationellt. En ytterligare precisering skedde genom att områden som var gemensamma för samtliga läroböcker valdes ut. Dessa var, för algebra, ekvationer och uttryck, och för geometri, omkrets, area och volym. De avsnitt som i respektive bok hade huvudfokus på något av de nämnda matematiska områdena valdes ut för analys, och samtliga uppgifter i avsnitten analyserades.

4.1.2 Urval av uppgifter för elevlösning (och lärarreflektioner)

I tidigare studier (Sumpter, 2013) har elevers uppfattning i relation till deras resonemang och uppgiftslösning undersökts med ett urval uppgifter som var av rutinkaraktär. Urvalet av uppgifter för *studie 3* tog stöd av uppgiftsramverket för att finna vad som kunde vara ett matematiskt problem för ett urval av elever. Då uppgifter från andra källor än läroböcker blev aktuella baserades urvalet även på forskarnas lärarerfarenheter om vad som sannolikt kommer att vara ett matematiskt problem. För att minska risken att uppgifterna behandlats i undervisningen valdes de från tidigare nationella prov för den inledande och obligatoriska första gymnasiekursen som samtliga elever i undersökningen läste. Urvalet utgick dessutom från att uppgiften bedömdes innehållsmässigt kunna tillhöra den inledande och obligatoriska första gymnasiekursen som samtliga dessa elever läste. Uppgifterna i studien valdes så att samtliga elever vid något tillfälle skulle stöta på något som för dem var ett matematiskt problem. Det bedömes som viktigt att finna en svårighetsnivå som gjorde att det krävdes mer omfattande reflektioner, som kunde generera data, men samtidigt inte var så svårt att de skulle ge upp sina lösningsförsök (Kloosterman, 2002).

Urvalet av uppgifter för *studie 4* baserades på liknande kriterier som i studie 3, då vad som kunde antas vara matematiska problem för eleverna i studien söktes. I tillägg var det önskvärt att de matematiska problemen skulle innehålla olika nivåer av konceptuella och kreativa utmaningar. För urvalet gjordes en preliminär analys av uppgifter med hjälp av ett utkast på utmaningsramverket och med en presumtiv elevs lösning som underlag.

I *studie 5* återanvändes flera av uppgifterna från studie 4. Vissa uppgifter som genererat liknande, eller mindre data, togs bort, och istället kompletterades urvalet med ett antal nya uppgifter. För att öka möjligheterna att fånga nya aspekter av utmaningarna i lärarintervjuerna ingick även uppgifter som bedömdes vara av rutinkaraktär, men ibland med andra svårigheter än konceptuella och kreativa, så som tekniska svårigheter. Genom att återanvända flera uppgifter bedömdes validiteten stärkas.

I *studie 2* skedde inget egentligt uppgiftsurval, utan de uppgifter som hanterades av de utvalda eleverna blev istället aktuella för analys.

4.1.3 Urval av elever

I *studie 2* gjordes först ett urval av klasser och undervisningsgrupper som skulle besökas. Urvalet bestod av grupper från såväl praktiska som teoretiska program med olika mycket matematik i sin utbildning, för att kunna urskilja eventuella skillnader, och skapa ett bredare underlag för att generalisera. Urvalet av elever inom respektive undervisningsgrupp gjordes sedan under den pågående lektionen, utifrån kriteriet att det skulle vara ett par eller en grupp elever som samarbetade kring uppgiftslösningen, och som därmed kommunicerade sina tankar med varandra.

I urvalsprocessen för *studie 3 och 4* formulerades en önskelista som kommunicerades med matematiklärare som hjälpte till med att tillfråga lämpliga elever. Genom att ha en relativt homogen grupp elever kunde uppgiftsurvalet preciseras för att lagom utmanande uppgifter skulle finnas. Då elever som läser gymnasiets första kurs i matematik i hög utsträckning, antingen misslyckas med att bli godkända eller får ett E, önskade vi för *studie 3*, träffa just elever som läraren bedömde, precis skulle kunna klara denna kurs. Att inkludera elever med alltför bristfälliga kunskaper i relation till kursens kunskapskrav bedömdes öka risken för att inga data skulle genereras vid uppgiftslösningen. Genom de angivna kriterierna var tanken att finna en homogen grupp elever som kunde representera en stor andel av eleverna i gymnasieskolan. Urvalet gjordes inom praktiska och teoretiska program men exkluderade elever som läste på de mest matematikintensiva utbildningarna. En ytterligare önskan var att läraren skulle formera elevpar som var vana att arbeta tillsammans. Tanken med att låta eleverna arbeta i par var att det var ett för eleverna mer naturligt sätt att formulera sina tankar, att göra det för en kamrat än för forskarna (Schoenfeld, 1985b). Att få arbeta i par kan möjligen skapa en viss trygghet i situationen som gör att eleven i högre utsträckning förhåller sig till uppgiftslösningen på ett naturligt sätt (Schoenfeld, 1985b), liknande det i klassrummet. I och med att det är en relation till såväl uppgiften som kamraten, finns en rimlighet i att det är svårare att avvika från det normala än om det bara var en relation till en uppgift. Ett tredje önskemål var att eleverna skulle kunna formulera sina tankar, framför allt muntligt, för att på så sätt öka möjligheterna för att generera data utan att en forskare skulle behöva interagera med eleverna under uppgiftslösningen (Esaiasson m.fl., 2007).

För *studie 4* söktes elever för enskild uppgiftslösning. En av anledningarna till att enskilt uppgiftslösande nu valdes var att kunna få en bild av hur data genererades genom ”tänka-högt”-tillfällen jämfört med datainsamlingen i studie 3 som genomfördes med elevpar. För att kunna identifiera de tillfällen då en elev ställdes inför en utmaning bedömes att en situation utan andra element än eleven, uppgiften och den passiva forskaren, var värdefullt (Schoenfeld, 1985b). Matematiklärare ombads välja ut elever på teoretiska program som förväntades vara intresserade av och bedömdes ha förmågan att kommunicera sina lösningar och de resonemang de förde då lösningen skapades. Eleverna tillfrågades om deltagande, och accepterade i samtliga fall.

4.1.4 Urval av lärare

Urvalet av lärare för *studie 5* kommer från tre skolor i två kommuner. Tanken med att intervjua lärare var att få värdefull information som kan utveckla förståelsen för konceptuella och kreativa utmaningar, och den karaktäristik utmaningarna har. Samtliga intervjuade lärare var gymnasielärare i matematik med flera års undervisningserfarenhet.

4.2 Datainsamling

Med en genomtänkt struktur och goda förberedelser minskar risken för att problem uppstår vid datainsamling, och ökar reliabiliteten (Esaiasson m.fl., 2007). Vid samtliga datainsamlingar fanns ett protokoll, anvisningar eller tydliga frågor som vägledde insamlingen. I flera fall har pilotstudier genomförts och datainsamlingsmetoder reviderats för att till exempel bättre anpassa intervjufrågorna till operationaliseringen av de använda ramverken (Esaiasson m.fl., 2007). I flera av studierna har olika typer av data samlats in, vilket gör det möjligt att öka den empiriska validiteten (Esaiasson m.fl., 2007). Med avseende på den första övergripande forskningsfrågan stärks validiteten genom att datainsamlingen skett med avseende på såväl läroböcker och elevers uppgiftslösning (muntligt och skriftligt). Och med avseende på den andra övergripande forskningsfrågan genom datainsamlingar som inkluderar såväl elevers uppgiftslösning som lärares förväntningar på densamma.

4.2.1 Datainsamling genom observation och video i klassrummet

Genom att använda observationer och video i klassrummet då ordinarie undervisning bedrivs kan man få data som inkluderar de verkliga situationer som elever ställs inför och som inkluderar de interaktioner de har med andra elever och med sin lärare, vilket ökar den ekologiska validiteten (Robson, 2011). All förändring i ett klassrum kan dock påverka skeendet och en närvarande forskare med en videokamera kan därmed riskera att inte få se en helt naturlig miljö (Robson, 2011). Det är dock inte ovanligt att klassrum i den svenska skolan får besök och många elever ser det sannolikt som ett naturligt inslag med en besökare, även om en video-kamera kan vara mer ovanligt. Att dessutom bli introducerad av en lärare kan skapa en ytterligare legitimitet till besöket (Esaiasson m.fl., 2007). I *studie 2*, valdes i varje klassrum elevpar eller mindre grupper ut för att bli filmade då den delen av lektionen som var vikt åt uppgiftslösning kommit igång. Detta gjorde att det gavs en del tid åt att bekanta sig med de besökande forskarna och med tanken på att det fanns en videokamera. Vid urvalet av grupp beaktades möjligheten att få data, vilket medförde att par och grupper som hade en muntlig dialog valdes ut. Reliabiliteten är beroende, bland annat av att den data som samlas in är tillräckligt tydlig (Esaiasson, 2007). Det är svårt att veta om de samtal som fördes var naturlig och speglade en verklig klassrumssituation eller om forskaren och videokameran påverkade skeendet (Robson, 2011). En indikation på att eleverna snart kände sig trygga i situation och i det närmaste glömde bort videokameran, var att eleverna valde att prata om vardagliga saker såväl som matematiken. Den naturliga miljön som klassrummet med klasskamrater och lärare erbjöd kan ha bidragit till att genererade data förhoppningsvis speglar en verklig bild. Att filma kommunicerande elevpar eller grupper har i detta avseende visat sig kunna generera rika data (Schoenfeld, 1985b).

4.2.2 Datainsamling genom video i grupprum

I flera av avhandlingens studier har det bedömts svårare att genomföra en datainsamling i klassrummet, trots de fördelar det kan ge, i och med att det är en naturlig miljö för eleverna (Robson, 2011). Då urvalet av uppgifter varit väsentligt, i såväl studie 3 som 4 krävdes att elever togs åt sidan. Ett av skälen var att matematiska problem inte är något som kan tas för givet i en vanlig klassrumssituation. Detta innebar med andra ord en intervention som kan ha påverkat elevernas agerande (Robson, 2011). En studie i klassrumsmiljö kan ha gett delvis andra resultat, då till exempel kontext visat sig viktigt för individers uppfattningar (Francisco, 2013). Det har även visat sig att till exempel en relation som den mellan elev och uppgift har stor betydelse för kontexten, vilket kan minska betydelsen av den i övrigt förändrade miljön (Schoenfeld, 1985b).

I *studie 3* genomfördes uppgiftslösningen i par, där elevernas matematiklärare valde elevpar som var vana att arbeta tillsammans och med en liknande kunskapsnivå, och därmed, med större sannolikhet skulle föra en dialog med varandra och ge möjligheter för en bra datainsamling. Idén att låta eleverna arbeta i par bygger på liknande argument som i den tidigare refererade elevstudien där eleverna befann sig i sina ordinarie klassrum. Det bedömdes viktigt att skapa ett naturligt sätt för eleverna att samtala om de matematiska problem de mötte, och att det då skulle vara mer naturligt att göra så med en kompis, än med en av forskarna. Genom att låta elever prata med varandra istället för med en forskare minskas risken att de känner en otrygghet och att deras agerande påverkas (Schoenfeld, 1985b).

I *studie 4* fanns ett eventuellt behov av interaktion mellan forskaren och eleven under uppgiftslösningen för att säkerställa att erforderliga data erhölls. Det var viktigt att utmaningarna fick synas, vilket bedömningen var att de inte alltid gjort i tidigare studier där resonemangen ibland gått snabbt i växelverkan mellan två elever. Därför genomfördes datainsamlingen med enskilda elever. En ytterligare anledning till att datainsamlingen denna gång skedde med enskilda elever och inte som i tidigare studier med elever i par eller mindre grupper, var att kontrollera metodens användbarhet. Skulle det gå att få eleverna att på ett naturligt sätt lösa uppgifterna och samtidigt berätta om hur de tänkte? De data som genererades och de resultat som sedan erhölls indikerar att såväl metoden med elevpar som den med enskilda elever är tillämpbara. I och med att studien ingår i en avhandling som är del av en forskarutbildning var det ett lämpligt tillfälle att få möjligheten att prova en delvis ny metod.

Dessa datainsamlingar gjordes i samtliga fall i elevens skola, i rum, i nära anslutning till deras ordinarie undervisning.

4.2.3 Datainsamling genom intervju

Intervjuerna som genomfördes med elever i *studie 3 och 4* efterföljde i samtliga fall de video-filmade uppgiftslösningstillfällena. Inför varje intervju hade en första, preliminär analys genomförts. Intervjun gick till stor del ut på att skapa klarhet i de data som tidigare erhållits och bekräfta den initiala analysen och att komma till rätta med eventuella oklarheter. Under intervjuerna stimulerades elevernas minne genom att den tidigare datainsamlingen användes (så kallad stimulated recall), vilket kan underlätta för eleven att återge sina tankar i stunden för uppgiftslösningen (O'Brien, 1993). Den primära datakällan var således aldrig intervjuerna, däremot fungerade de som ett värdefullt inslag för att förtydliga och bekräfta det som syntes vid uppgiftslösningen.

De lärare som intervjuades i grupper om tre i *studie 5* kände i samtliga fall varandra som kollegor och det betonades innan och i inledningen av intervjuerna att studiens syfte var att skapa en bättre förståelse för de utmaningar elever mötte vid problemlösning, och att fokus var på uppgifterna snarare än på de enskilda lärarna. Ett sätt att i datainsamlingen rikta fokus mer mot uppgifterna och mindre mot enskilda lärare, var att genomföra intervjuerna i grupp. En förhoppning med detta var således att öka validiteten. Intervjuerna var halvstrukturerade och utgick från övergripande frågor om elevers lösning och utmaningar med respektive uppgift. Dock genomfördes intervjuerna som ett samtal där mycket utrymme lämnades åt lärarnas kommunikation med varandra. För varje uppgift inleddes samtalet genom en fråga om hur de förväntade sig att elever skulle lösa uppgiften. När detta betraktades som utrett övergick samtalet till att handla om de utmaningar som lärarna förväntade sig att elever skulle stöta på i relation till de presenterade lösningarna.

4.2.4 *Elevers och lärares skriftliga uppgiftslösningar*

Som en del av de data som samlades in i *studie 2, 3 och 4*, fanns, såväl elevers som lärares skriftliga lösningar till uppgifter. I samtliga fall fanns filmat material som visade hur eleven löste uppgiften, vilket var det primära underlaget för att analysera de resonemang som fördes, de uppfattningar som indikerades och de utmaningar som möttes. De skriftliga lösningarna fungerade som ett stöd i att tolka videofilmerna då kameran inte alltid fångade detaljerna i det som skrevs. Dessutom användes dessa detaljer som en del av att stimulera minnet för eleverna under intervjuerna i *studie 4*.

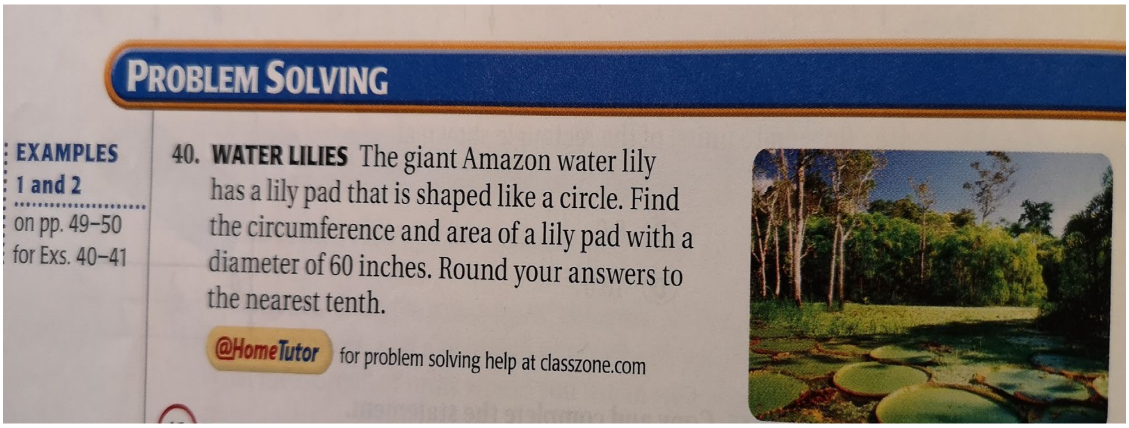
Lärarnas uppgiftslösningar i *studie 5* fungerade på ett liknande sätt som ett underlag för att senare tolka videofilmerna. Under gruppintervjuerna med lärarna fick de en möjlighet att beskriva sina lösningar och alltså det sätt de förväntade sig att en elev skulle lösa uppgiften. Ofta utgick samtalet från dessa föreslagna lösningar och lärarna enades om en eller ett par (inte sällan sekvenserade) lösningar som ibland modifierades under samtalet för att på bästa sätt beskriva en tänkt elevlösning.

4.3 Vad analyser av uppgifter kan säga oss

I det här avsnittet tänkte jag återkomma till de exempeluppgifter som introducerades i inledningen av texten, och beskriva vad olika analyser med anknytning till uppgifter kan säga oss.

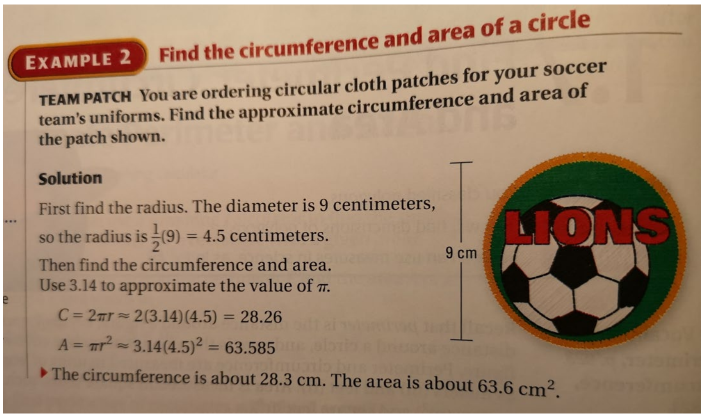
4.3.1 *Läroboksuppgift med hög korrelation*

I inledningen hänvisades till en uppgift som ingick i analysen av läroboksuppgifter i *studie 1* (se figur 7 nedan).



Figur 7. Exempeluppgift 1 (Uppgift 40 i avsnitt 1.7, från Larson, Boswell, Kanold & Stiff, 2007, s. 54)

Intill uppgiften finns en hänvisning (sida och exempelnumrering) till i boken tidigare lösta exempel, varav ett visas i figur 8.



EXAMPLE 2 Find the circumference and area of a circle

TEAM PATCH You are ordering circular cloth patches for your soccer team's uniforms. Find the approximate circumference and area of the patch shown.

Solution

First find the radius. The diameter is 9 centimeters, so the radius is $\frac{1}{2}(9) = 4.5$ centimeters.

Then find the circumference and area. Use 3.14 to approximate the value of π.

$C = 2\pi r \approx 2(3.14)(4.5) = 28.26$

$A = \pi r^2 \approx 3.14(4.5)^2 = 63.585$

The circumference is about 28.3 cm. The area is about 63.6 cm^2.

Figur 8. Lösningsmall till exempeluppgift 1 (Från avsnitt 1.7, från Larson, Boswell, Kanold & Stiff, 2007, s. 54)

Uppgiften har av läroboksförfattarna inkluderats som första uppgift i ett avsnitt med rubriken ”Problemlösning”. I analysen av uppgiften har hänsyn tagits till vilka metoder som eleverna kan tänkas ha tillgängliga. I tidigare studier har det visat sig att en lärares undervisning till stor del baseras på lärobokens utformning (Schmidt, 2012; Pepin & Haggarty, 2001). Så oavsett om en elev bläddrar i boken för att finna metoder att använda eller har hört det från sin lärare, är det rimligt att anta att elevens möjligheter att arbeta med matematiska problem kan värderas utifrån likheter och olikheter mellan en uppgift och vad en lärobok i övrigt tillhandahåller. I analysen av uppgiften om näckrosbladet har hänsyn tagits till ett av de lösta exempel som presenterats ett par sidor tidigare i läroboken där uppgiften går ut på att beräkna area och omkrets på ett tygmärke med angiven diameter. Det har bedömts som uppenbart att uppgiftens lösning kan baseras helt och hållet på det lösta exemplets metod. Kopplingen tydliggörs i detta fall på flera sätt. Inte minst genom att det lösta exemplet finns i nära anslutning till uppgiften, i samma avsnitt. Dessutom är frågeställningarna och den information som ges i uppgiften desamma. För att göra det hela ännu tydligare har läroboksförfattarna dessutom valt att intill uppgiften ge en direkt hänvisning till det lösta exemplet, så att det ska vara enklare att hitta. Uppgiften har därför kategoriserats som en HR-uppgift (hög korrelation). För att istället ha kunnat kategoriseras som till exempel en LR-uppgift (låg korrelation) krävs att någon del av lösningsmetoden inte tidigare presenterats i läroboken.

4.3.2 Läroboksuppgift med låg korrelation

Ett exempel på en uppgift där en del av lösningsmetoden inte har presenterats tidigare i läroboken är:

> ”Ett jetplan hinner 7 900 km på 6,5 h. Hur långt hinner det på 6 h?” (Uppgift 5a bland ”tema”-uppgifterna i avsnittet ”Ställ upp och tolka formler och uttryck”, från Alfredsson, Bråting, Erixson & Heikne, 2011, s. 159).

Ett tänkbart tillvägagångssätt för att lösa uppgiften är att först beräkna hur långt jetplanet hinner på en timme (det vill säga hastigheten i km/h) genom beräkningen 7900/6,5. Nästa steg för att finna svaret på frågan är att använda denna hastighet och tiden 6 h för att beräkna sträckan. Dessa bägge beräkningar, var för sig, att beräkna jetplanets hastighet, och att med hjälp av en angiven hastighet och tid beräkna en sträcka finns det möjlighet att imitera från i boken tidigare lösta exempel. Däremot finns inget löst exempel eller tidigare uppgift där den övergripande lösningsidén med två delsteg används. Uppgiften kan lösas på ett flertal andra sätt så som till exempel genom att beräkna hastigheten och sedan pröva sig fram till samma hastighet med tiden 6 h, eller genom att dela upp sträckan 7 900 km i 13 stycken halvtimmar för att sedan multiplicera den erhållna sträckan med 12 halvtimmar (6 h). Inte heller någon av dessa lösningsmetoder eller andra tänkbara metoder kunde vid en översyn av läroboken finnas, vilket gjorde att uppgiften kategoriserades som en LR-uppgift. Det bedömes att den del av lösningen som en elev skulle behöva konstruera själv var så pass central att kategoriseringen var GLR (globalt låg korrelation).

Genom att skaffa sig en helhetsbild av andelen uppgifter i en lärobok som inte kan lösas med stöd av tillgängliga metoder, i detta fall textlotsning, kan man säga något om möjligheterna att arbeta med problemlösning.

4.3.3 Imitativt resonemang

I *studie 2* analyserades de resonemang som elever förde då de löste läroboksuppgifter liknande den om näckrosbladet ovan. Elevens resonemang kategoriserades utifrån hennes faktiska agerande. Om en elev till exempel, utan att bläddra i boken, sedan tidigare känner till att den här typen av uppgifter kan lösas genom att beräkna $r = \frac{d}{2}$, och använda formeln $A = \pi \cdot r^2$, används ett bekant AR (algoritmiskt resonemang). Den möjlighet att imitera läroboken och textlotsas i sitt resonemang som en elev har, kan jämföras med om motsvarande lotsning erbjudits från en lärare (lärarlotsat AR) eller en annan elev (elevlotsat AR). I andra fall kan en elev ha uttalat att hon tror sig veta att arean beräknas, antingen genom att använda någon av formlerna $A = \pi \cdot 2 \cdot r$ eller $A = \pi \cdot d$, eller med formeln $A = \pi \cdot r^2$. Eleven fortsätter sitt resonemang genom att först prova (den inkorrekta) formeln A= $\pi \cdot d$ och jämför sitt resultat med det facit som finns längst bak i boken. Då svaret inte stämmer provar hon istället den andra formeln, vilken visar sig ge ett svar som överensstämmer med facit. Eleven använder sig i detta fall av ett begränsat resonemang.

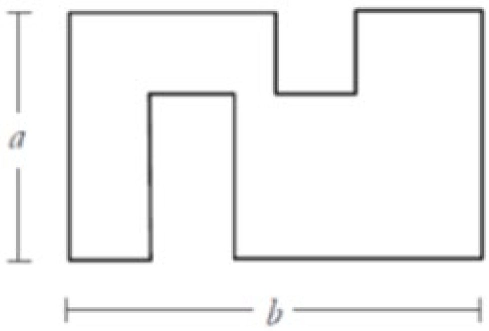
4.3.4 Resonemang och en uppfattning om osäkerhet

Den tredje uppgiften som jag valt för att exemplifiera analysen av uppgifter är en uppgift som ingick i såväl *studie 3, 4* som *5*.

Vilket av följande uttryck motsvarar figurens omkrets?

$a + b$ $\quad$ $2a + 2b$ $\quad$ $3a + 2b$ $\quad$ $3a + 3b$ $\quad$ $4a + 2b$

Motivera ditt svar.

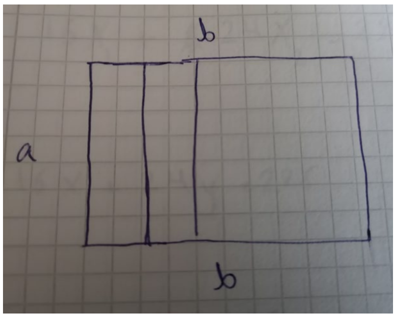


Figur 9. Exempeluppgift 3 (Uppgift från Nationella kursprovet i Matematik, kurs A, vt 2010, del I, Skolverket, 2010, s. 3)

I studie 3 löste elever uppgiften i par och där framkom bland annat att vissa elever gärna söker sig till välbekanta metoder hellre än förlitar sig på sin egen förmåga att utforska matematiken och konstruera en egen metod. Detta visade sig tydligt när en elev som vi valt att kalla Leila, tillsammans med sin kompis tar sig an uppgiften. På denna uppgift liksom flera av de andra uppgifterna som Leila och hennes kompis försökte lösa, var Leila tydlig från början med att hon inte visste hur man skulle göra, och att hon inte förstod. Hon uppvisade en osäkerhet på sin egen förmåga. Den första slutsatsen som dras är att svaret bör vara 2a+2b. Figuren liknar en rektangel och det är en för dessa elever välbekant figur. En rektangels omkrets är bredden×2 + höjden×2, dvs 2a+2b i detta fall. Leila förväntar sig att uppgifter ska kunna lösas genom att använda välbekanta metoder. I den efterföljande intervjun betonar Leila att hon strävar efter ett enkelt och välbekant sätt att lösa uppgiften på. Leila tvekar dock i detta fall, och börjar fundera på om inte ”inbuktningarna” borde påverka omkretsen. Elevparet resonerar lite fram och tillbaka innan Leila på ett helt korrekt sätt beskriver för sin kompis att omkretsen ju borde vara 4a+2b. Leila beskriver att hon ser att hon kan lägga samman djupet på respektive inbuktning och på så sätt få ett ’a’, och att längden ’b’ skapas genom att rektangeln görs hel av inbuktningarnas botten. Det råder dock fortfarande en viss osäkerhet kring lösningen, och Leila får vare sig medhåll eller mothugg från sin kompis. Efter en kort stund avgör trots allt Leila tillsammans med sin kompis att det nog är 2a+2b som är svaret ändå. Sättet som Leila hanterar uppgiften är intressant ur flera perspektiv. Inledningsvis verkar det falla sig naturligt att använda en välbekant metod för att lösa uppgiften (så som i detta fall metoden för att beräkna en rektangels omkrets). Leila har en bild av att omkretsen är en figurs alla sidor adderade, vilket gör att hon funderar på hur inbuktningarna kan beaktas i metoden. Trots att hon sedan genomför ett korrekt CMR (kreativt matematiskt resonemang) och drar en korrekt slutsats beslutar hon sig ändå, tillsammans med sin kompis för att svara 2a+2b. Det sista kan bero på en osäkerhet kring den egna förmågan att resonera matematiskt utan att återskapa tidigare välkända metoder, och kanske på en viss otrygghet i begreppet omkrets.

4.3.5 Konceptuella och kreativa utmaningar

Samma uppgift ingick även bland de uppgifter som eleverna i *studie 4* fick lösa. Då med ett fokus på att identifiera de utmaningar eleverna mötte. I hälften av elevernas arbete med uppgiften kan en konceptuell utmaning identifieras som har att göra med elevernas begreppsbild av omkrets. Den framkallade bilden är inte tillräcklig för att se att samtliga sidor (även inbuktningarna) är en del av figurens omkrets, oavsett om man i sin lösning väljer att flytta runt delytor eller sidor. Trots att begreppet omkrets är något som de flesta av dessa elever troligen arbetat med i olika former sedan många år tillbaka blir de alltså osäkra då de behöver använda begreppet i en ny situation, med en obekant figur. Flera av eleverna uttrycker tydligt under uppgiftslösningen eller i den efterföljande intervjun att de vet att en omkrets är figurens alla sidor adderade. Flera elever tvekar dock då de som en del av sin lösning modifierar figuren genom att flytta sidor och delytor för att se figuren på ett nytt sätt. I vissa fall hamnar då vissa ursprungliga sidor inuti figuren, som i figur 10 nedan.



Figur 10. Del av elevlösning till exempeluppgift 3 från Nationella provet 2010.

Frågan som flera elever då ställer sig är om dessa sidor bör inkluderas i omkretsen eller inte. Under uppgiftslösningen och i intervjuer framgår det att eleverna fokuserat på att arean är densamma i den modifierade figuren, och att då även omkretsen borde vara densamma. En osäkerhet visar sig kring om omkretsen verkligen alltid beräknas som längden av alla en figurs sidor adderade, eller om det är så att omkretsen inte förändrats genom figurmodifieringen. Då utmaningen som dessa elever möter beror på en elevs (avsaknad av) förståelse för och förmåga att använda sin kunskap om ett begrepp, i detta fall omkrets, bedöms det vara en konceptuell utmaning. Utöver denna utmaning identifierades dessutom i elva av tolv elevers arbete en kreativ utmaning. Eleverna hade ingen given metod att följa utan tvingades skapa en lösningsmetod på egen hand. Flera elever uttryckte under uppgiftslösningen och i intervjuer att de i vanliga fall kunde använda en formel för att beräkna omkretsen, eller utgå från en figur där samtliga sidor hade en angiven längd och addera dessa. Flera beskrev att obekanta figurer oftast hängde ihop med areaberäkningar, vilket kan förklara sättet som flera angrep uppgiften på (genom att flytta och ha fokus på delytor, snarare än sidor).

Resultaten från *studie 4* bekräftas till viss del av de resultat som framkommit genom att lärare intervjuats kring förväntade elevutmaningar i uppgifter i *studie 5*. Lärarna var överens om att förståelse för omkrets var centralt för att lösa uppgiften och flera förväntade sig att elever skulle ha svårigheter likt de som beskrivits tidigare. Framför allt betonade dock lärarna att uppgiften var utmanande genom att eleverna stötte på en ny figur och för att lösa uppgiften, istället för att räkna, tvingades ”se i bilden” (att de sidorna i de bägge inbuktningarna parvis utgör varsitt ’a’). Sättet som denna utmaning beskrevs på av lärarna varierade en del. Vissa jämförde den med sättet som en kreativ utmaning är definierad på, och med att konstruera en ny lösningsmetod. Andra beskriv utmaningen som något kopplat till en medfödd talang för att ”se”, snarare än en förmåga som genom övning kan utvecklas.

4.4 Analys och användning av ramverk

Ramverket för imitativa och kreativa resonemang (Lithner, 2008), utgör grunden för de analysmetoder som använts i *studie 1-3*. Utöver detta har även, i *studie 3*, Sumpters (2013) definition av indikationer på uppfattningar använts vid analysen. En styrka med dessa studier är att beprövade (i ex. Bergqvist m.fl., 2008; Lithner, 2003; Lithner, 2004; Lithner, 2008; Palm m.fl. 2011; Sumpter, 2013), om än delvis modifierade, ramverk och analysmetoder använts. Begreppsvaliditeten stärks genom att systematiska fel undviks under operationaliseringen av ramverket (Esaiasson, 2007). Tidigare studier har visat att det är möjligt använda begreppen och analysmetoderna, med dess teoretiska grund för att svara besvara liknande forskningsfrågor som de i avhandlingens studier. Genom att dessutom använda olika datainsamlingsmetoder för att undersöka en övergripande fråga med samma eller liknande analysmetoder stärks en empirisk validitet (Esaiasson, 2007). Resultatvaliditeten påverkas, förutom av begreppsvaliditeten, av reliabiliteten, det vill säga tillförlitligheten i analyserna (Esaiasson, 2007). Interkodarreliabilitet kan användas som ett mått på tillförlitligheten i en analys. Inom ramen för varje studie har flera personer haft insikt i, och deltagit mer eller mindre aktivt i analysarbetet. I pilotstudier och under de initiala faserna av analysarbetet har interkodarreliabiliteten beaktats för att indikera ett behov av att utveckla och förtydliga analysmetoden.

I *studie 4 och 5* utvecklas ett ramverk för analys av elevutmaningar vid problemlösning. Ramverket har sin utgångspunkt i att tidigare forskning har visat att konceptuella och kreativa utmaningar utgör en väsentlig del av elevers problemlösning. Ramverket grundar sig bland annat på teorin om begreppsbilder. Avgörande för att öka, framför allt begreppsvaliditeten för dessa studier blir att lyckas beskriva ramverket och analysmetoden med tydlighet och transparens. För att lyckas med detta krävs att såväl de begrepp och teorier som används är tydligt beskrivna, som att operationaliseringen framgår med samma tydlighet (Esaiasson, 2007). En avvägning mellan, å ena sidan, en omfattande text där till exempel analysprocessen beskrivs detaljerat, och en mindre omfattande text som riskerar att ha lägre begreppsvaliditet, måste göras. Inom ramen för arbetet med avhandlingen har valet gjorts att, *studie 4*, mest lämpligt är relativt omfattande, för att kunna beskriva såväl uppbyggnaden av ramverket som operationaliseringen av detsamma.

4.4.1 Läroboks- och uppgiftsanalys

Metoden som användes för att analysera uppgifterna i läroböcker i *studie 1 och 2*, baserades på de metoder som använts i tidigare studier (Lithner, 2004; Palm, Boesen & Lithner, 2011). Tänkta elevlösningar jämfördes med den information som presenterats tidigare i läroboken, eller som använts vid lösningen av föregående uppgifter. Informationen i en lärobok består till exempel av lösta exempel, faktarutor, definitioner och sammanfattningar. Läroboken användes som ett sätt att beskriva undervisningen (Schmidt m.fl., 2001; Stein, m.fl., 2007). Initialt undersöktes informationen som fanns i nära anslutning till uppgiften, i samma avsnitt. I de fall då informationen inte fanns i samma avsnitt som uppgiften krävdes ytterligare karaktäristik som sammankopplade uppgiften med informationen och gjorde det rimligt att en elev använde den. Exempel på sådan karaktäristik är liknande kontext, figur eller nyckelord (Palm m.fl., 2011). I exemplet i avsnitt 4.3.1 fanns informationen i samma avsnitt, men dessutom fanns hänvisningar som gjorde information tillgänglig för en elev.

Vissa delar av lösningsmetoderna betraktades som elementära och således inte som situationer där kreativa resonemang skulle krävas. Till exempel kan den miniräknarhantering som sannolikt används för att genomföra beräkningen av arean i uppgiften (avsnitt 4.3.1) betraktas som elementär. Dessa avväganden gjordes hela tiden i relation till den tänkta målgruppen, gymnasieelever. Vad som kan betraktas som grundläggande är i hög grad en fråga på individnivå, men där generella grupperingar kan ge viss vägledning. En uppfattning om vad man i relation till en sådan gymnasieelev i respektive land kunde bedöma som grundläggande kunde ofta styrkas av sättet på vilket boken hanterade det matematiska innehållet. Samtidigt som det kan ses som en styrka att den som analyserat läroböckerna har sjutton års erfarenhet från undervisning på främst gymnasienivå, så finns en risk att forskarens tidigare erfarenheter påverkar den analys som görs och de slutsatser som dras. Risken kan minimeras genom att sträva efter en hög begreppsvaliditet där operationaliseringen av ett ramverk är tydliggjord (Esaiasson, 2007). Initialt jämfördes huvudförfattarens analys med medförfattarnas, och en interkodarreliabilitet på 98 procent erhölls.

4.4.2 Analys av elevers resonemang

För att fånga en elevs resonemang har i *studie 2 och 3* elevers lösningar till uppgifter beskrivits med en struktur bestående av fyra steg.

1. Eleven möter en (del)uppgift

2. Strategival (i en bred mening där att minnas, låta sig guidas och konstruera är exempel). En strategi kan svara mot hela uppgiften, såväl som mot en liten del av den. Kopplat till strategivalet kan finnas ett argument för varför strategin kan användas för att lösa uppgiften.
3. Strategiimplementering. Denna fas kan kopplas till argument för varför strategin faktiskt fungerade i detta sammanhang.
4. Slutsats

En lösning till en (del)uppgift är nödvändigtvis inte komplett eller korrekt, men kan trots detta betraktas som en lösning. En slutsats kan leda till att en ny deluppgift möts och att strukturen återupprepas med nya val och implementeringar. Karaktäriseringen av elevers resonemang bygger på en analys av de explicita och implicita argument som synliggjorts med stöd av lösningsstrukturen. Att en elev, som i uppgiften i avsnitt 4.4.3, uttalar att hon tror sig veta hur arean beräknas, är ett exempel på ett explicit argument som indikerar att bekant AR används. I *studie 2* då data samlats in i klassrumsmiljö, och eleverna inte ombetts att uttryckligen uttala alla sina argument för metodval, kunde analysen istället utgå från ett implicit argument. Ett exempel på ett implicit argument för att låta sig lotsas av en kamrat kan bestå av frågan till kamraten och faktum att sedan den föreslagna metoden används i sin helhet.

Tre väsentliga aspekter har varit centrala för att särskilja ett kreativt matematiskt resonemang från andra resonemang:

1. Den lösning som beskrivits är för eleven ny (eller glömd och återskapad)
2. Det finns argument (explicit eller implicit) som motiverar strategivalets rimlighet
3. De argument som används baserar sig på, för uppgiften, relevanta matematiska egenskaper

Beroende på i vilken omfattning eleven använt sig av CMR i lösningen kategoriserades det som antingen globalt, eller lokalt. Om ett resonemang inte kunde kategoriseras som CMR, kategoriserades det istället som någon av typerna av ett imitativt resonemang.

Trots att eleverna i såväl *studie 2 som 3* arbetade i par eller mindre grupper visade det sig möjligt att särskilja elevernas resonemang från varandra, och se de enskilda elevernas resonemang var för sig. Genom att dessutom eleverna (eller lärarna) i *studie 2* själva fick välja uppgifter de skulle arbeta med fick vi reda på vilka uppgifter som i läroboken som främst användes i undervisningen.

4.4.3 Analys av indikationer på elevers uppfattningar

För att studera elevers uppfattningar som i studie 3, användes en metod som tidigare använts av Sumpter (2013) i relation till rutinuppgifter. En tematisk analys (Braun & Clarke, 2006) användes för att identifiera och kategorisera elevers uppfattningar med syfte att undersöka relationen mellan elevens uppfattningar och resonemang. Likt ett resonemang blir inte själva uppfattningen synlig utan analysen bygger på indikationer på uppfattningar. Dessa kan visa sig i form av explicita uttalanden från uppgiftslösningstillfället, intervjun eller i elevens skriftliga redovisning av sin lösning. Eleven i exemplet i avsnitt 4.3.4 säger flera gånger saker i stil med: ”sådant här vet jag inte hur man gör”. En indikation på en uppfattning kan även vara, till exempel en gest eller en suck, som kan kopplas till och förstärka andra uttalanden och beteenden. Det kan vara svårt att bekräfta ett orsakssamband mellan en uppfattning och vad en elev säger eller gör (Callejo & Vila, 2009), inte minst då uppfattningarna ska kategoriseras (Speer, 2005). Genom att betrakta elevers uttalanden, gester och andra beteende som indikationer på uppfattning finns en möjlighet att se samband mellan dessa indikationer och specifika ageranden (Sumpter, 2013). Den data som analyserades var såväl det eleverna gjorde och sa då de löste uppgifterna, deras skriftliga lösningar, samt det de sa vid de efterföljande intervjuerna. Med stöd av flera typer av data ges bättre förutsättningar att fånga, i detta fall elevers uppfattningar (Robson, 2011). Elevernas uppfattningar kan fångas i såväl uppgifts-lösningen som i intervju, vilket kan ses som något som stärker validiteten (McLeod, 1989; Robson, 2011). Genom att utgå från en tidigare använd metod och jobba deduktivt utifrån tre fördefinierade teman stärktes validiteten ytterligare. Då det visat sig svårt att genomföra en analys av uppfattningar med hög validitet (Op’t Eynde m.fl., 2002) genomfördes hela analysen av två forskare, som genom diskussioner erhöll samstämmighet i samtliga fall. De kategoriseringar som gjordes indikerar en inriktning på de uppfattningar eleverna hade.

4.4.4 Analys av utmaningar och dess karaktäristik

I *studie 4* analyserades elevlösningar (såväl det som eleven presterade skriftligt som det som eleven uttryckte muntligt vid uppgiftslösningen) för att skapa en bild av en elevs tidigare erfarenheter och begreppsbild. Det en elev gör och säger antas kunna förklaras delvis av hennes begreppsbild (Bingobali & Monaghan, 2008). I data från elevers uppgiftslösande indikerade tvekan eller ansträngning en möjlig utmaning. Detta kunde innebära längre såväl som kortare tidssekvenser. En beskrivning av elevens lösning i linje med strukturen presenterad i avsnitt 4.4.2 användes för att såväl gjorda strategival och implementeringar som argumenten för dessa skulle bli tydliga. De deluppgifter där eleven visat tvekan eller ansträngning fokuserades i resterade analysarbetet, utan att skilja dem helt från uppgiftens frågeställning och en eventuell, nödvändig lösningsidé. Elevens tidigare erfarenheter beskrevs med stöd av hennes uttalanden och handlingar vid uppgiftslösningen. De erfarenheter som var relevanta för lösningsmetoden skrevs fram. Därefter beskrevs en för uppgiften tänkbar lösningsmetod. Den tänkbara lösningen byggde på elevens arbete och kompletterades vid behov för att den tänkbara lösningen skulle bli komplett och korrekt. I nästa steg jämfördes elevens erfarenheter med den tänkbara lösningen. En kreativ utmaning beskrevs som den eventuella diskrepans som kunde uppmärksammas. På ett motsvarande sätt beskrevs och jämfördes sedan elevens begreppsbild och en för uppgiften adekvat begreppsbild. På så sätt beskrevs en konceptuell utmaning som den eventuella diskrepansen mellan elevens begreppsbild och en adekvat begreppsbild. I de fall då en indikation på en utmaning inte kunde kopplas till vare sig en kreativ eller en konceptuell utmaning, beskrevs elevens svårigheter på ett mer allmänt sätt. I relation till dessa utmaningar och analysen av flera elevers arbete med olika uppgifter tydliggjordes viss karaktäristik på dessa utmaningar. Detta skedde genom induktiv, tematisk analys för att finna mönster och karaktäristik väsentlig i relation till studiens fokus på problemlösning (Braun & Clarke, 2006).

I *studie 5* utgick analysen från de tänkta utmaningarna som lärarna beskrev i relation till de tänkta elevlösningarna. Sättet som varje utmaning beskrevs på analyserades för att identifieras som antingen en kreativ, en konceptuell eller annan utmaning. För att en utmaning skulle kategoriseras som konceptuell krävdes att lärarna tydligt kopplat elevens svårighet i en situation till ett begrepp i vid bemärkelse (se avsnitt 3.6.1). Ett exempel på detta finns i avsnitt 4.3.5 där lärarna beskriver utmaningen som att eleverna kommer att vara osäkra på vad som avses med omkrets i relation till en figur och en modifiering av figuren. Hänvisningen till begreppet omkrets gör att kategoriseringen kan bli att utmaningen är konceptuell. En kreativ utmaning kategoriserades på motsvarande sätt genom att lärarnas beskrivning kunde kopplas till en ny metod eller delmetod eller till konstruktionen av en del av lösningen. I exemplet i avsnitt 4.3.5 beskriver några av lärarna utmaningen som att elever kan låsa sig vid en metod och ha svårt med att hitta en alternativ metod. Lärarna kopplar detta till den delvis nya situationen som den för eleverna nya figuren innebär och att detta kräver ett nytt tankesätt. I de fall då en utmaning inte kunde kategoriseras som vare sig kreativ eller konceptuell beskrevs den ändå för att kunna ingå i nästa steg av analysen. Som underlag för analysen användes såväl de utmaningar som lärarna beskrivit i sina anteckningar inför intervjun och ofta använde som utgångspunkt i intervjun, som de utmaningar som beskrevs som en följd av intervjun. Analysen av var och en av gruppintervjuerna användes sedan som underlag för en tematisk analys för att finna gemensamma drag i sättet som utmaningarna beskrivits (Braun & Clarke, 2006).

4.5 Etiska överväganden

Vetenskapsrådets principer för god forskningssed har genom hela arbetet med avhandlingens studier varit vägledande (Vetenskapsrådet, 2011; 2017). I vissa fall finns det lagar att följa medan det i andra handlar om moraliska ställningstaganden. En lag gäller under fastställda förutsättningar, till exempel avseende rum eller tid. Moraliska frågor däremot kräver en inre argumentation utifrån de värderingar som finns (Vetenskapsrådet, 2017). Varje individ har en inbyggd moral, som visar sig genom handling. Etiken är den medvetna, reflekterade och motiverade moralen (Vetenskapsrådet, 2017). Om moralen är praktiken så är etiken den formulerade teorin (Vetenskapsrådet, 2017). En central etisk avvägning är den mellan forskningskravet, det vill säga, kravet från samhället att forskningen på något sätt förbättrar förutsättningarna att leva, verka och utvecklas, och individsskyddskravet, som innebär att ingen ska komma till skada på grund av forskningen (Vetenskapsrådet, 2017). I all forskning som involverar människor finns en risk att förutsättningar förändras på ett sådant sätt att individer tar skada. Etiska övervägningar handlar om att i relation till forskningskravet minimera dessa risker, samt skapa en förståelse för forskningen.

I *studie 2-4* har elever studerats med fokus på deras uppgiftslösning. I *studie 3* har dessutom sättet som lärare eventuellt påverkar elevers uppgiftslösning undersökts. I *studie 5* har lärare intervjuats med samma fokus, på elevers uppgiftslösning. Inte i någon av dessa studier har bedömningen gjorts att någon etikprövning krävts. De kända riktlinjer som finns för hantering av personuppgifter vid Högskolan Dalarna har beaktats (Högskolan Dalarna, 2019). Till exempel finns krav på att insamling av personuppgifter kräver ett bestämt ändamål, att endast det som behövs för ändamålet behandlas och att tillräckliga åtgärder vidtagits för att skydda uppgifterna. Inga känsliga personuppgifter behandlas och inga metoder har använts med avsikt att påverka de medverkande, vare sig fysiskt eller psykiskt. All insamlad data har förvarats på en extern hårddisk som använts endast utan uppkoppling till internet. Inför varje datainsamling har de medverkande fått information om studiens syfte och genomförande, hanteringen av data och konfidentialitet, att deltagande är frivilligt och att deltagaren har valet att när som helst avbryta sitt deltagande och att insamlad data då raderas. Deltagarna har fått kontaktuppgifter till ansvarig för datainsamlingen och en möjlighet att i efterhand få ta del av framkomna resultat. Samtliga deltagande elever och lärare har fått skriva under ett skriftligt medgivande till deltagande i studien. I de texter som behandlar information om deltagarna har i samtliga fall pseudonymer använts för att referera till specifika deltagare.

I urvalet av läroböcker för studie 1 har skolpersonal och forskare i de olika länderna tillfrågats om vanligt använda läroböcker i respektive land. Dessa personer har inte haft någon känd koppling till läroboksförlag och har inte heller fått någon ersättning för den hjälp de bidragit med.

Samtliga fem studier har genomförts inom ramen för forskarutbildningen. Den första halvan av forskarutbildningen genomfördes som så kallad kommundoktorand, där Hudiksvalls kommun bidragit med lön under studietiden. Den andra halvan av forskarutbildningen har genomförts som doktorand, anställd av Högskolan Dalarna. De samarbeten kring respektive studie som funnits redovisas i avsnittet ”Avhandlingens fem studier”. Finansieringen av forskarstudierna och samarbeten med andra forskare har inte inneburit att resultat eller slutsatser påverkats eller att tillgången till forskningen på något sätt begränsats.

5 Kortfattat om resultaten från de fem studierna

Genom en syntes av avhandlingens fem studier besvaras de två övergripande frågeställningarna. En sammanfattning av respektive studie, med ett fokus på resultat och slutsatser utgör underlag för syntesen.

5.1 Sammanfattning av studie 1

Med tanke på läroböckers centrala roll i undervisningen (t.ex. Schmidt m.fl., 2001) var studiens syfte att undersöka hur ett urval internationella läroböcker förhåller sig till den centrala roll, förmågor som problemlösning och matematiska resonemang har, i beskrivningen av matematisk kunskap i internationella styrdokument (t.ex. Skolverket, 2011a; Boesen m.fl., 2014). Mer specifikt undersöktes i vilken omfattning läroböckerna erbjuder elever uppgifter där lösningsmetoden inte finns tillgänglig i boken (LR-uppgifter), och var i bokens struktur dessa uppgifter återfinns. Det handlade således, kortfattat om att undersöka vilken potential läro-böcker i Sverige och internationellt har med avseende på att erbjuda elever möjligheter att arbeta med matematiska problem och konstruera egna lösningar, baserat på matematiskt grundade resonemang. Detta ställs i relation till rutinuppgifter där det är möjligt att imitera tillgängliga metoder/algoritmer. Över 5700 uppgifter från läroböcker från tolv olika länder, på fem kontinenter analyserades.

Resultatet från studien visade att andelen HR-uppgifter (hög korrelation) i läromedlen från tolv länder är liknande, och i jämförelse med LR-uppgifter (låg korrelation), mycket hög. Andelen GLR-uppgifter (globalt låg korrelation) i läroböckernas algebraavsnitt var i genomsnitt 8 procent, 12 procent var LLR-uppgifter (lokalt låg korrelation), och 81 procent var HR-uppgifter. Andel LR-uppgifter var något högre för geometriavsnitt än för algebraavsnitt. Motsvarande andelar för geometriavsnitten var 12, 17 respektive 71 procent. I den svenska läroboken var andelarna 11, 15 och 74 procent för algebra, och 20, 15, 65 procent för geometri. Andelen LR-uppgifter var som lägst bland de uppgifter som inleder varje nytt avsnitt i boken, och som i flera läroböcker benämnts som enklast. Bland dessa uppgifter utgjorde GLR-uppgifterna 4 procent, LLR-uppgifterna 8 procent, och HR-uppgifterna 88 procent. Inte heller i uppgiftssamlingar under rubriker som ’problemlösning’ eller ’utforska’ fanns en övervägande del LR-uppgifter. Till exempel hade ’problemlösning’ 31 procent LR-uppgifter, och ’utforska och upptäck’ hade 32 procent LR-uppgifter.

Dessa resultat indikerar att de divergerande resultaten i internationella mätningar av elevers kunskaper i matematik inte kan tillskrivas uppgifterna i läroböckerna. Vidare visade resultaten på begränsade möjligheter för elever att utveckla en problemlösningsförmåga med hjälp av läroboken och dess uppgifter. Dessutom finns en risk att läroböckerna sänder ut signaler om att problemlösning är att betrakta som överkurs då det främst är bland de senare (och av författarna indikerade som svårare) uppgifterna som LR-uppgifter återfanns.

5.2 Sammanfattning av studie 2

Syftet med studie 2 var att undersöka hur läroboken används av elever i undervisningen genom att jämföra de resonemang som elever använder för att lösa uppgifter, med hur dessa uppgifter kan kategoriseras med avseende på HR och LR (i artikeln benämnda IR och CMR), vilket kan jämföras med en distinktion mellan rutinuppgifter och matematiska problem. Elevernas resonemang kategoriserades utifrån de argument för strategival och implementering de hade. IR (imitativt resonemang) kan jämföras med rutinarbete medan CMR (kreativt matematiskt resonemang) kan betraktas som en väsentlig del av problemlösning. Resonemangen kategoriserades även i underkategorier utifrån omfattningen av CMR eller källan till elevernas AR (algoritmiskt resonemang). 15 elevers arbete med 86 uppgifter analyserades.

Resultaten visade att 84 procent av de uppgifter som eleverna arbetade med kunde kategoriseras som HR-uppgifter, varav 99 procent löstes genom ett AR. Av de 16 procent uppgifter som kategoriserades som LR-uppgifter löstes 57 procent med AR. Sammantaget användes Globalt CMR vid lösningen av 1 procent och Lokalt CMR vid lösningen av 8 procent av uppgifterna. Den möjlighet till textlotsning som läroboken erbjöd verkade dock i hög utsträckning ersättas av andra typer av resonemang. Framför allt användes *bekant* AR, *elevlotsat AR* och även i mindre omfattning *lärarlotsat AR*. Facit användes frekvent av eleverna vid uppgiftslösning. Resultaten visade dessutom att 84 procent av de uppgifter som eleverna arbetade med, av läroboksförfattarna bedömts som enklast.

Sammantaget visade studien att de uppgifter som elever arbetade med i hög utsträckning kan jämföras med rutinuppgifter, och att eleverna i hög utsträckning använde sig av imitativa resonemang. Detta innebär att eleverna sällan arbetade med matematiska problem.

5.3 Sammanfattning av studie 3

Elever har i tidigare forskning visat sig ha uppfattningar om matematik och uppgifter som något imitativt och som ska gå snabbt. Syftet med denna studie var att undersöka relationen mellan elevers uppfattningar om matematik och de resonemang som användes vid uppgiftslösning, och specifikt problemlösning. Åtta elever fick lösa fyra matematiska problem i par. Därefter intervjuades eleverna enskilt. Elevernas resonemang kategoriserades som IR eller CMR. En deduktiv tematisk analys användes med stöd av tre tidigare identifierade teman på utmaningar; förväntningar, motivation och säkerhet. Tre av elevernas arbete med en av uppgifterna användes för att exemplifiera analysen och presentera resultaten.

Resultaten visade att de tre elevernas (vilka i texten fått pseudonymer) uppfattningar skiljde sig åt. Leila hade en uppfattning om CMR som osäkert och om sig själv som oförmögen att tänka matematiskt, och valde därför att använda IR trots att detta inte var en framkomlig väg för henne. Även Karl hade en uppfattning om CMR som osäkert och att det borde finnas bekanta metoder att använda, men uppvisade även spår av säkerhet, och var motiverad att kunna presentera en lösning på varje uppgift. Han lyckades lösa flera uppgifter med hjälp av CMR. Karl hade en uppfattning om att uppgifterna bör vara av en viss svårighetsnivå, inte för lätta och inte för svåra, och värderar sina egna lösningar i relation till denna uppfattning. Eric, slutligen, använde CMR på de flesta uppgifterna och hade uppfattningen om det och sitt arbete som något positivt. Trots det lyckades han bara lösa en av uppgifterna korrekt. Eric uppfattade dessutom gissningar, utan matematisk grund, som en bra metod. Eric uppvisade en säkerhet i relation till sitt arbete, som dock i låg utsträckning var baserade på en matematisk grund. Resultaten visade att de tre fördefinierade teman, som hade sitt ursprung i en studie med rutin-uppgifter, kan användas även för att beskriva elevers arbete med matematiska problem.

En gemensam nämnare var att eleverna uppfattade IR som mer tryggt i alla situationer och förväntade sig att det borde finnas en bekant metod att ta till. Sättet som eleverna i slutändan löste uppgifterna varierade dock. Någon elev valde att undvika (ett korrekt) CMR för att istället luta sig mot (ett inkorrekt) IR, medan andra använde sig av CMR, vilket ledde till såväl korrekta som inkorrekta lösningar. Ju svårare uppgifterna var, ju större var benägenheten för eleverna att försöka använda sig av IR. När däremot en lösning verkade finnas inom räckhåll användes CMR i högre utsträckning. En slutsats som kan dras är att eleverna osäkerhet kring att använda CMR kan begränsa deras möjligheter till att arbeta med problemlösning.

5.4 Sammanfattning av studie 4

Tidigare forskning har tydliggjort att det i elevers problemlösning ingår kreativa och konceptuella utmaningar (Lithner, 2017). Studiens syfte var att skapa underlag för en djupare förståelse för problemlösning genom att utveckla definitioner på kreativa och konceptuella utmaningar och ett analytiskt ramverk för att identifiera dessa utmaningar i elevers problemlösning. Dessutom syftade studien till att karaktärisera dessa utmaningar. Tolv elever fick lösa sju uppgifter, och i realtid samt i efterföljande intervjuer, beskriva lösningsprocessen och sina resonemang.

Ramverket som utvecklades byggde på att en diskrepans mellan elevers tidigare erfarenheter och en för uppgiften lämplig lösningsmetod användes för att beskriva en kreativ utmaning. På motsvarande sätt användes diskrepansen mellan en elevs begreppsbild och en erforderlig begreppsbild för att beskriva en konceptuell utmaning. Med stöd av ramverket och de identifierade, kategoriserade och beskrivna utmaningarna karaktäriserades dessa utmaningar.

Studien visade vidare att det utvecklade ramverket var möjligt att använda för kategoriseringen, men behöver ytterligare utveckling för att bli mer praktiskt användbart och nyttigt för vidare forskning eller för planering av undervisningen. Det visade sig att de utmaningar elever mötte vid problemlösning i stor utsträckning kunde kategoriseras som kreativa eller konceptuella utmaningar.

Genom en tematisk analys av de utmaningar som beskrevs med stöd av ramverket kunde utmaningarna karaktäriseras för att skapa en tydligare bild av utmaningarna. En kreativ utmaning kunde karaktäriseras av ett behov av att sätta samman flera delmetoder till en helhet eller att finna, härleda och använda implicit information från uppgiften. En konceptuell utmaning karaktäriserades i relation till de krav på elevens begreppsbild och kunskapsutveckling som ställdes. En karaktäristik var att en mer flexibel begreppsbild behövdes för att kunna användas i delvis nya situationer. Det innebar till exempel att en elevs framkallade begreppsbild inte var erforderlig för att lösa en specifik uppgift, men att eleven samtidigt visade att begreppsbilden, med större flexibilitet skulle kunna användas i situationen som uppgiften innebar. I andra situationer krävdes en utvecklad begreppsbild eller att två eller flera separata begreppsbilder vävdes samman. Den konceptuella utmaningen kunde även karaktäriseras som ett behov att ompröva en befintlig begreppsbild för att kunna anpassa den till ny information. Dessutom kunde såväl konceptuella som kreativa utmaningar kopplas till nyttjandet av representationer och (beräknings)procedurer. Det innebar till exempel att konstruktionen av en för lösningen värdefull eller nödvändig representation så som en algebraisk modell av ett skeende krävde konceptuella hänsyn. Till exempel då två obekanta ska relateras till varandra i två ekvationer.

I inget fall identifierades en konceptuell utmaning utan att en kreativ också identifierades. Däremot fanns uppgifter med enbart en kreativ utmaning.

5.5 Sammanfattning av studie 5

Studie 5 tar vid där studie 4 slutar, med ett syfte att utveckla förståelsen för kreativa och konceptuella utmaningar, för att kunna utveckla det analytiska ramverket. Femton lärare i grupper om tre intervjuades kring de utmaningar de förväntade sig att elever möter i åtta olika uppgifter. Utmaningarna kategoriserades utifrån om lärarna relaterade den till begreppsliga aspekter eller till konstruktionen av en delvis ny metod. För att fördjupa förståelsen för utmaningarna karaktäriserades de genom en tematisk analys.

Resultaten visar att lärarnas beskrivningar av utmaningar i hög utsträckning går att relatera till antingen definitionen av en konceptuell eller en kreativ utmaning. Resultatet ger validitet åt sättet som utmaningarna definierats på med stöd av bland annat begreppsbilder (Tall & Vinner, 1981). Genom lärarnas beskrivningar förs en diskussion om hur egenskaper hos uppgifterna kan relateras till konceptuella utmaningar. Ett sätt är att beakta den matematiska grunden för de beräkningsprocedurer och representationer som används i lösningen av en uppgift, för att utveckla en elevs begreppsbild. Ett annat är att beakta de situationer i vilka, för eleven välbekanta begrepp, ska användas. Genom en delvis ny situation kan en mer flexibel användning av ett begrepp krävas. Slutligen visade resultaten att det råder en oklarhet kring vad som kan betraktas som en kreativ utmaning och således vara något utvecklande i relation till en problemlösningsförmåga, och vad som kan betraktas som en klurighet eller en fälla som löses med annat än en matematisk förmåga.

5.6 Syntes av resultaten

- Vilka möjligheter erbjuds elever att arbeta med problemlösning?

Få uppgifter, framför allt bland de uppgifter som (av läroboksförfattarna) bedömts som enkla, är LR-uppgifter. Istället är en övervägande andel HR-uppgifter, som kan lösas med textlotsat AR. Även bland uppgifter med etiketter som ’problemlösning’ eller ’utforska’ kan merparten av uppgifterna lösas med textlotsat AR. Enklare uppgifter är framför allt de uppgifter som eleverna arbetar med, genom att övervägande använda IR. De få tillfällen då elever möter LR-uppgifter använder de IR i över hälften av fallen. Elevernas uppfattning om matematik innebär bland annat att CMR upplevs som mer osäkert än IR.

- Vilka utmaningar möter elever vid problemlösning?

Konceptuella och kreativa utmaningar utgör kärnan av de utmaningar elever möter vid problemlösning. Kreativa utmaningar kan karaktäriseras som behovet att sammanfoga flera delmetoder, att använda implicit information från uppgiften eller att konstruera beräkningsprocedurer och representationer nödvändiga för en lösning. En viss tveksamhet rådde bland lärarna kring vad som kan ses som en kreativ utmaning med koppling till en problemlösningsförmåga, och vad som istället beror på andra förutsättningar såsom till exempel tur eller en förmåga att ”se” rätt saker i en uppgift. Tre tydliga karaktärsdrag hos konceptuella utmaningar har identifierats. Dessa relaterar till en elevs begreppsbild och till egenskaper hos en uppgift. I) Ett behov av mer flexibel begreppsbild, vilket kan ha att göra med uppgifter där en elev möter ett välbekant begrepp i en ny situation. II) Ett behov av en utvecklad begreppsbild (eller en sammanvävningen av två separata begreppsbilder), vilket kan kopplas till behovet av att förstå den matematisk grunden för beräkningsprocedurer och representationer, och III) ett behov av att omvärdera en begreppsbild.

6 Diskussion

I diskussionen ämnar jag knyta ihop de resultat som framkommit från de fem studierna för att kunna behandla de två övergripande frågorna som ställts i avhandlingen. Diskussionen förs i två delar med fokus på respektive frågeställning.

6.1 Elevers möjligheter att arbeta med problemlösning

Utifrån resultaten från *studie 1-3* och tidigare forskning diskuteras i detta avsnitt vilka möjligheter elever erbjuds att arbeta med problemlösning i undervisningen.

Det har inte varit ett mål med avhandlingen att undersöka elevers lärande eller kunskap. Däremot skapar studierna en grund för att diskutera elevers möjligheter att arbeta med problemlösning, och på så sätt även potentiella möjligheter till lärande. Att arbeta med problemlösning är en förutsättning för att bli en bättre problemlösare (Hiebert & Grouws, 2007), och är dessutom en bra förutsättning för utveckling av andra förmågor (t.ex. Boaler, 1998; Hibert m.fl., 1996; Jonsson m.fl., 2014; Schoenfeld, 1985a). De i avhandlingen fokuserade aspekterna av problemlösning är konstruerandet av en ny lösningsmetod samt de resonemang som ligger till grund för problemlösningen (Jonsson m.fl., 2014; Lithner, 2008).

Målet med forskningen har främst varit att kartlägga elevers möjligheter att arbeta med problemlösning, men i ett nästa steg också att kunna använda denna kartläggning för att säga något om hur undervisningen kan utvecklas. Därför diskuteras också olika vägar att utveckla undervisningen i matematik, genom utformningen av läroböcker och uppgifter, genom lärares kunskap om uppgifter och urval av uppgifter och genom implementeringen av uppgifter i klassrummet.

6.1.1 Begränsade möjligheter att arbeta med problemlösning

För att arbeta med problemlösning behöver en elev få möjlighet att bland annat konstruera, för henne, nya lösningsmetoder och använda CMR. *Studie 1* visar att andelen GLR-uppgifter, som är de som erbjuder eleverna omfattande möjligheter att arbeta med matematiska problem, i läroböckerna är ungefär 10 procent. Inkluderat i lösningen till dessa problem finns procedurer som en elev använder på ett rutinmässigt sätt. Detta innebär att eleverna får träna på procedurer i närmare 100 procent av uppgifterna i en lärobok, medan ungefär 10 procent erbjuder möjligheter att arbeta med matematiska problem. Avhandlingens studier och annan forskning som legat till grund för avhandlingen, kan varken peka på om det finns en lämplig omfattning av problemlösning i undervisningen (Stylianides, 2009), eller avfärda arbete med rutinuppgifter som oväsentligt. Med en undervisning som styrs av tidsramar blir det dock uppenbart att andelen rutinuppgifter påverkar elevers möjligheter att arbeta med matematiska problem. Med tanke på vikten av problemlösning för att utveckla inte bara en problemlösningsförmåga, utan även andra förmågor, inklusive den att använda procedurer (Baroody, Feil & Johnson, 2007; Boaler, 1998; Hiebert m.fl., 1996; Jonsson m.fl., 2014; Schoenfeld, 1985a), blir det relevant att beakta andelen matematiska problem i läroboken.

Då läroböckerna i de allra flesta fall innehåller en mängd uppgifter som är orimligt för alla elever att arbeta sig igenom, är ett urval nödvändigt. I flera läroböcker är uppgifterna graderade utifrån svårighetsnivå som kan användas som urvalskriterium. Eleverna i *studie 2* arbetar i mycket hög utsträckning med de uppgifter som läroboksförfattarna benämnt som enkla. Det medför att dessa elevers möjligheter att arbeta med matematiska problem minskar då andelen LR-uppgifter är avsevärt lägre bland de enklare uppgifterna. Andelen GLR-uppgifter är där 4 procent, och endast 1 procent av uppgifterna löstes med hjälp av Globalt CMR.

I *studie 2* framkom också att eleverna, nästan uteslutande, använde sig av AR då de löste HR-uppgifter, vilket stärker validiteten i *studie 1*, med avseende på elevers möjligheter att arbeta problemlösande. Med tanke på att en elevs mål inte nödvändigtvis är att utveckla sin kunskap, utan att lösa uppgifter (Rezat, 2009), är elevens val i detta fall inte överraskande. Att använda sig av AR är ofta mer effektivt och ett bra sätt att lösa HR-uppgifter. Procedurell kunskap är också viktigt att utveckla (Fan & Bokhove, 2014), men framför allt då i relation till konceptuell kunskap (Baroody m.fl., 2007; Hiebert, 2003; Kamii & Dominick, 1997). Att eleverna inte använde sig av läroboken som en resurs för lotsning är intressant i sig (men inte i fokus i denna avhandling), men verkar inte påverka elevernas möjligheter att arbeta med matematiska problem, då de istället för textlotsat AR i hög utsträckning använder sig av bekant AR och elevlotsat AR.

Resultatet från *studie 3* visar att elevers möjligheter att arbeta med matematiska problem kan minska på grund av en osäkerhet kring problemlösning och en uppfattning om att uppgifter ska kunna lösas med AR. I exemplet i avsnitt 4.3.4 började eleven använda AR. Detta kan till exempel bero på uppfattningen att uppgifter ska kunna lösas så, men kan också leda till att elevens möjlighet att arbeta med problemlösning inte tas tillvara. Eleven övergick dock till att använda CMR och arbeta problemlösande, men osäkerheten som bottnade i att hon inte litade tillräckligt på sin förmåga, gjorde att hon slutförde uppgiften med AR. Att förkasta CMR och dra en slutsats med stöd av AR kan leda till att eleven inte heller får bekräftelse för sin problemlösning. Detta i sin tur innebär att hon vare sig stärks i sin förmåga att faktiskt lösa matematiska problem, eller förändrar sin bild av CMR som mer värdefullt än AR i vissa situationer. Risken finns att hon vid en liknande situation i framtiden inte heller utnyttjar möjligheten att arbeta med matematiska problem.

Sammantaget visar resultaten från *studie 1-3* att elevers möjligheter att arbeta med problemlösning är begränsade. Med tanke på att läroboken är den mest avgörande uppgiftskällan i undervisningen (O'Sullivan, 2017; Pepin & Haggarty, 2001; Skolinspektionen, 2010; Stein m.fl., 2007), kan resultaten tolkas som att den andel matematiska problem som finns i en lärobok är ett tak för hur mycket problemlösningen en elev kan möta. När eleverna möter uppgifterna har de, förutom möjligheten att använda textlotsat AR, även möjligheten att använda andra typer av AR. Detta kan ske i relation till såväl rutinuppgifter som matematiska problem, vilket minskar möjligheterna att arbeta problemlösande.

Genom att tydliggöra lärandemålen i undervisningen och för specifika uppgifter, finns möjligheter att skapa goda förutsättningar för lärande (Brousseau, 1997; Simon & Tzur, 2004). Genom att till exempel erbjuda mer tid åt ett färre antal uppgifter, och genom att ställa andra krav (Nyman, 2016), kan det vara möjligt att signalera ett ändrat arbetssätt, och gå emot uppfattningar som att uppgifter ska gå att lösa inom fem minuter, eller inte alls, och att matematiken inte handlar om att utforska (McLeod, 1992; Schoenfeld, 1989). Det blir viktigt att beakta sättet som uppgifter används i undervisningen, där fokus ofta är på att lösa uppgiften, snarare än att nå ett tydligt uttalat lärandemål (Rezat, 2009; Skolinspektionen, 2010). En aspekt att beakta i ett sådant utvecklingsarbete skulle kunna vara att problemet inte ligger hos eleverna, utan i uppgifternas utformning. Detta skulle till exempel kunna tillgodoses genom att ha som ambition vid utformningen av en uppgift, att begränsa elevens möjligheter att använda metoder som skulle innebära minskat fokus på problemlösning.

6.1.2 Läroboken och uppgifter som ett medel för förändring

Det kan finnas flera, kompletterande vägar att gå för att utveckla undervisningen i önskad riktning. Med tanke på lärobokens ställning i klassrummet kan den utgöra ett värdefullt verktyg för förändring (Van Steenbrugge & Ryve, 2018). Genom mer explicita förslag och instruktioner till lärare kan läroböcker vara ett stöd i att utveckla undervisningen som annars riskerar att bedrivas på traditionellt sätt (Van Steenbrugge & Ryve, 2018).

Resultaten från *studie 1* och annan tidigare forskning pekar på en låg andel matematiska problem i läroböcker (ex. Brehmer m.fl., 2016; O'Sullivan, 2017; Wijaya m.fl., 2015; Vincent & Stacey, 2008; Jones & Tarr, 2007; Li, 2000). Övning ger färdighet tycks främst relatera till en procedurell kunskap med fokus på direkt användning av en välbekant metod på ett mer automatiserat sätt (Kaur, 2010). Med tanke på resultat från tidigare forskning om problemlösnings positiva inverkan på elevers lärande (Boaler, 1998; Hiebert m.fl., 1996; Hiebert, 2003; Jonsson m.fl., 2014; Schoenfeld, 1985a), och den centrala plats som problemlösning har i styrdokumenten (Boesen m.fl., 2014; Kilpatrick m.fl., 2001; NCTM, 2000; Niss, 2003; Ministry of Education, Singapore, 2012; Skolverket, 2011a) är det rimligt att påstå att det finns utrymme för en ökad andel matematiska problem i läroböckerna och i undervisningen, utan att riskera att ta bort fokus på det procedurella. Det är alltså önskvärt att de aktörer som utformar läroböcker och uppgifter i en högre utsträckning beaktar fler aspekter i processen med denna utformning (Davis m.fl., 2014; Newton & Newton, 2007).

En elevs möjligheter att arbeta med matematisk problemlösning påverkas inte bara av andelen matematiska problem i läroboken, utan också av vilka uppgifter en elev arbetar med. Då det visat sig att elever framför allt arbetar med de uppgifter som läroboksförfattarna valt att kategorisera som enkla, är det väsentligt att lägga mycket fokus på att öka andelen matematiska problem just där.

Elevers uppfattningar om matematik påverkas av de uppgifter de arbetar med. Uppgifterna visar för eleverna vilken kunskap som bör betraktas som väsentlig (Henningsen & Stein, 1997; Lampert, 1990; Yackel & Cobb, 1996). Genom att öka andelen matematiska problem bland de enkla uppgifterna finns en möjlighet att elevers uppfattningar om matematik utvecklas så att problemlösning ses som något för alla och inte bara för de som arbetar med de svåraste uppgifterna i boken. Genom att dessutom vara noggrann med de etiketter som sätts på uppgifterna i en bok kan en större förståelse för vad som avses med, till exempel, problemlösning erhållas.

6.1.3 *Ett medvetet uppgiftsurval*

Trots den relativt homogena bilden av läroböckerna från tolv olika länder, med avseende på andelen uppgifter som erbjuder elever att arbeta problemlösande, presterar dessa länder på vitt skilda nivåer i internationella kunskapsmätningar (Mullis, 2012; OECD, 2014). Det har visat sig att eleverna i de länder som presterar högt i dessa mätningar får möjligheter att arbeta med matematiska problem (Hiebert m.fl., 2003). Detta stärker argumenten för att beakta såväl lärobokens utformning som hur läroboken används för att utveckla undervisningen (Valverde m.fl., 2002).

Bland annat blir urvalet och utformning av uppgifter av betydelse för elevers möjligheter att utveckla de olika matematiska förmågorna (Stein & Lane, 1996; Watson & Sullivan, 2008) och viktigt att beakta då undervisningen ska utvecklas (Visnovska m.fl., 2012; Stein m.fl., 1996; Pettersen & Nortvedt, 2018). Med tanke på att det trots allt finns matematiska problem i läroböckerna kan resultaten signalera till lärare att använda läroböckerna på ett medvetet sätt och göra ett uppgiftsurval så att de möjligheter som erbjuds också tas tillvara. Utan ett aktivt uppgiftsurval risker elever att främst möta de första, enklare, uppgifterna i varje avsnitt, men inte hinna med de svårare uppgifterna (Skolinspektionen, 2010). Med ett aktivt uppgiftsurval, och genom att betrakta de begräsningar och tillgångar som erbjuds genom användningen av olika uppgifter i relation till specifika lärandemål, kan lärare och deras undervisning utvecklas (Watson & Sullivan, 2008; Son & Kim, 2015). För att öka andelen matematiska problem i undervisningen bör i så fall lärare beakta uppgifterna i relation till de lösningsmetoder de förväntar sig att elever känner till. Komplexiteten i detta gör det rimligt att lärare behöver träning för att utveckla sin urvalsförmåga och de verktyg de har att tillgå i urvalsprocessen. Ett utvecklat arbetssätt har visat sig möjligt att utveckla genom utbildning av lärare (Boston & Smith, 2009; Son & Kim, 2015; Stein m.fl., 2008; Watson & Sullivan, 2008) och genom stöd för uppgiftsurval (Stein m.fl., 1996; Pettersen & Nortvedt, 2018).

Att använda läroböckernas fulla potential, och till exempel utnyttja de matematiska problem som i högre utsträckning finns bland de svårare uppgifterna, kan vara ett sätt att utveckla undervisningen. Med tanke på att de matematiska problemen finns bland de svårare uppgifterna kan dock hänsyn behöva tas för att anpassa uppgifterna till starka såväl som svagare elever (Russo & Hopkins, 2017b; Sullivan m.fl., 2015). Till flera läroböcker i matematik finns en lärarhandledning som utvecklar läroboksförfattarnas intentioner (Van Steenbrugge & Ryve, 2018). Med en lärarhandledning är det möjligt att ge visst stöd åt lärare för att till exempel göra uppgiftsurval med avseende på en viss förmåga såsom problemlösningsförmågan. I utformningen av en lärarhandledning är det viktigt att stärka lärarnas möjligheter till egna beslut och flexibilitet i sin undervisning (Van Steenbrugge & Ryve, 2018).

6.2 Utmaningarna vid problemlösning

Intentionerna med en uppgift behöver vara i linje med de uppsatta lärandemålen (Coles & Brown, 2016). Således kan det finnas ett behov av att ytterligare nyansera vad som avses med problemlösning i undervisningen i matematik. I följande avsnitt diskuterar jag några av de karaktärsdrag hos konceptuella och kreativa utmaningar som synliggjorts i *studie 4 och 5*, utifrån perspektivet att detta ökar vår kunskap om elevers matematiska problemlösning. En väsentlig del av arbetet med *studie 4 och 5* har varit utvecklingen av ett ramverk, och genom att beskriva något av denna utvecklingsprocess kan även möjligheterna till en fortsatt utveckling diskuteras. Förutsatt att utmaningen är någorlunda anpassad efter en elevs förutsättningar finns en potential att den bidrar till att skapa en möjlighet för eleven att aktivera specifika förmågor såsom matematisk kreativitet och en konceptuell förståelse. Att kunna identifiera de utmaningar som en elev kan tänkas möta i en uppgift blir alltså en värdefull pusselbit till att också bättre förstå de möjligheter till lärande som erbjuds med hjälp av uppgiften.

6.2.1 Att identifiera kreativa utmaningar

Det visade sig i *studie 4* att en karaktäristik hos den kreativa utmaningen var att finna, härleda och använda implicit information i uppgiften. I tolkningen av den matematiska informationen kan en uppgift visa sig utmanande (Movshovitz-Hadar, Zaslavsky & Inbar, 1987). I *studie 5* visade det sig däremot att det rådde en viss oenighet bland lärarna huruvida detta skulle kunna betraktas som en matematisk förmåga möjlig att utveckla. Flera lärares uttalanden var i linje med en klassificering som en kreativ utmaning och relaterat till en förmåga som med nya erfarenheter kan utvecklas. Men andra lärare ansåg att det hade mer med andra aspekter att göra om man lyckades komma förbi utmaningen eller inte. I en struktur för uppgiftslösning kan det vara värdefullt att speciellt beakta det moment då information ska extraheras från en uppgift. Tidigare har vikten av att sätta sig in i elevers lösningsprocess betonats (Choppin, 2011; Niss m.fl., 2016; Son & Kim, 2015). Som ett stöd för detta kan en struktur för en elevs uppgifts-lösning användas där även tolkningen av den information som ges i uppgiften inkluderas. Pólya (1957) beskriver inledningen av en uppgiftslösning som att förstå problemet för att sedan konstruera en lösning. Schoenfelds (1985a) struktur inleds med *läsa*, vilket följs av *analys* och *utforskning*, för att bättre förstå de matematiska begrepp som bör ingå i en lösning, och sedan *planering*. För att markera den delen av uppgiftslösningen där informationen söks i uppgiften skulle detta steg kunna fogas till konstruktions- eller planeringsfasen (Pólya, 1957; Schoenfeld, 1985a). I Lithner's struktur för uppgiftslösning (2008) kan, att extrahera information ses som en naturlig del av ett strategival. I vissa fall kommer valet att baseras på att viss, explicit information extraherats, medan det i andra fall kommer att vara ett strategival som kräver att ytterligare, implicit information extraheras. Om explicit information inte kan extraheras från uppgiften genom att använda någon välbekant metod kan extraheringen betraktas som en del i konstruktionen av en ny metod. *Extraheringen av information* kan således utgöra underlag för att säga något om de kreativa aspekterna av uppgiftslösningen.

Resultatet från *studie 4* pekar på att konstruktionen av en lösningsmetod till stor del bygger på att flera delmetoder knyts samman. Beroende på vilket lärandemålet är (Brousseau, 1997; Simon & Tzur, 2004), är det rimligt att reflektera över en uppgifts utformning på deluppgiftsnivå. Det kan till exempel innebära att en komplex flerstegslösning inte alltid är det som bäst stödjer en elevs lärande (Watson & Sullivan, 2008), utan att det istället kan krävas att fokus riktas mot specifika delar av exempelvis metodens uppbyggnad eller ett ingående matematiskt begrepp. Hela den struktur som presenterades ovan bör således kunna ses som något som hänvisar till en deluppgift och där utvärderingen av lösningen kan leda till en ny deluppgift i linje med Lithner's (2008) struktur.

6.2.2 Att identifiera konceptuella utmaningar

Genom *studie 4 och 5* kunde konceptuella utmaningen karaktäriseras. I *studie 4* genom att koppla utmaningarna till den påverkan på elevens begreppsbild den hade, och i *studie 5* genom att egenskaper hos uppgiften kunde särskiljas. Styrkan i att använda olika metoder och såväl elever som lärare skapade förutsättningar för en bred bild av den konceptuella utmaningen. *Studie 4* hade som ett syfte att utveckla ett ramverk och i analysen fanns ett fokus på att undersöka möjligheterna att använda teorin för begreppsbilder för identifieringen av konceptuella utmaningar. I *studie 5* däremot användes definitionerna på utmaningarna som utgångspunkt och fokus var istället på att göra relationen mellan en uppgift och dess elevlösning, och de utmaningar en elev förväntas möta, så tydliga som möjligt. Det visade sig att lärarna i hög utsträckning relaterade till egenskaper i uppgifterna eller lösningarna då de beskrev utmaningarna. De tre huvudsakliga karaktärsdrag som kunde identifieras med stöd av *studie 4 och 5* ger underlag för en diskussion om:

1. Distinktionen mellan assimilation och ackommodation.
2. Nya situationer som ett sätt att skapa möjligheter för en mer flexibel användning av en begreppsbild, inte minst i relation till grundläggande begrepp.
3. Vikten av att förankra användningen av beräkningsprocedurer och representationer i en förståelse för de relevanta matematiska begreppen.

Genom att använda Piagets teori (1952) om lärande kan en konceptuell utmaning antingen knytas till assimilation, och en utveckling av en begreppsbild (eller en länkning av två begreppsbilder), eller ackommodation, där en existerande begreppsbild inte riktigt stämmer överens med de nya erfarenheter en elev får vid uppgiftslösning. Det är rimligt att anta att såväl assimilation som ackommodation är värdefullt för en elev att kunna hantera och för en lärare att vara vaksam på. I och med att det innebär olika processer för eleven kan en tidig identifiering av utmaningen som det ena eller det andra vara fruktbar för att skapa en undervisning som bäst stöttar eleven att ta sig an och förbi dessa respektive utmaningar och att lära sig från dem.

Flexibilitet har i tidigare forskning knutits till kreativa aspekter av uppgiftslösning (Silver, 1997), medan det i *studie 4* och *5* framkom att flexibiliteten också har tydliga kopplingar till konceptuella hänsyn. Detta synliggjordes i elevers uppgiftslösande, men blev än mer tydligt då lärare också lyfte fram relativt grundläggande matematiskt innehåll som potentiellt utmanande. Till exempel framkom att flertalet lärare såg division som något utmanande för eleverna. Lärarna uttryckte att eleverna givetvis kände till division som procedur och också vad det kan innebära att dividera, men såg trots detta utmaningar i att till exempel hantera km/h eller att förstå vad $p/2$ innebär i ett uttryck. Det är situationerna som verkar göra utmaningen lika mycket som själva matematiken. En utvecklad förståelse för ett begrepp såsom division kan stimuleras genom tanken på procept, och ett delat fokus på division som såväl en process som ett matematiskt objekt (Gray & Tall, 1994). Det skulle till exempel innebära att kunna betrakta $p/2$ som såväl något som med ett värde på p skulle kunna beräknas, men också som ett objekt i sig som till exempel går att skriva som $0{,}5p$.

Tall m.fl. (2001) beskriver det som att en flexibel användning av procedurer kan vara ett sätt att knyta procedurell kunskap till konceptuell kunskap. Att tidigt förankra procedurer i en medvetenhet om de bakomliggande matematiska begreppen och dess egenskaper blir värdefullt för möjligheterna för en elev att också utveckla dessa procedurer till att användas i nya situationer. Samtidigt som ett visst mått av automatisering är nödvändigt finns alltså ett behov av att också kunna gå tillbaka till en matematisk grund för att kunna använda begreppsbilden på ett mer flexibelt sätt (Hiebert, 2003). Den procedurella kunskapen som eleverna får en möjlighet att utveckla är värdefull för att behärska matematiken (Fan & Bokhove, 2014). Det blir dock avgörande för kunskapsutvecklingen att den procedurella kunskapen också kopplas till en förståelse för matematiken (Baroody m.fl., 2007; Kamii & Dominick, 1997). Procedurer kan användas för att skapa mening åt och mönster i matematiken genom en slags metakunskap som till exempel länkar procedurer till varandra (Peled & Zaslavsky, 2008; Schumacher & Rezat, 2019). Liksom för att bereda elever möjligheter att arbeta problemlösande, krävs en stor medvetenhet i, till exempel, urval och genomförande av uppgifter, för att eleverna ska ges en möjlighet att göra kopplingarna från det procedurella till det konceptuella. Om inte detta sker finns risken att det hela stannar i något procedurellt eller möjligen pseudokonceptuellt (Vinner, 1997).

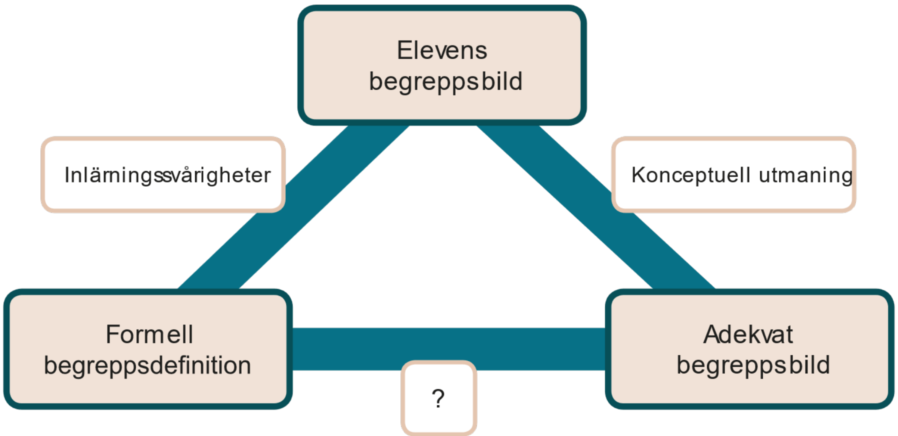
Det är exempelvis möjligt för en elev att lösa en ekvation genom att använda enbart procedurella kunskaper, en slags algoritm som steg för steg beskriver tillvägagångssättet. Genom att eleven ”flyttar” termer och ändrar tecken enligt ett bestämt schema, kan hon lösa en ekvation. Det innebär dock inte per automatik att eleven har eller utvecklar en konceptuell kunskap som innefattar, exempelvis begreppen ekvation och obekant och dess relation till varandra. Den algoritm som krävs för att lösa en ekvation utvidgas sannolikt med åren och kommer snart att omfatta en ansenlig mängd regler att komma ihåg. Det är inte heller orimligt att tänka sig att en elev vid en viss tidpunkt inte längre lyckas hålla i minnet och ordning på alla regler för de algebraiska manipulationerna som krävs. I detta skede skulle det hjälpa eleven att, utöver förståelsen för hur något ska genomföras, även förstå varför (Skemp, 1976). I fallet med ekvationen kan det till exempel handla om att utgå från ekvivalensen mellan två uttryck som ska behållas och vad som krävs för att formulera en ekvation där det är möjligt att tydligare se vilket värde en obekant har. Eller att reflektera över giltigheten i att ”flytta en term med ändrat tecken till andra sidan”, det vill säga exempelvis subtrahera samma värde från bägge sidor av en likhet, vilket kan relateras till motsvarande rent aritmetiska operationer för att visa på den röda tråden och logiken i matematiken (Linchevski & Herscovics, 1996).

Det har visat sig att elever som arbetar med rutinuppgifter och blir presenterade för såväl lämpliga lösningsmetoder som matematiskt grundade argument för de val och implementeringar som görs, inte lyckas lika väl på efterföljande tester, som de elever som fått möjligheten att arbeta problemlösande (Norqvist, 2017). När man, som i *studie 1* analyserar läroböcker finner man att flera av de lösta exemplen presenteras med tillhörande argument för metodens giltighet. När man fortsätter analysen kan man dock upptäcka att de uppgifter som följer, till stor del liknar rutinuppgifter där det inte ställs några krav på resonemang och reflektioner, och där den snabbaste vägen till ett rätt svar är just genom att använda den presenterade algoritmen. Något som bekräftas av den relativt låga andelen matematiska problem, framför allt bland de inledande och enklare uppgifterna i läroböckerna. För att knyta procedurerna till en förståelse för de mönster och samband som finns är det rimligt att inkludera uppgifter som kräver av eleverna att föra kreativa matematiska resonemang kring dessa samband (Schumacher & Rezat, 2019), eller att de får använda sambanden i nya situationer. Genom att bli utmanad i sin konceptuella kunskap, finns också en möjlighet att begreppsbilden utvecklas. Till exempel kan man i utformningen av uppgifter beakta flera olika sätt att definiera ett begrepp och använda olika exempel och motexempel för att variera de situationer som elever ställs inför (Zaslavsky & Shir, 2005) och på så sätt skapa utmaningar av gagn för elever.

6.2.3 Reflektioner kring ramverket för konceptuella och kreativa utmaningar

För lärandet och för att utveckla en matematisk kunskap är det värdefullt att inte bara möta och arbeta med matematiska problem, utan att också lyckas lösa, eller åtminstone göra ansträngningar för att lösa dessa problem (Hiebert & Grouws, 2007; Kapur, 2014; Olsson & Granberg, 2018). Det bör även fortsättningsvis vara en av ledstjärnorna då ramverket utvecklas. Genom att analysera uppgifter med hjälp av (förväntade) elevlösningar finns en möjlighet att värdera utmaningar i relation till en elevs förmågor, vilket gör det möjligt att säga något om hur anpassad utmaningen är.

I avhandlingens studier har diskrepansen mellan en framkallad och en (för uppgiften) adekvat begreppsbild varit i fokus. Niss (2006) beskriver en diskrepans mellan elevers begreppsbilder och den formella begreppsdefinitionen som en av anledningarna till elevers inlärningssvårigheter. Det existerar dock sannolikt också en diskrepans mellan den adekvata begreppsbilden och den formella begreppsdefinitionen som innefattar helheten av ett begrepp vad gäller egenskaper, kopplingar till andra begrepp, representationer och transformationer (se figur 11).



Figur 11. Relationen mellan en formell begreppsdefinition, en begreppsbild och en adekvat begreppsbild.

Genom att studera de adekvata i relation till de formella begreppsbilderna kan vi skapa oss en uppfattning om i vilken omfattning eleverna bereds möjlighet att utveckla sin begreppsbild, och vad eventuella ytterligare uppgifter bör erbjuda och kräva av eleven. Det är genom erfarenheter och de uppgifter som en elev arbetar med som deras begreppsbilder utvecklas (Niss, 2006) och för att kunna utforma uppgifter som ger eleven möjlighet att vidareutveckla sin begreppsbild krävs att en mer omfattande, formell begreppsbild beaktas.

Med en djupare förståelse för elevers möjligheter att arbeta med problemlösning, och för de utmaningar som ingår i problemlösning, finns förutsättningar för att också blicka framåt, mot en fas där läromedel och uppgifter utformas och prövas utifrån denna förståelse.

Efterord

Färdigskrivet. Färdigtänkt. Färdigtfärdigt. Så beskrev Jakob Hellman känslan när han blev ombedd att skriva en pressrelease för sitt album ”…och stora havet”. Jag kan förstå hans känsla när jag nu, knappt åtta år efter att jag inledde mina forskarstudier och arbetet med den här avhandlingen, sätter mig ner för att skriva ett efterord. För även om den mesta av tiden jag använt för att skapa det ni nu håller i er hand har varit rolig, stimulerande och utvecklande, infinner sig en tidpunkt då det är dags att gå vidare. Färdigt är ju ett relativt begrepp som kan tolkas på olika sätt. Min handledare under första halvan av arbetet med den här avhandlingen, Michael Hörnquist besvarade min fråga om hur jag vet när jag är färdig, med ”du är färdig när tiden är slut”. Här tror jag det är ett sunt synsätt, då utgångspunkten för all forskning är att det finns möjligheter att förstå mer, undersöka djupare, dra fler paralleller och bredda kunskapen. Samtidigt som det alltså är färdigtfärdigt, kan jag se på avhandlingen som starten på någonting nytt och spännande.

Ja, men då var jag ju igång med att skriva trots allt. Det finns så många genrer att förhålla sig till när man skriver. Vetenskapliga artiklar ska skrivas stringent, kort, koncist och utan ett överflöd, men ändå tillräckligt tydligt. I en kappa finns större möjligheter att sväva ut, om än inte som i prosa eller poesi. I efterord sätter ofta författaren sin egen prägel på texten och balanserar mellan att vara unik och att passa in. Under arbetets gång med den här avhandlingen har jag nog tvivlat på, såväl om jag passar in i forskarmiljön, som om jag vågar och lyckas vara så unik som jag tror krävs för att också vara relevant och intressant. I slutändan handlar en del om att bevisa för sig själv att svaret på bägge frågorna är ja. Att passa in beror ju inte bara på en själv utan på den miljö man befinner sig i. Och den har i mitt fall varit högst tillmötesgående. Jag har haft glädjen av att bli handledd av en skara ödmjuka, roliga, prestigelösa och kompetenta handledare. Ett stort tack vill jag rikta till mina biträdande handledare Mathias Norqvist och Anna Teledahl. Mathias, som med sin eftertänksamhet och sin blick för skolan och dess elever hjälpt mig att förhålla mig till såväl skolan som till forskningen. Och Anna, som med sitt öga för språket och orden, i kombination med en total optimism, fått mig att se nyanser i texterna och dess koppling utgångspunkter, analyser och slutsatser. Och så Johan Lithner, min huvudhandledare, utan vars stöd jag inte skrivit detta förord. Det har varit en trygghet att veta att det finns så mycket inbyggd klokskap där. Jag har flera gånger, i efterhand, tänkt på vad som sagts på olika handledningsmöten, och insett att de förslag, tips och råd som Johan och de andra kommit med, inte bara fungerat i stunden, utan varit något att ta med sig som kunskap. Det är

nog lärande på riktigt. Tillmötesgående har även alla övriga kollegor vid Umeå universitet varit. Tack! Den tillåtande miljön är också min arbetsplats vid Högskolan Dalarna i Falun. Trots att jag inte alltid under tiden då den här avhandlingen vuxit fram varit lika aktiv och närvarande i miljön, har jag varje gång på jobbet känt mig som hemma, och bland vänner. Med all den samlade erfarenhet som finns i korridorerna vid den matematikdidaktiska avdelningen har det alltid funnits möjlighet till såväl framåtsträvande diskussioner som larvigt fikaprat. Tack också till mina handledare under den första halvan av forskarstudierna, Michael Hörnquist, Konrad Schönborn och Lena Tibell, för en rakt igenom positiv upplevelse. Och till mina medförfattare Johan Sidenvall, Johan Lithner och Lovisa Sumpter, som alla bidragit med stimulans, kunskap och glädje.

När jag för ungefär 5 år sedan kastade upp licentiatbollen i luften visste jag inte om jag skulle få chansen att fånga den och studsa vidare mot en doktorsexamen. Några personer drev på denna process och gjorde det möjligt. Jag vill för detta tacka Magnus Jobs, min dåvarande avdelningschef, och min nuvarande avdelningschef, Maria Sundberg som tillsammans med Pedagogiskt Utvecklingscentrum Dalarna och Bengt Ericsson skapade möjligheten för mig att fortsätta mina forskarstudier. Ett stort tack vill jag också rikta till alla de lärare och elever som ställt upp med sin tid och sitt engagemang och deltagit i mina studier. Ett lika stort tack till alla de som läst mina texter och diskuterat innehåll och språk med mig.

Livet består inte bara av arbete och inte heller för mig har avhandlingsarbetet fått ta överhand. Det har givetvis funnits perioder där de närmaste fått ha orimligt mycket tålamod med mig. Släkt, familj och vänner, det har varit underbart att ha er alla omkring mig. Ingen nämnd och ingen glömd. Med renoveringsprojekt, badutflykter, goda middagar, konserter, skidturer, kajakpaddling och tältnätter har ni hjälpt mig att ladda batterierna och att göra det här avhandlingsarbetet möjligt. Ett speciellt tack och oändligt med kärlek till Rasmus och Love som varit med på hela resan, och på nära håll sett både glädje och vånda över datainsamlingar, texter och annat.

Förordet till licentiatavhandlingen skrevs i ett Hudiksvall i snöskrud. När jag nu sitter här, i november 2019, snöar det utanför och världen är så där vackert vit igen.

Referenslista

Alfredsson, L., Bråting, K., Erixson, P, & Heikne, H. (2011). *Matematik 5000 1b*. Stockholm, Sverige: Natur & Kultur.

Ball, D. L., & Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. I J. Kilpatrick, W. Martin G. & D. Schifter (Red.), *A research companion to the principles and standards for school mathematics* (s. 27-44). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Baroody, A. J., Feil, Y., & Johnson, A. R. (2007). An alternative reconceptualization of procedural and conceptual knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(2), 115-131.

Berg, C. V., Fuglestad, A. B., Goodchild, S., & Sriraman, B. (2012). Mediated action in teachers' discussions about mathematical tasks. *Zdm – The International Journal on Mathematics Education, 44*(5), 677-689.

Bergqvist, T., & Lithner, J. (2012). Mathematical reasoning in teachers' presentations. *Journal of Mathematical Behavior, 31*(2), 252-269.

Bergqvist, T., Lithner, J., & Sumpter, L. (2008). Upper secondary students' task reasoning. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 39*(1), 1-12.

Bergwall, A., & Hemmi, K. (2017). The state of proof in Finnish and Swedish mathematics textbooks: Capturing differences in approaches to upper-secondary integral calculus. *Mathematical Thinking and Learning, 19*(1), 1-18.

Bieda, K. N., Ji, X., Drwencke, J., & Picard, A. (2014). Reasoning-and-proving opportunities in elementary mathematics textbooks. *International Journal of Educational Research, 64*, 71-80.

Bingolbali, E., & Monaghan, J. (2008). Concept image revisited. *Educational Studies in Mathematics, 68*(1), 19-35.

Boaler, J. (1998). Open and closed mathematics: Student experiences and understandings. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(1), 41-62.

Boaler, J., & Selling, S. K. (2017). Psychological imprisonment or intellectual freedom? A longitudinal study of contrasting school mathematics approaches and their impact on adults' lives. *Journal for Research in Mathematics Education, 48*(1), 78-105.

Boaler, J., Wiliam, D., & Brown, M. (2000). Students' experiences of ability grouping - disaffection, polarisation and the construction of failure. *British Educational Research Journal, 26*(5), 631-648.

Boesen, J., Helenius, O., Bergqvist, E., Bergqvist, T., Lithner, J., Palm, T. & Palmberg, B. (2014). Developing mathematical competence: From the intended to the enacted curriculum. *The Journal of Mathematical Behaviour*, *33*(1), 72-87.

Boesen, J., Lithner, J., & Palm, T. (2010). The relation between types of assessment tasks and the mathematical reasoning students use. *Educational Studies in Mathematics, 75*(1), 89-105.

Boston, M. D., & Smith, M. S. (2011). A 'task-centric approach' to professional development: Enhancing and sustaining mathematics teachers' ability to implement cognitively challenging mathematical tasks. *Zdm – The International Journal on Mathematics Education, 43*(6), 965-977.

Braun, V. & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology, 3*, 77–101.

Brehmer, D., Ryve, A., Van Steenbrugge, H. (2016). Problem solving in Swedish mathematics textbooks for upper secondary school. *Scandinavian Journal of Educational Research, 60*(6), 577-593.

Brousseau, G., (1997). *Theory of didactical situations in mathematic: Didactique des mathématiques, 1970-1990.* Dordrecht, Nederländerna: Kluwer Academic Publishers.

Callejo, M. L., & Vila, A. (2009). Approach to mathematical problem solving and students' belief systems: Two case studies. *Educational Studies in Mathematics, 72*(1), 111-126.

Carlsson, S., Hake, K., & Öberg, B. (2010). *Matte Direkt 8*. Stockholm, Sverige: Sanoma utbildning.

Choppin, J. (2011). The role of local theories: Teachers knowledge and its impact on engaging students with challenging tasks. *Mathematics Education Research Journal, 23*(1), 5-25.

Cobb, P., Wood, T., & Yackel, E. (1993). Discourse, mathematical thinking, and classroom practice. I E. A. Forman, N. Minick & C. A. Stone (Red.), *Contexts for learning: Sociocultural dynamics in children's development.* (s. 91-119). New York, NY: Oxford University Press.

Coles, A., & Brown, L. (2016). Task design for ways of working: Making distinctions in teaching and learning mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education, 19*(2), 149-168.

Davis, J. D., Smith, D. O., Roy, A. R., & Bilgic, Y. K. (2014). Reasoning-and-proving in algebra: The case of two reform-oriented U.S. textbooks. *International Journal of Educational Research*, *64*, 92-106.

Department of Education, Republic of South Africa. (2008). *National Curriculum Statement, Grades 10-12 (General), Learning Programme Guidelines, Mathematical Literacy, January 2008.* Hämtad från: http://www.education.gov.za/

Doyle, W. (1983). Academic work. *Review of Educational Research,53*(2), 159-199.

Esaiasson, P., Gilljam, M., Oscarsson, H., & Wängnerud, L. (2007). *Metodpraktikan: Konsten att studera samhälle, individ och marknad* (tredje upplagan). Stockholm, Sverige: Norstedts Juridik.

Fan, L., & Bokhove, C. (2014). Rethinking the role of algorithms in school mathematics: A conceptual model with focus on cognitive development. *Zdm – The International Journal on Mathematics Education, 46*(3), 481-492.

Francisco, J. (2013). The mathematical beliefs and behavior of high school students: Insights from a longitudinal study. *The Journal of Mathematical Behavior*, *32*(3), 481-493.

Gray, E. M., & Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A "proceptual" view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(2), 116-40.

Greer, B., Verschaffel, L., & de Corte, E. (2002). 'The answer is really 4.5': Beliefs about word problems. I G. C. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Red.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education*? (s. 271-292). Dordrecht, Nederländerna: Kluwer Academic Publishers.

Gresalfi, M., & Barab, S. (2011). Learning for a reason: Supporting forms of engagement by designing tasks and orchestrating environments. *Theory into Practice, 50*(4), 300-310.

Guberman, R., & Leikin, R. (2013). Interesting and difficult mathematical problems: Changing teachers' views by employing multiple-solution tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16*(1), 33-56.

Halldén, O., Scheja, M., & Haglund, L. (2008). The contextuality of knowledge: An intentional approach to meaning making and conceptual change. I S. Vosniadou (Red.), *International handbook of research on conceptual change* (s. 509-532). New York, NY: Routledge.

Hanna, G., & de Bruyn, Y. (1999). Opportunity to learn proof in ontario grade twelve mathematics texts. *Ontario Mathematics Gazette, 37*(4), 23-29.

Hannula, M. (2006). Affect in mathematical thinking and learning: Towards integration of emotion, motivation and cognition. I J. Maasz & W. Schloeglmann (Red.), *New mathematics education research and practice* (s. 209–232). Rotterdam, Nederländerna: Sense Publishers.

Henningsen, M., & Stein, M. K. (1997). Mathematical tasks and student cognition: Classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(5), 524-549.

Hiebert, J. (2003). What research says about the NCTM standards. I J. Kilpatrick, G. Martin & D. Schifter (Red.), *A research companion to the principles and standards for school mathematics* (s. 5-23). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. I D. A. Grouws (Red.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 65-97). New York, NY: Macmillan Publishing Co, Inc.

Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K., Human, P., Murray, H., . . . Wearne, D. (1996). Problem solving as a basis for reform in curriculum and instruction: The case of mathematics. *Educational Researcher, 25*(4), 12-21.

Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K. C., Wearne, D., Murray, H, Olivier, A., & Human, P. (1997). *Making sense: Teaching and learning mathematics with understanding.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Hiebert, J., Gallimore, R., Garnier, H., Givvin, K. B., Hollingsworth, H., Jacobs, J., … Stigler, J. (2003). *Teaching mathematics in seven countries: Results from the TIMSS 1999 video study.* Washington, DC: U.S. Government Printing Office.

Hiebert, J., & Grouws, D. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students learning. I F. K. Lester (Red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the national council of teachers of mathematics* (s. 371-404). Charlotte, NC: Information Age Pub.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Red.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (s. 1-27). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Hiebert, J., & Wearne, D. (1993). Instructional tasks, classroom discourse, and students' learning in second-grade arithmetic. *American Educational Research Journal*. *2*(30), 393-425.

Högskolan Dalarna (2018). Personuppgifter & dataskydd: Introduktion. Hämtad 2019-10-21 från: http://libguides.du.se/personuppgifter

Jablonka, E., & Johansson, M. (2010). Using texts and tasks: Swedish studies on mathematics textbooks. I B. Sriraman m.fl. (Red.), *The first sourcebook on nordic research in mathematics education: Norway, Sweden, Iceland, Denmark, and contributions from Finland* (s. 363-372). Charlotte, NC: Information Age Pub.

Jankvist, U. T., & Niss, M. (2018). Counteracting destructive student misconceptions of mathematics. *Education Sciences, 8*(2), 53.

Jones, D. L., & Tarr, J. E. (2007). An examination of the levels of cognitive demand required by probability tasks in middle grades mathematics textbooks. *Statistics Education Research Journal, 6*(2), 4-27.

Jones, K., & Fujita, T. (2013). Interpretations of national curricula: The case of geometry in textbooks from England and Japan. *Zdm – The International Journal on Mathematics Education, 45*(5), 671-683.

Jonsson, B., Norqvist, M., Liljekvist, Y., Lithner, J. (2014). Learning mathematics through algorithmic and creative reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior, 36,* 20-32.

Jäder, J. (2015). *Elevers möjligheter till lärande av matematiska resonemang*. Licentiatavhandling. Linköping: Linköping University Press.

Kamii, C., & Dominick, A. (1997). To teach or not to teach algorithms. *Journal of Mathematical Behavior, 16*(1), 51-61.

Kapur, M. (2014). Productive failure in learning math. *Cognitive Science, 38*(5), 1008-1022.

Kaur (2010). A study of mathematical tasks from three classrooms in Singapore. I Y. Shimizu, B. Kaur, R. Huang, & D. Clark (Red.) *Mathematical tasks in classrooms around the world*, (s. 15-33). Rotterdam, Nederländerna: Sense Publishers.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics.* Washington, DC: National Academy Press.

Kloosterman, P. (2002). Beliefs about mathematics and mathematics learning in the secondary school: Measurement and implications for motivation. I G. C. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Red.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (s. 247–269). Dordrecht, Nederländerna: Kluwer Academic Publishers.

Kreativitet. (utan datum). I Nationalencyklopedin. Hämtad från: https://www.du.se/sv/bibliotek/

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal, 27*(1), 29-63.

Lappan, G. (1997). The challenges of implementation: Supporting teachers. *American Journal of Education, 106*(1), 207-239.

Larson, R., Boswell, L., Kanold, T. D. & Stiff, L. (2007). *Geometry*. Evanston, IL: McDougal Littell.

Li, Y. (2000). A comparison of problems that follow selected content presentations in American and Chinese mathematics textbooks. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(2), 234-41.

Liljedahl, P., Oesterle, S., & Bernèche, C. (2012). Stability of Beliefs in Mathematics Education: A Critical Analysis. *Nordic Studies in Education 17*(3-4), 101-118.

Liljekvist, Y. (2016), Mathematics teachers' knowledge-sharing on the Internet: pedagogical message in instruction materials. *Nordisk Matematikkdidaktikk, 21*(3), 3-27.

Liljekvist, Y., Lithner,J., Norqvist, M., & Jonsson, B. (2013). Reasoning in alignment with task properties? Students' actual handling of imitative and creative mathematical reasoning. I Y. Liljekvist, *Lärande i matematik. Om resonemang och matematikuppgifters egenskaper* (Karlstad University Studies, nr 2014:16). Doktorsavhandling, Karlstad: Karlstads universitet.

Linchevski, L., & Herscovics, N. (1996). Crossing the Cognitive Gap between Arithmetic and Algebra: Operating on the Unknown in the Context of Equations. *Educational Studies in Mathematics, 30*(1), 39-65.

Lithner, J. (2003). Students' mathematical reasoning in university textbook exercises. *Educational Studies in Mathematics, 52*(1), 29-55.

Lithner, J. (2004). Mathematical reasoning in calculus textbook exercises. *Journal of Mathematical Behavior, 23*(4), 405-427.

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 67*(3), 255-276.

Lithner, J. (2017). Principles for designing mathematical tasks that enhance imitative and creative reasoning. *Zdm – The International Journal on Mathematics Education, 49*(6), 937-949.

Lundell, U. (1982). När jag kysser havet. På U. Lundell, *Kär och galen* [LP skiva]. Stockholm, Sverige: EMI

McLeod, D. B. (1989). Beliefs, attitudes and emotions: New views of affect in mathematics education. I D. B. McLeod & V. M. Adams (Red.), *Affect and Mathematical Problem solving* (s. 245-258). New York, NY: Macmillan.

McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. I D. A. Grouws (Red.), *Handbook for research on mathematical teaching and learning* (s. 575-596). New York, NY: Springer.

McNeal, B. (1995). Learning not to think in a textbook-based mathematics class. *Journal of Mathematical Behavior, 14*(2), 205-34.

Ministry of Education, Ontario. (2005). *The Ontario Curriculum, Grades 9 and 10. Mathematics.* Hämtad från: http://www.edu.gov.on.ca

Ministry of Education, Singapore (2012). *Primary Teaching and Learning Syllabus*. Singapore: Ministry of Education. Hämtad från: http://www.moe.gov.sg./education /syllabuses/science/files/mathsprimary-2013.pdf.

Movshovitz-Hadar, N., Zaslavsky, O., & Inbar, S. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 18*(1), 3-14.

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P., Olson, J. F., Preuschoff, C., Erberber, E., … Galia, J. (2008). *TIMSS 2007 International Mathematics Report – Findings from IEA's trends in international Mathematics and Science Study at the fourth and eighth grades.* Chestnut Hill, MA: Boston College, TIMSS and PIRLS International Study Center.

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P., & Arora, A. (2012). *TIMSS 2011 International Results in Mathematics.* Chestnut Hill, MA: Boston College, TIMSS & PIRLS International Study Center.

Möjlighet. (utan datum). I Nationalencyklopedin. Hämtad från: https://www.du.se/sv/bibliotek/

NCTM, National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Newton, D. P., & Newton, L. D. (2007). Could elementary mathematics textbooks help give attention to reasons in the classroom? *Educational Studies in Mathematics, 64*(1), 69-84.

Niss, M. (2003). The mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. I A. Gagatses & S. G. Papastravridis (Red.) *Proceedings of the Third Mediterranean Conference on Mathematics Education*. (s. 115–124). Aten, Grekland: Greek Mathematics Society.

Niss, M. (2006). The structure of matematics and its influence on the learning process. I J.. Maasz & W. Schloeglmann (Red.), *New Mathematical Education Research and Practice* (s. 51-62). Rotterdam, Nederländerna: Sense Publishers.

Niss, M., Bruder, R., Planas, N., Turner, R., & Villa-Ochoa, J. A. (2016). Survey team on: Conceptualisation of the role of competencies, knowing and knowledge in mathematics education research. *Zdm – The International Journal on Mathematics Education, 48*(5), 611-632.

Niss, M., & Jensen, T. H. (2002). *Kompetencer og matematiklæring – Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark, number 18 in Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie*. Köpenhamn, Danmark: Undervisningsministeriets förlag. Hämtad från: https://www.gymnasieforskning.dk/wp-content/uploads/2013/10/Kompentecer-og-matematikl%C3%A6ring1.pdf

Norqvist, M. (2017). The effect of explanations on mathematical reasoning tasks. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 49*(1), 15-30.

Nyman, R. (2016). What makes a mathematical task interesting? *Educational Research and Reviews, 11*(16), 1509-1520.

O'Brien, J. (1993). Action research through stimulated recall. *Research in Science Education, 23*, 214-221.

O'Sullivan, B. (2017). *An Analysis of Mathematical Tasks Used at Second-Level in Ireland* (Hämtad från: http://doras.dcu.ie/21978/1/BrendanOSullivan_Phd_Thesis_Electronic_September_2017.pdf). Doktorsavhandling, Dublin, Irland: Dublin City University.

OECD (2014). *PISA 2012 results in Focus. What 15-year-olds know and what they can do with what they know.* Paris, Frankrike: OECD Publishing.

Olsson, J. & Granberg, C. (2018). Dynamic software, task solving with or without guidelines, and learning outcomes. *Technology, knowledge and learning, 24*, 419-436.

Op't Eynde P., de Corte, E. & Verschaffel, L., (2002). Framing students' mathematics-related beliefs. I G. C. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Red.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education*? (s. 13-37). Dordrecht, Nederländerna: Kluwer Academic Publishers.

Palm, T., Boesen, J., & Lithner, J. (2011). Mathematical reasoning requirements in swedish upper secondary level assessments. *Mathematical Thinking and Learning: An International Journal, 13*(3), 221-246.

Peled, I., & Zaslavsky, O. (2008). Beyond local conceptual connections: Meta-knowledge about procedures. *For the Learning of Mathematics, 28*(3), 28-35.

Pepin, B. E., & Haggarty, L. (2001). Mathematics textbooks and their use in english, french and german classrooms: A way to understand teaching and learning cultures. *Zdm – The International Journal on Mathematics Education, 33*(5), 158-175.

Pettersen, A., & Nortvedt, G. A. (2018). Identifying competency demands in mathematical tasks: Recognising what matters. *International Journal of Science and Mathematics Education, 16*(5), 949-965.

Piaget, J. (1952). *The origins of intelligence in children.* New York, NY: International Universities Press Inc.

Pólya, G. (1957). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton, N.J: Princeton University Press.

Randahl, M. (2012). First-year engineering students' use of their mathematics textbook - opportunities and constraints. *Mathematics Education Research Journal, 24*(3), 239-256.

Rezat, S. (2009) The utilization of mathematics textbooks as instruments for learning. I V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello (Red.), *Proceeding of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education January 28th-February 1st 2009 Lyon (France)* (s. 1260-1269). Hämtad från: https://ife.ens-lyon.fr/publications/edition-electronique/cerme6/cerme6.pdf

Rezat, S., & Strässer, R. (2012). From the didactical triangle to the socio-didactical tetrahedron: Artifacts as fundamental constituents of the didactical situation. *Zdm – The International Journal of Mathematics Education*, *44*(5), 641-651.

Robson, C. (2011). *Real world research* (tredje upplagan). West Sussex, Storbritannien: John Wiley & Sons Ltd.

Russo, J., & Hopkins, S. (2017a). Student reflections on learning with challenging tasks: 'I think the worksheets were just for practice, and the challenges were for maths'. *Mathematics Education Research Journal, 29*(3), 283-311.

Russo, J., & Hopkins, S. (2017b). CLASS Challenging Tasks: Using Cognitive Load Theory to Inform the Design of Challenging Mathematical Tasks. *Australian Primary Mathematics Classroom, 22*(1), 21-27.

Ryan, R. M., & Deci, E. L. (2000). Intrinsic and extrinsic motivations: Classic definitions and new directions. *Contemporary Educational Psychology, 25*(1), 54-67.

Schmidt, W. (2012). Measuring content through textbooks: The cumulative effect of middle-school tracking. I G. Gueudet, B. Pepin & L. Trouche (Red.), *From text to 'Lived' resources: Mathematics curriculum materials and teacher development* (s. 143-160). Dordrecht, Nederländerna: Springer Science & Business Media.

Schmidt, W. H., McKnight, C. C., Houang, R. T., Wang, H., Wiley, D. E., Cogan, L. S., & Wolfe, R., G. (2001). *Why schools matter: A cross-national comparison of curriculum and learning. The Jossey-Bass education series*. San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Schoenfeld, A. H. (1985a). *Mathematical problem solving.* Orlando, FL: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1985b). Making sense of "out loud" problem solving protocols. *The Journal of Mathematical Behavior, 4*(2), 171-191.

Schoenfeld, A. H. (1989). Explorations of students' mathematical beliefs and behavior. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(4), 338-355.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. I D. A. Grouws (Red.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (s. 334-370). New York, NY: Macmillan Publishing Co, Inc.

Schoenfeld, A. H. (2012). Problematizing the didactic triangle. *Zdm – The International Journal of Mathematics Education, 44*(5), 587-599.

Schumacher J. & Rezat, S. (2019). *A hypothetical learning trajectory for the learning of the Rules for manipulating Integers*. Paper presenterat vid Cerme 11, the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, 6-11 February, Utrecht, Nederländerna.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), 1-36.

Shimizu, Y., Kaur, B., Huang, R. & Clarke, D. (2010). I Y. Shimizu, B. Kaur, R. Huang & D. Clark (Red.), *Mathematical tasks in classrooms around the world* (s. 1-14). Rotterdam, Nederländerna: Sense Publishers.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics*. London: Falmer.

Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *Zdm – The International Journal on Mathematics Education, 29*(3), 75-80.

Simon, M. A., & Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: An elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 91-104.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching*, *77*, 20-26.

Skolinspektionen. (2010). *Undervisningen i matematik i gymnasieskolan No. 2010:13*. Stockholm: Skolinspektionen.

Skolverket (2010). Nationellt kursprov i matematik, kurs A, våren 2010, del I. Hämtad från: https://www.su.se/primgruppen/matematik/kurs-1/tidigare-prov

Skolverket (2011a). *Läroplan, examensmål och gymnasiegemensamma ämnen för gymnasieskola 2011.* Stockholm, Sverige: Fritzes.

Skolverket (2011b). *Kommentarmaterial tillkursplanen i matematik.* Stockholm, Sverige: Fritzes.

Son, J., & Kim, O. (2015). Teachers' selection and enactment of mathematical problems from textbooks. *Mathematics Education Research Journal, 27*(4), 491-518.

Speer, N. M. (2005). Issues of methods and theory in the study of mathematics teachers' professed and attributed beliefs. *Educational Studies in Mathematics, 58*(3), 361–391.

Sriraman, B. (2005). Are giftedness and creativity synonyms in mathematics? *Journal of Advanced Academics, 17*(1), 20-36.

Sriraman, B., Haavold, P., & Lee, K. (2013). Mathematical creativity and giftedness: A commentary on and review of theory. *Zdm – The International Journal on Mathematics Education, 45*(2), 215–225.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning: An International Journal, 10*(4), 313-340.

Stein, M. K., Grover, B. W., & Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American Educational Research Journal, 33*(2), 455-88.

Stein, M. K., & Lane, S. (1996). Instructional tasks and the development of student capacity to think and reason: An analysis of the relationship between teaching and learning in a reform mathematics project. *Educational Research & Evaluation,2*(1), 50.

Stein, M. K., Remillard, J., & Smith, M. S. (2007). How curriculum influences student learning. I F. K. Lester (Red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 319-369). Charlotte, NC: National Council of Teachers of Mathematics; Information Age Publishing.

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School,* (4), 268.

Stylianides, G. J. (2009). Reasoning-and-Proving in School Mathematics Textbooks. *Mathematical Thinking and Learning, 11*(4), 258-288.

Sullivan, P., Askew, M., Cheeseman, J., Clarke, D., Mornane, A., Roche, A., & Walker, N. (2015). Supporting teachers in structuring mathematics lessons involving challenging tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education, 18*(2), 123-140.

Sumpter, L. (2013). Themes and interplay of beliefs in mathematical reasoning. *International Journal of Science and Mathematics Education, 11*(5), 1115-1135.

Tall, D., Gray, E., Ali, M. B., Crowley, L., DeMarois, P., McGowen, M., … Yusof, Y. (2001). Symbols and the bifurcation between procedural and conceptual thinking. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education 1*(1), 81-104.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics,12*(2), 151-169.

Terwel, J., van Oers, B., van Dijk, I., & van den Eeden, P. (2009). Are representations to be provided or generated in primary mathematics education? Effects on transfer. *Educational Research and Evaluation, 15*(1), 25-44.

Thompson, D. R., Senk, S. L., & Johnson, G. J. (2012). Opportunities to learn reasoning and proof in high school mathematics textbooks. *Journal for Research in Mathematics Education*, *43*(3), 253-295.

Turner R., Dossey J., Blum W., & Niss M. (2013). Using Mathematical Competencies to Predict Item Difficulty in PISA: A MEG Study. I M. Prenzel, M. Kobarg, K. Schöps & S. Rönnebeck (Red.), *Research on PISA* (s. 23-37). Dordrecht, Nederländerna: Springer.

Valverde, G. A., Bianchi, L. J., Wolfe, R. G., Schmidt, W. H., & Houang, R. T. (2002). *According to the book: Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks*. Dordrecht, Nederländerna: Kluwer Academic Publishers.

Van Steenbrugge, H., & Ryve, A. (2018). Developing a reform mathematics curriculum program in Sweden: Relating international research and the local context. *Zdm – The International Journal on Mathematics Education, 50*(5), 801-812.

Vetenskapsrådet (2011). *God forskningssed*. Stockholm: Vetenskapsrådet.

Vetenskapsrådet (2017) *God forskningssed*. Stockholm: Vetenskapsrådet.

Vincent, J., & Stacey, K. (2008). Do mathematics textbooks cultivate shallow teaching? Applying theTIMSS video study criteria to Australian eighth-grade mathematics textbooks. *Mathematics Education Research Journal, 20*(1), 82-107.

Vinner, S. (1997). The pseudo-conceptual and the pseudo-analytical thought processes in mathematics learning. *Educational Studies in Mathematics, 34*(2), 97-129.

Visnovska, J., Cobb, P., & Dean, C. (2012). Mathematics teachers as instructional designers: What does it take? I G. Gueudet, B. Pepin & L. Trouche (Red.), *From text to 'Lived' resources: Mathematics curriculum materials and teacher development* (s. 323-341). Dordrecht, Nederländerna: Springer Science & Business Media.

Watson, A., & Sullivan, P. (2008). Teachers learning about tasks and lessons. I D. Tirosh, & T. Wood (Red.), *Tools and Processes in Mathematics Teacher Education (s*. 109 - 134). Leiden, Nederländerna: Sense Publishers.

Wijaya, A., van den Heuvel-Panhuizen, M., & Doorman, M. (2015). Opportunity-to-learn context-based tasks provided by mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics, 89*(1), 41-65.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458-77.

Yackel, E., & Rasmussen, C. (2002). Beliefs and norms in the mathematics classroom. I G. C. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Red.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education*? (s. 313-330). Dordrecht, Nederländerna: Kluwer Academic Publishers.

Zaslavsky, O. (2005). Seizing the opportunity to create uncertainty in learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 60*(3), 297-321. Rotterdam, Nederländerna: Sense Publishers.

Zaslavsky, O. (2008). Meeting the challenges of mathematics teachers' education through design and use of tasks that facilitate teachers learning. I B. Jaworski, & T. Woods (Red.) The mathematics teacher educator as a developing professional (s. 93-114).

Zaslavsky, O., & Shir, K. (2005). Students' conceptions of a mathematical definition. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(4), 317-346.