

En analys av likhetstecknets introduktion i svenska läromedel

Daniel Vulic

Institutionen för matematikämnet och naturvetenskapsämnenas
didaktik

Självständigt arbete på avancerad nivå UM9022 (15hp)

Matematikämnets didaktik

Grundlärarprogrammet med inriktning åk F-3 (240hp)

Höstterminen 2017

Handledare: Kerstin Larsson

Examinator: Judy Sayers

English title: An Analysis of the Introduction of the Equal Sign in
Swedish Textbooks



Stockholms
universitet

En analys av likhetstecknets introduktion i svenska läromedel

Daniel Vulic

Sammanfattning

Det huvudsakliga målet för denna studie var att undersöka hur likhetstecknet på bästa sätt bör introduceras samt behandlas i grundskolans tidiga årskurser. Anledningen till genomförandet av denna studie var att forskning länge har visat på missuppfattningar hos elever om likhetstecknet samt att läromedel i överlag fastställer vad elever lär in. Syftet med denna studie var att ge en samtida svensk bild av hur läromedel och deras medföljande lärarhandledningar i årskurs 1 introducerar samt behandlar likhetstecknet och hur detta eventuellt kan inverka på elevers förståelse för likhetstecknet. Denna studie bygger på både horisontell och vertikal analys, vilket innebär en analys både mellan och inom läromedlen. Uppgifter i läromedlen kategoriserades utifrån ekvationstyp. Därtill jämfördes och grupperades uppgifterna vidare beroende på deras utformning. Även tillhörande lärarhandledningars sidor granskades för att se vilka strategier som användes för att förbereda läraren inför introduktionen av likhetstecknet. Resultatet visar stora skillnader mellan läromedlen vilket kan påverka elevers uppfattningar om likhetstecknet. Generellt fanns få icke-standardekvationer i elevarbetsböckerna efter likhetstecknets introduktionsavsnitt och stödet mellan olika lärarhandledningar varierade avsevärt. Därtill upptäcktes bildstöd av dynamisk skildringstyp, räknehändelser samt språkbruk som kan bidra till svårigheter. Upptäckterna belyser en rad problem i samtida svenska läromedel. Denna studie efterlyser samt kan fungera som en grund för vidare och mer utförlig forskning i ämnet.

Nyckelord

Matematik, lågstadiet, likhetstecknet, läromedelsanalys, uppfattningar om likhetstecknet, utformning av uppgifter

Innehållsförteckning

1. Inledning	1
1.1 Vikten av en korrekt förståelse för likhetstecknet	1
1.2 Standard- och icke-standarddekvationer.....	2
1.2.1 Standard- och icke-standarddekvationers påverkan	2
1.2.2 Missuppfattningar om likhetstecknet.....	2
1.3 Instruktioner och förståelse för likhetstecknet	3
1.3.1 Läromedels påverkan på förståelse för likhetstecknet	3
1.4 Sammanfattning	4
2. Syfte	5
2.1 Frågeställningar	5
3. Metod	6
3.1 Datainsamlingsmetod	6
3.2 Urval och genomförande	6
3.3 Bearbetning av data	7
3.4 Forskningsetik	7
4. Resultat	8
4.1 Likhetstecknet i lärarhandledningarna	8
4.2 Likhetstecknet i elevarbetsböckerna	10
4.2.1 Introduktionsavsnitt för likhetstecknet	11
4.2.2 Påföljande uppslag som huserar uppgifter med likhetstecknet.....	15
4.2.3 Resultatsammanfattning	19
5. Diskussion	20
5.1 Resultatet i förhållande till tidigare forskning	20
5.2 Tillförlitlighet	22
5.3 Relevans för undervisning och lärande.....	22
5.4 Förslag på fortsatta studier	23
6. Referenslista	24

1. Inledning

Från den första utgåvan av svenska skolans nuvarande läroplan, till den senaste revisionen har ingen förändring gjorts för innehållet gällande likhetstecknet vare sig i kursplan (Skolverket, 2011a, s. 63: 67; Skolverket, 2017a, s. 57: 61–62) eller i det tillhörande kommentarmaterialet (Skolverket, 2011b, s. 16–17; Skolverket, 2017b, s. 15). Detta kan tolkas som att Skolverket därmed anser att läroplanen tillhandahåller lärare tillräckliga riktlinjer för undervisning gällande likhetstecknet (=).

I kunskapskraven för årskurs 1–3 tydliggörs att elever ska kunna hantera matematiska likheter och använda likhetstecknet ”på ett fungerande sätt” (Skolverket, 2017a, s. 62). Som komplement understryks likhetstecknet och kunskaper i aritmetik som viktiga byggstenar inom det algebraiska området, vilka ”ligger till grund för elevernas förståelse av ekvationer, algebraiska uttryck, funktioner, formler och grafer” (Skolverket, 2017b, s. 15). Det betonas att matematikdidaktisk forskning ”visar att det är viktigt att elever tidigt får möta och utveckla kunskaper i algebra” (s. 15). När elever i årskurs 1–3 ”förstår att ett tomrum i en matematisk likhet kan ersättas med en bokstav, utvecklar de förförståelse för obekanta tal och variabelbegreppet. Därigenom läggs en grund för innehållet [...] i årskurserna 4–6” (s. 15).

1.1 Vikten av en korrekt förståelse för likhetstecknet

Elevers förståelse för likhetstecknet har inverkan på aritmetisk kompetens och framgång i senare matematik, särskilt inom algebra (Carpenter, Franke & Levi, 2003; Kieran, 1981; Knuth, Stephens, McNeil & Alibali, 2006; Li, Ding, Capraro, & Capraro, 2008; McNeil, Grandau, Knuth, Alibali, Stephens, Hattikudur & Krill, 2006). Det är viktigt att elever tidigt förstår att likhetstecknet uttrycker en relation mellan två matematiska uttryck som har samma värde (Falkner, Levi & Carpenter, 1999; Jacobs, Franke, Carpenter, Levi & Battey, 2007; Powell 2012). Denna förståelse kallas för en relationell (även kallad statisk) uppfattning.

I kontrast innebär en operationell (dynamisk) uppfattning att eleven istället ser likhetstecknet som en signal för att *göra något, finna totalsumman* eller att *svaret ska följa* (Cobb, 1987; McNeil & Alibali, 2005; Sherman & Bisanz, 2009). En sådan uppfattning kan ge tidiga framgångar inom aritmetik, men för ekvationer där den okända delen inte utgörs av summan, differensen, produkten eller kvoten kommer denna uppfattning med stor sannolikhet leda till att eleven svarar felaktigt (Behr, Erlwanger, & Nichols, 1980).

Vikten av en relationell uppfattning av likhetstecknet kan grovt sammanfattas till två anledningar. För det första tillåter en relationell uppfattning elever att förstå centrala aritmetiska relationer såsom uppdelningen av tal på likhetstecknets båda sidor (ex., $7+8=7+7+1$). Förståelsen för en sådan princip ger elever möjlighet att resonera och reflektera kring liknande aritmetiska idéer, vilket möjliggör för dem att kunna ta sig an svårare problem (Behr et al., 1980; Falkner et al., 1999; Jacobs et al., 2007). Den andra anledningen är att en operationell uppfattning av likhetstecknet är en av de största stöttestenarna för elever i övergången från aritmetik till algebra. Utan en relationell uppfattning

kommer elever troligtvis behöva kämpa med att lösa enkla ekvationer i grundskolans tidiga år. Det innebär att lösandet av ekvationer och andra matematiska uträkningar på högre nivå kommer bli successivt svårare för eleverna genom skolåren (Carpenter et al., 2003; Herscovics & Kieran, 1980; Jacobs et al., 2007; Kieran 1981). Forskning har dessvärre länge visat att många elever tycks ha en operationell uppfattning om likhetstecknet (Baroody & Ginsburg, 1983; Behr et al., 1980; Carpenter et al., 2003; Essien & Setati, 2006; Falkner et al., 1999; Kieran, 1981; Knuth et.al, 2006; McNeil & Alibali, 2005).

1.2 Standard- och icke-standarddekvationer

Ett kort sammandrag om ekvationsterminologi från Powell (2012) kan vara lämpligt att behandla innan vi fortskrider. Ett uttryck är “en kombination av tal och räknesätt utan ett likhetstecken [ex., $2+4$]” (s. 628 [min översättning]). En ekvation är “en matematisk utsaga där likhetstecknet används för att påvisa likhet mellan ett tal eller uttryck på ena sidan av likhetstecknet till talet eller uttrycket på andra sidan likhetstecknet. Varje ekvation har två sidor. Skiljepunkten mellan de två sidorna är likhetstecknet” (s. 628 [min översättning]). Standarddekvationer, “står i formen av att ’operationen motsvarar ett svar’ (ex., $2+4=\square$). Då ekvationen avläses från vänster till höger, ställs likhetstecknet alltid näst sist, och svaret står således efter likhetstecknet. Standarddekvationer kan vara öppna (dvs. innefattar ett tomrum eller variabel att lösa) eller stängda (utan någon saknad information)” (s. 628 [min översättning]). Icke-standarddekvationer, “förekommer i andra former än standard (ex., $6=4+\square+8$; $6=2+4$) och kan vara öppna såväl som stängda” (s. 628 [min översättning]).

1.2.1 Standard- och icke-standarddekvationers påverkan

Feltolkningar av likhetstecknet kan uppstå när elever uteslutande utsätts för standarddekvationer, i vilka likhetstecknet faktiskt signalerar en beräkning (Capraro, Ding, Matteson, Capraro & Li, 2007). Cobb (1987) visade att elever som ställdes inför uppgiften att besluta huruvida en operation-båda-sidor-ekvation ($6+4=4+6$) var godtagbar, ändrade ekvationen till en standarddekvation ($6+4=10$). Eleverna godtog helt enkelt inte icke-standarddekvationer som giltiga. Annan forskning visar på flera liknande och andra fall där elever helt enkelt antingen inte tycks kunna eller vilja godta icke-standard ekvationer som giltiga (Behr et al., 1980; Falkner et al., 1999; Sherman & Bisanz 2009). Icke-standarddekvationer anses ha bäst kapacitet, eller rent av vara nödvändiga, för att främja en relationell förståelse för likhetstecknet (McNeil et al., 2006) och därmed förbereda elever för att lyckas i algebra (Knuth et al., 2006).

1.2.2 Missuppfattningar om likhetstecknet

Problem med tolkning och bearbetning av likhetstecknet kan uppstå i samband med att barn implicit skapar sig föreställningar om addition och subtraktion innan de påbörjat skolan (Seo & Ginsburg, 2003). Om sedan elever tidigt i grundskolan erhåller instruktioner om likhetstecknet vilka uteslutande presenteras genom standarddekvationer, riskerar missuppfattningen av likhetstecknet som en operationell symbol för att utföra beräkningar att bli befäst (Baroody & Ginsburg, 1983; Capraro et al., 2007; Herscovics & Kieran, 1980; McNeil, 2008; McNeil et al., 2006).

Det finns tre typer av missuppfattningar om likhetstecknet som är vanligt förekommande för elever i årskurs 1–6 (Carpenter et al., 2003). En missuppfattning är att likhetstecknet betyder *svaret kommer härnäst* och att eleven således ignorerar resten av problemet (ex., $8+4=[12]+5$, s. 10). En annan missuppfattning är att elever tror att likhetstecknet innebär att de ska *använda alla tal* och således godtyckligt omstrukturerar problemet (ex., $8+4=[\]+5 \rightarrow 8+4+5=17$, s. 11). Den tredje missuppfattningen är att eleven *utökar problemet* genom att lägga till ett likhetstecken (ex., $8+4=[12]+5=17$, s. 11).

1.3 Instruktioner och förståelse för likhetstecknet

Utan formell instruktion gällande likhetstecknets relationella innebörd framstår det som om elever tycks uppfatta likhetstecknet som en operationell symbol (Powell, 2012). Essien (2009) påpekar att kunskap om hur man bör organisera elevers första möte med ett visst begrepp är avgörande för vilken typ av uppfattning som grundas hos eleverna.

Carpenter & Levi (2000) visar att elever snabbt var överens om att en standardekvation ansågs vara giltig, men hade långt svårare att enas om huruvida olika typer av icke-standardekvationer var giltiga. Däremot kunde läraren med hjälp av diskussion och instruktioner tillslut förändra elevernas felaktiga uppfattningar om likhetstecknet som en operationell symbol.

Baroody och Ginsburgs (1983) studie undersöker elever i årskurserna 1–3 som fick börja lära sig ur och arbeta med läromedel som gav en strikt relationell definition av likhetstecknet. Forskarna drog slutsatsen att eleverna i årskurs 1 tycktes ha fått ett övertag över eleverna i både årskurs 2 och 3, eftersom de senare var påverkade av tidigare instruktioner från andra läromedel. Forskarna föreslår att lärare kan stötta elevers relationella förståelse för likhetstecknet genom att betona denna uppfattning redan från den formella matematikundervisningens absoluta början.

Medveten samt kontinuerlig instruktion och diskussion i grundskolans tidiga årskurser om likhetstecknets relationella innebörd kan rätta till missuppfattningar eller till och med hindra att missförstånd utvecklas (Powell, 2012). Lärare bör engagera sig för elevernas uppfattning om likhet så snart som symboler som representerar räkneoperationer introduceras. I annat fall kan missuppfattningar gällande likhetstecknet bli kraftigt befästa. Standardekvationer tycks dessvärre vara vanligast förekommande i grundskolan och variationen på hur likhetstecknet behandlas är bristfällig (Falkner et al., 1999).

1.3.1 Läromedels påverkan på förståelse för likhetstecknet

Forskning visar att läromedel i överlag fastställer hur och vad lärare lär ut om likhetstecknet samt därmed elevers inläring (Behr et al., 1980; Essien & Setati, 2006; Kieran, 1981; McNeil et al., 2006; Reys, Reys & Chavez, 2004). Hur likhetstecknet presenteras i läromedel påverkar starkt hur elever kommer att uppfatta likhetstecknet (McNeil et al., 2006; Seo & Ginsburg, 2003). Om läromedel till hög grad bygger på standardekvationer, kan de bidra till problem med att elever uppfattar likhetstecknet som en operationell symbol (Capraro et al., 2007; McNeil et al., 2006). Det vore olyckligt om läromedel förstärker elevers missuppfattningar om likhetstecknet. Därför är det viktigt att läromedel konsekvent betonar likhetstecknets relationella natur och att materialen använder icke-standardekvationer i liknande (eller större) utsträckning än standardekvationer (Powell, 2012).

Li och kollegor (2008) uppdagar, i en jämförande studie mellan amerikanska och kinesiska elever, enorma skillnader i förståelsen för problem relaterade till likhetstecknet. Resultatet visade att andelen korrekta svar hos de amerikanska eleverna enbart låg på runt 28%, medan kinesiska elever gav omkring 98% korrekta svar. Forskarna menar att dessa resultat kan kopplas till de läromedel som användes i länderna samt till stödet i de tillhörande lärarhandledningarna. I en sydafrikansk läromedelsstudie argumenterar Essien (2009) för att läromedel för årskurs 1 som introducerar likhetstecknet, såväl som deras medföljande lärarhandledningar, behöver ses över. Forskaren förespråkar vikten av utökat stöd till lärare om likhetstecknet samt nyttjandet av icke-standardekvationer och specifika utformningar på uppgifter (däribland vågskålar) för att ge elever en korrekt förståelse för likhetstecknets innebörd. Powell (2012) menar att det kan tänkas vara något av en tidskrävande uppgift för läromedelsförfattare att bidra med fler exempel på icke-standardekvationer, särskilt med tanke på att lärarhandledningarna då bör innehålla instruktioner som stöd till dessa ekvationer. Men Powell tillägger också att dessa åtgärder likväl skulle stötta elever att skapa sig korrekta uppfattningar om likhetstecknet.

1.4 Sammanfattning

För att sammanfatta ger Skolverket (2017a; 2017b) vaga förmaningar om att elever tidigt behöver möta likhetstecknet på ett korrekt sätt. Forskning visar att många elever har en operationell uppfattning om likhetstecknet (t.ex., Falkner et al., 1999; Knuth et al., 2006; McNeil & Alibali, 2005) och betonar vikten av att elever tidigt får en förståelse för likhetstecknets relationella natur (Essien, 2009; Falkner et al., 1999; Powell, 2012). Icke-standardekvationer har visats vara ett effektivt sätt för att hjälpa elever skapa sig korrekt förståelse för likhetstecknet (McNeil et al., 2006). Överlag menas läromedel ligga till grund för vilken undervisning som sker i skolor (t.ex., Essien & Setati, 2006; McNeil et al., 2006; Reys et al., 2004) och elevers uppfattning om likhetstecknet menas härstamma ur hur tecknet presenteras däri (McNeil et al., 2006; Seo & Ginsburg, 2003). Läromedelsanalyser runt om i världen visar att det kan finnas ett undermåligt stöd i introduktionen av likhetstecknet (Essien, 2009; Li et al., 2008). Detta väcker intresse för hur svenska läromedel behandlar likhetstecknet.

2. Syfte

Syftet med studien är att ge en överblick över uppgifter som introducerar likhetstecknet i vanligt förekommande svenska läromedel för årskurs 1. Därtill ämnar studien att, i medföljande lärarhandledningar, belysa eventuellt stöd som kan relateras till förståelsen för likhetstecknet. Genom att analysera utformningen av uppgifter som introducerar likhetstecknet i dessa läromedel, ämnar studien att ge en bild av samt diskutera hur introduktionen av likhetstecknet i svenska läromedel och deras lärarhandledningar kan relateras till tidigare forskning. Förhoppningen är att genom denna läromedelsanalys ge framtida – såväl som verksamma – lärare ett stöd för att förstå sig på, välja och/eller skapa lämpliga uppgifter för att introducera likhetstecknet för sina elever. Denna studie ämnar också att uppmuntra till mer djupgående svensk forskning i ämnet.

2.1 Frågeställningar

Hur belyser lärarhandledningarna eventuellt stöd som kan behövas för uppgifter där likhetstecknet introduceras?

Hur är de uppgifter som introducerar likhetstecknet i läromedlen utformade?

Vilka uppfattningar eller missuppfattningar kan dessa uppgifter i läromedlen relateras till enligt tidigare forskning?

3. Metod

3.1 Datainsamlingsmetod

Data insamlades genom analys av svenska läromedel och deras tillhörande lärarhandledningar. Överlag fastställer läromedel hur och vad lärare lär ut om likhetstecknet samt därmed elevers inläring (t.ex., Essien & Setati, 2006; McNeil et al., 2006; Reys et al., 2004). Även om det inte finns någon garanti för att lärare läser och följer tillhörande lärarhandledningar, så är beskrivningen av hur likhetstecknet behandlas inom dessa viktigt för att utreda vilket stöd lärare får från dem (Li et al., 2008; Powell, 2012).

3.2 Urval och genomförande

Analysen byggde på fem svenska läromedel och tillhörande lärarhandledningar (se tabell 1) som är avsedda för den första terminen i årskurs 1.

Tabell 1. Referenser till undersökta läromedel

	REFERENS	
TITEL (Förkortad titel)	ELEVARBETSOK	LÄRARHANDLEDNING
Favorit matematik 1A (Favorit)	Ristola, Tapaninaho & Tirronen (2012)	Haapaniemi (2012)
Mattedirekt Safari 1A (Safari)	Falck, Picetti & Elofsdotter Meijer (2013)	Falck, Picetti, & Elofsdotter Meijer (2011)
Mitt i Prick matematik 1A (Mitt i Prick)	Rinne (2016a)	Rinne (2016b)
Pixel 1A (Pixel)	Alseth (2015a)	Alseth (2015b)
Prima matematik 1A (Prima)	Brorsson (2014)	Brorsson (2015)
Förtydligande: I fortsättningen används läromedlens förkortade titlar istället för referens.		

Dessa läromedel valdes ut eftersom de är utgivna av stora förlag, vilket gör dem lättillgängliga för lärare i svenska skolor. Samtliga är anpassade för svenska skolans läroplan och är utgivna efter den första utgåvan av den nuvarande läroplanen (Skolverket, 2011a). Ur dessa läromedel valdes de avsnitt som introducerar likhetstecknet för analys. Därtill undersöktes de fem påföljande uppslagen (som huserar uppgifter med likhetstecknet) för att undersöka hur läromedlen fortsatte att behandla tecknet efter introduktionen. Tillhörande sidor i lärarhandledningarna undersöktes för att belysa vilket explicit stöd läraren ges till undervisningen.

3.3 Bearbetning av data

Inspirerat av Charalambous, Delaney, Hsu och Mesas (2010, s. 123) analysupplägg, som både är horisontellt och vertikalt, utgick också denna studie från ett sådant upplägg i analysen. Den horisontella analysen innebar i denna studie att uppgifterna i de undersökta läromedlen jämfördes med varandra, kategoriserades tillsammans efter ekvationstyp och att deras förekomst i läromedlen upptecknades. Kategoriseringen av uppgifterna utgick från McNeil och kollegors (2006, s. 372–373) definition av ekvationstyper (se tabell 2). Den vertikala analysen innebar i denna studie en djupare undersökning av uppgifterna – deras utformning, bildstöd, och språkbruk analyserades – för att således kunna gruppera dem samt senare diskutera eventuella uppfattningar eller missuppfattningar som kan relateras till dem. Li och kollegor (2008, s. 199; 202–204) fungerade som förebild för att undersöka vilka strategier som de undersökta lärarhandledningarna använder för att förbereda läraren inför introduktionen av likhetstecknet. Sidorna ur lärarhandledningarna granskades för introduktionen och användningen av likhetstecknet i uppgifterna såväl som övriga kommentarer tillhörande likhetstecknet.

Tabell 2. Definitioner av ekvationstyper

EKVATIONSTYP	BENÄMNING	FORM	EXEMPEL
Standard	Operation-vänster-sida	$a+b=c, a+b+c=d$	$4+6=[_]$, $[_]+6=10$, $4+4+4=[_]$
Icke-standard	Operation-båda-sidor	$a+b=c+d$	$2+5=[_]+3$, $2+[_]=4+3$
	Operation-höger-sida	$c=a+b$	$[_]=4+6$, $10=[_]+6$
	Ingen-operation	$a=a$	$4=4, 4=[_]$
	Ingen-ekvation	använd = (eller >, < samt \neq) för att fullgöra utsagan	$4[_]4, 7[_]4$
Förtydligande: Notera att (+) är utbytbar mot valfritt annat räknesätt			

3.4 Forskningsetik

I studien analyserades läromedel vilket innebär att det inte förekom etiska utmaningar på samma sätt som vid en studie där lärare eller elever medverkar. Däremot eftersträvades en medvetenhet om hur läromedlen framställs i analysen så att dessa behandlades på ett opartiskt sätt.

4. Resultat

Först presenteras resultaten gällande lärarhandledningarna, sedan presenteras resultaten gällande elevarbetsböckerna och slutligen sammanfattas resultatets mest intressanta fynd.

4.1 Likhetstecknet i lärarhandledningarna

Vid introduktionen av likhetstecknet uppmanar samtliga lärarhandledningar till någon form av arbete med konkret material eller praktiska övningar för att inleda arbetet i läromedlen. Stödet till dessa övningar samt till uppgifterna i läromedlen varierar från korta kommentarer gällande språkbruk (Favorit; Mitt i Prick); till uppmaningen om diskussion gällande jämvikt i samband med likhetstecknet (Safari); till ett allmänt klargörande av yngre elevers tendens till en operationell uppfattning om likhetstecknet (Pixel); till mer utförliga förklaringar om hur olika uppgifter påverkar elevers förståelse för matematisk likhet (Prima).

Favorit meddelar att i ”förskoleklass har eleverna inte undervisats i användning av likhetstecknet, det får de lära sig i det här kapitlet av Favorit Matematik 1A” (s. 37). Som stöd till kommentaren ges en begreppsdefinition: ”ett uttryck som $4=4$ kallas likhet. Likhet är när två uttryck är lika stora” (s. 37). Den strategi till introduktionen av likhetstecknet som ges är ”[v]ad betyder [likhets]tecknet? (Är lika med. Det finns lika många äpplen i båda påsarna)” (s. 34). Mitt i Prick understryker ”likhetstecknets betydelse” som en av de viktigaste sakerna eleverna ska lära sig i läromedlet (s. 3). Däremot ges läraren enbart strategin ”Skriv likhetstecknet på tavlan och fråga om någon vet vad det betyder. = betyder ’lika många som’ och ’är lika med’” (s. 21). Bristen på annat stöd gällande likhetstecknet ger intrycket av att författarna till de ovanstående läromedlen förmodar att lågstadielärare är väl medvetna om de problem och konsekvenser som är associerade med likhetstecknet.

Safari understryker att ”resonemang kring olika moment, både i stor grupp och mellan elever, ska utgöra en central del av undervisningen” (s. 4). Författarna ger strategin ”[v]isa likhetstecknet och förklara att man kan använda tecknet mellan grupperna [med konkret material] för att visa att det är lika många/mycket i båda” (s. 16). Till detta uppmanas läraren att föra en diskussion om huruvida man ”kan använda likhetstecknet mellan grupperna eller inte [dvs. med lika eller olika antal på likhetstecknets sidor]. När eleverna har förstått likhetstecknets innebörd kan de arbeta parvis på liknande sätt” (s. 16). I det fall att några elever fortfarande har svårt att förstå likhetstecknets innebörd, uppmanas läraren föra ytterligare diskussion samt att låta ”eleven få berätta högt hur han/hon tänker i samband med arbetet” (s. 20). Det bör noteras att läraren, utöver uppmaningen att kontrastera huruvida det råder jämvikt mellan likhetstecknets sidor, inte ges något annat stöd gällande likhetstecknet.

Pixel understryker i överlag en ”medveten undervisning” (s. VIII) och mer specifikt att elever ska ”[f]örstå likhetstecknet som en symbol för likhet mellan uttryck” (s. XIII). Trots att författarna senare för på tal den välkända operationella missuppfattningen hos yngre elever, så fördjupas inte informationen mer än att understryka vikten av att eleverna ”utvecklar den statistiska [relationella] uppfattningen av att det betyder ’lika mycket som’” (s. XVI). Författarna ger därtill en tvetydig uppmaning om att likhetstecknet ”anger att det ska vara lika mycket på båda sidorna om det. Hur det uttrycks eller visas spelar ingen roll [dvs. ingen skillnad mellan: $2+3=5$, $5=2+3$, $5=5$, $1+4=2+3$ osv.]”

(s. XVI). Läraren uppmanas att arbeta praktiskt med likhetstecknet på en ”våg som visar jämvikt” (s. 18) innan eleverna gör uppgifterna i boken. Författarna betonar att eleverna kan uppfatta det praktiska arbetet som addition/subtraktion och att detta är okej, men att det ”viktigaste är att påpeka för eleverna att likhetstecknet betyder att det ska vara lika mycket på båda sidor” (s. 18). Författarna fortsätter med att tillägga att läraren bör ”arbeta muntligt med räknesätten [addition och subtraktion] när ni arbetar med de här sidorna [som explicit introducerar likhetstecknet]” (s. 18). I det påföljande kapitlet (som explicit introducerar addition och subtraktion) uppmanas läraren till att återigen med balansvåg ”[r]epetera likhetstecknets betydelse och gör fler liknande uppgifter åt eleverna” (s. 22). I det fallet att läraren önskar ytterligare information anmärker författarna att ”i Lärarbok FK [lärarhandledningen till förskoleklass] finns mer att läsa om likhetstecknet” (s. 18).

Prima ger flera utförliga strategier för hur läraren ska introducera likhetstecknet. Inledningsvis ges läraren strategin ”[t]änk på att använda uttrycket ’är lika med’ så att barnen förstår att det handlar om likhet. Variera mellan att ha summan på höger och vänster sida om likhetstecknet” (s. 23) (dvs. skifta mellan *operation-vänster-sida* och *operation-höger-sida*/skifta mellan standardekvation och icke-standardekvation). Utöver introduktion av likhetstecknet genom ett antal praktiska uppgifter uppmanas läraren därtill att som kontrast ”även introducera tecknet \neq , vilket betyder ’skiljt från’” (s. 23). Läraren uppmanas att beskriva likhetstecknet ”som en våg där det ska väga lika på bägge sidor om likhetstecknet” (s. 23). Författarna tydliggör för vilka uppgifter och sammanhang som eleverna lär sig att ”skapa likhet” (s. 27) (dvs. *ingen-operation*) och var ”de däremot ska identifiera var det ’är likhet’” (s. 27) (dvs. *ingen-ekvation*). Ytterligare strategier ges genom att läraren vid öppna utsagor ombeds ”[u]ppmärksamma eleverna på vikten av att se vilket tecken [= eller +] som står på vilken plats för att kunna lösa uppgifterna korrekt” (s. 27) (dvs. identifiera *operation-vänster-sida* eller *operation-höger-sida*). Författarna informerar även gällande uppgifter med ”två termer på vardera sidan om likhetstecknet, svarsvarianterna blir här betydligt fler. Låt eleverna jämföra sina lösningar med varandra” (s. 27) (dvs. *operation-båda-sidor*). Dessutom uppmanas läraren uttryckligen att förtydliga för sina elever att olika antal på likhetstecknets sidor inte är acceptabelt: ”[d]iskutera att det faktiskt inte stämmer att ha ett likhetstecken mellan föremålen när de inte är lika många. Be eleverna att lägga till föremål så att det blir lika många på bägge sidor” (s. 27). Utan att direkt namnge olika uppfattningar (dvs. operationell/relationell, som i Pixel) eller ekvationstyper, så förmedlar författarna ändå genom en rad strategier ett utförligt stöd för hur läraren kan hjälpa att sina elever att skapa sig en förståelse likhetstecknet relationella natur.

4.2 Likhetstecknet i elevarbetsböckerna

Samtliga läromedel nyttjar någon typ av icke-standardekvationer för att explicit introducera likhetstecknet (se tabell 3). Det varierar något mellan vilka ekvationstyper som används för detta syfte. Ytterligare en iakttagelse är den stora skillnaden på förekomsten av icke-standardekvationer i läromedlens introduktionsavsnitt och de (fem) påföljande uppslagen som huserar uppgifter med likhetstecknet. Endast två läromedel (Pixel; Prima) nyttjar icke-standardekvationer (men då enbart *operation-höger-sida*) i de påföljande uppslagen.

Tabell 3. Förekomst av ekvationstyper i läromedel

		EKVATIONSTYP				
		STANDARD		ICKE-STANDARD		
I AVSNITT	LÄROMEDEL	Operation-vänster-sida	Operation-båda-sidor	Operation-höger-sida	Ingen-operation	Ingen-ekvation
INTRO	Favorit				X	X
	Mitt i prick				(X)*	X
	Pixel	X		X		
	Prima	X	X	X	X	X
	Safari			X	X	X
UPPSLAG	Favorit	X				
	Mitt i prick	X				
	Pixel	X		X		
	Prima	X		X		
	Safari	X				
Förtydligande:						
INTRO= Det första avsnittet/kapitlet som uttryckligen introducerar likhetstecknet.						
UPPSLAG= De fem påföljande uppslagen med uppgifter som huserar likhetstecknet.						
* Se kommentar till figur 6						

4.2.1 Introduktionsavsnitt för likhetstecknet

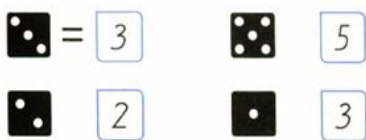
Ingen-Ekvation

I introduktionen av likhetstecknet är icke-standardekvationstypen *ingen-ekvation* vanligast och förekommer i fyra av fem läromedel (Favorit; Mitt i Prick; Prima; Safari).

6 Skriv = där det är lika många.



Skriv likhetstecken där det är lika.



Skiv = där det är lika.



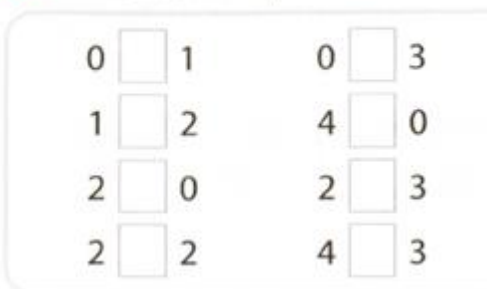
Figur 1 (Safari, s. 17)

Figur 2 (Prima, s. 17)

Figur 3 (Safari, s. 17)

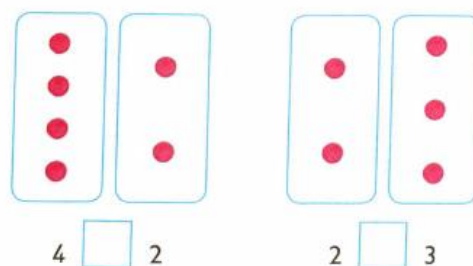
Uppgifterna för denna ekvationstyp presenteras med en stor variation gällande bildstöd. Det finns uppgifter som använder ikoner/bilder (bollar, tärningar, ballonger, djur osv.) som stöd för att skildra antalet (figur 1), uppgifter som kombinerar ikoner/bilder med tal (figur 2) samt uppgifter utan bildstöd (figur 3). Däremot förändrar inte bildstödet i sig principen för dessa uppgifter, som alla efterfrågar att likhetstecknet ska sättas ut där det råder jämvikt. Utöver dessa finns det uppgifter som därtill kontrasterar likhetstecknets innebörd genom att använda tecknen *större än* och *mindre än* ($>$, $<$) (se figur 4, 5). Således går det att dela in uppgifterna för denna ekvationstyp i två grupper, en grupp där enbart likhetstecknet förekommer (figur 1, 2, 3) och en grupp där likhetstecknet kombineras med andra tecken (figur 4, 5). Det bör noteras att Primas lärarhandledning (s. 23) uppmanar lärare att använda tecknet för *skiljt från* (\neq), men att detta sedan inte är något som explicit förekommer i elevarbetsboken.

3. Jämför. Skriv $>$, $<$ eller $=$.



Figur 4 (Mitt i prick, s. 27)

5. Skriv $<$, $=$ eller $>$.



Figur 5 (Favorit, s. 39)

Språkbruket skiljer sig mellan de två grupperna, men var inom grupperna i princip homogent. Uppmaningen i den första gruppen kan sammanfattas som *skriv likhetstecken där det är lika* och i den andra gruppen *skriv, $>$, $<$ eller $=$* . Det bör noteras, för den andra gruppen, att eleverna tidigare i elevarbetsböckerna ges explicit stöd gällande de olika symbolernas innebörd, vilket kan förklara knappheten i detta språkbruk.

Ingen-Operation

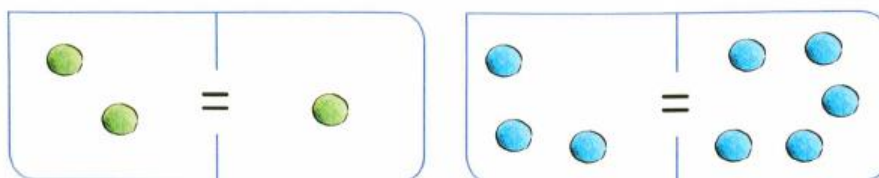
Ekvationstypen *ingen-operation* är också vanlig i introduktionen av likhetstecknet och förekommer i tre av fem läromedel (Favorit; Prima; Safari). (Här bör det noteras [ang. * i tabell 3] att i Mitt i Prick förekommer denna ekvationstyp endast en gång och då inte som en uppgift eleverna ska lösa utan som stöd för att förklara innebörden av likhetstecknet, se figur 6. Därför kan inte denna ekvationstyp fullt tillgodoses detta läromedel).



Figur 6 (Mitt i prick, s. 9)

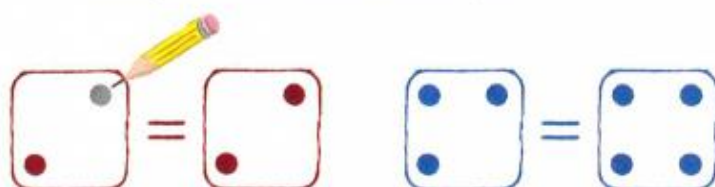
Vanligast är att uppgifter av typen *ingen-operation* presenteras med någon form av ikoner/bilder för att skildra antalet (figur 7, 8). För uppgifter av denna ekvationstyp förekommer det endast enstaka fall helt utan bildstöd eller där ikoner/bilder kombineras med tal. Oavsett abstraktionsnivå gällande bildstödet, bygger dock samtliga uppgifter på principen att avspegla summan och kan därför menas tillhöra samma utformningsgrupp.

Rita så det är lika många på båda sidorna.



Figur 7 (Prima, s. 16)

● Rita färdigt så det blir lika många.

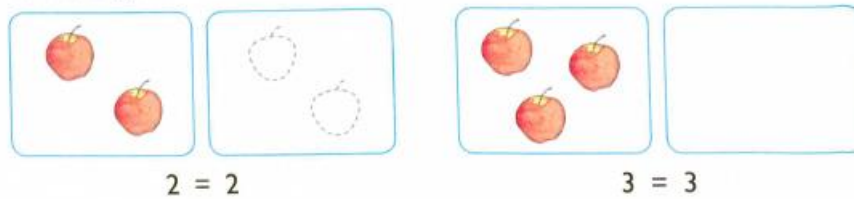


Figur 8 (Safari, s. 26)

Språkbruket kan däremot delas upp i tre olika grupper. En formulering är väldigt avskalad och lyder kort *rita*, denna formulering förutsätter att eleven förstår att uppgiften efterfrågar matematisk likhet. Denna formulering förekommer endast i ett fall (se figur 9), förvisso ges eleven stöd i form av konturer av antal äpplen, men formuleringen kan ändå ses som något knapphändig. Den andra formuleringen lyder *rita så att det är lika många*, denna formulering ger tydligt underlag för vad som ska göras i uppgiften och ger ingen antydning på någon form av operation. Den tredje formuleringen lyder *rita så att det blir lika många*. Att använda ordet *blir* kan förknippas med att uppgiften

efterfrågar någon form av operation. Det bör här noteras inte alla läromedel är konsekventa i sitt språkbruk, som då kan skifta mellan *är* och *blir* (Safari, s. 23; 26).

2. Rita äpplen.

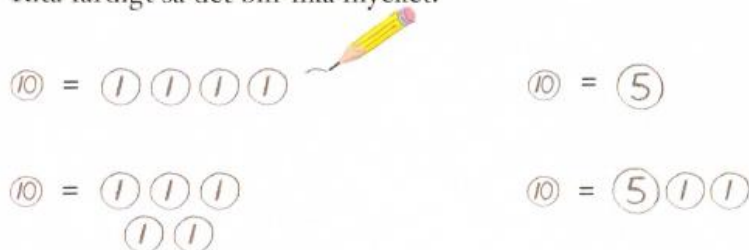


Figur 9 (Favorit, s. 34)

Operation-Höger-Sida

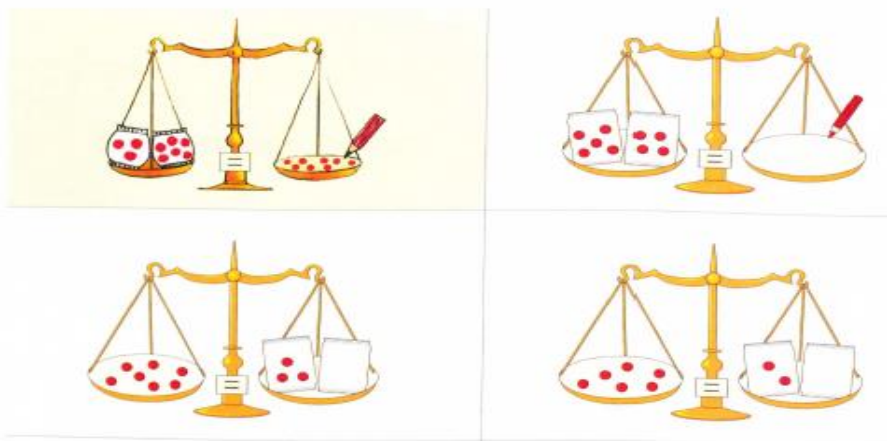
Ekvationstypen *operation-höger-sida* förekommer i introduktionen av likhetstecknet hos tre av fem läromedel (Pixel; Prima; Safari)

● Rita färdigt så det blir lika mycket.



Figur 10 (Safari, s. 31)

Rita så det blir lika.



Figur 11 (Pixel, s. 18 [De två översta vågskålar är av typen operation-vänster-sida och de två understa vågskålar är av typen operation-höger-sida])

Bildstödet av uppgifterna varierar för denna ekvationstyp, det finns både uppgifter med och utan ikoner/bilder. De uppgifter som använde ikoner/bilder visar antingen pengar (figur 10) eller vågskålar (figur 11), vilket gör att det bildspråkliga stödet alltså inte är homogent. Utformningen av uppgifterna bör däremot grupperas utifrån huruvida de enbart använder likhetstecknet (figur 10, 11) eller om de också innehåller operatörer (se figur 12). Uppgiften kan tänkas bli mer komplex för eleverna om de behöver beakta likhetstecknet i relation till operatörer.

Skriv så det är lika.

Three boxes containing arithmetic equations with blank spaces for completion:

- Box 1: $3 = 1 + \underline{\quad}$, $3 + \underline{\quad} = 4$, $5 = 3 + \underline{\quad}$
- Box 2: $\underline{\quad} + 5 = 5$, $1 + \underline{\quad} = 4$, $\underline{\quad} = 3 + 2$
- Box 3: $4 + 1 = \underline{\quad}$, $2 + \underline{\quad} = 5$, $\underline{\quad} + 3 = 4$

Figur 12 (Prima, s. 24)

Språkbruket för denna ekvationstyp skiljer sig mellan att antingen göra *så det blir lika* (figur 10, 11) och göra *så det är lika* (figur 12). Det bör noteras att formuleringen *blir lika* anspelar på en operation och kan därför vara ett mindre lämpligt språkbruk (det bör dock även noteras att de uppgifter som här använder ett sådant språkbruk inte innehåller några operatörer).

Operation-Vänster-Sida

Uppgifter av standardekvationstypen *operation-vänster-sida* för att introducera likhetstecknet förekommer bara i två av fem läromedel (Pixel; Prima).

Det bör påpekas att i introduktionsavsnitten presenteras denna ekvationstyp alltid tillsammans med uppgifter av icke-standardekvationstypen *operation-höger-sida* (se figur 11, 12). Denna strategi betonar samhörighet mellan ekvationstyperna och kan därmed tänkas stötta elever att se likhetstecknet som en relationell symbol, även i standardekvationer. Eftersom uppgifterna i denna ekvationstyp presenteras i samband med dem av typen *operation-höger-sida* så grupperas de på samma sätt. Detsamma gäller för kommentarer angående språkbruk.

Operation-Båda-Sidor

Ekvationstypen *operation-båda-sidor* förekommer enbart i ett läromedel (Prima) vid introduktionen av likhetstecknet.

Two boxes containing arithmetic equations with blank spaces for completion:

- Box 1: $\underline{\quad} + 4 = 2 + 3$
- Box 2: $4 + 1 = \underline{\quad} + \underline{\quad}$

Figur 13 (Prima, s. 25)

Skriv hur du delar upp talen.

A sequence of equations showing the decomposition of the number 3:

$$3 = \boxed{3+0} = \boxed{2+\underline{\quad}} = \boxed{\underline{\quad}+\underline{\quad}} = \boxed{\underline{\quad}+\underline{\quad}} = 3$$

Figur 14 (Prima, s. 22)

Samtliga uppgifter av ekvationstypen *operation-båda-sidor* presenteras uteslutande genom siffror och matematiska symboler. Uppgifterna kan delas in i två grupper utifrån deras syfte. Den ena gruppen fokuserar på explicit uppdelning av givna tal (figur 13). Notera att det givna talet i uppgiften är utställt på ekvationens båda yttersidor, detta kan tänkas ytterligare betona likhetstecknets funktion som en symbol för jämvikt. Den andra gruppen förutsätter en implicit förståelse för uppdelningen av ett tal med explicit fokus på att skapa likhet (figur 14).

Språkbruket avspeglar uppgifternas syfte och uppmanar elever att *dela upp talet* samt *skriva så det är lika*. Dessa formuleringar kan inte tänkas framhäva någon operationell uppfattning av likhetstecknet. Det bör tilläggas att Primas elevarbetsbok (på insidan av bokens omslag) informerar eleverna om likhetstecknets relationella natur (*operation-båda-sidor*): ”Vi kan addera termerna i vilken ordning vi vill: $1+7=7+1$ ”.

4.2.2 Påföljande uppslag som huserar uppgifter med likhetstecknet

Operation-Vänster-Sida

Standardekvationen *operation-vänster-sida* förekommer hos samtliga läromedel i de påföljande uppslagen.

Räkna.

$$4 + 4 = \underline{\quad} \quad | \quad 4 + 3 = \underline{\quad} \quad | \quad 6 + 4 = \underline{\quad}$$

Figur 15 (Pixel, s. 31)

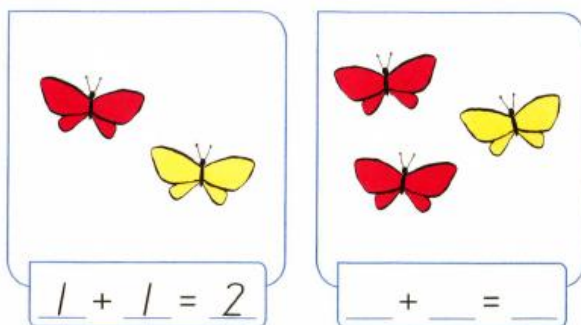
7. Skriv termen som fattas.

$$2 + \square = 3 \quad | \quad 3 + \square = 2 \quad | \quad 2 + \square = 4$$

Figur 16 (Favorit, s. 49)

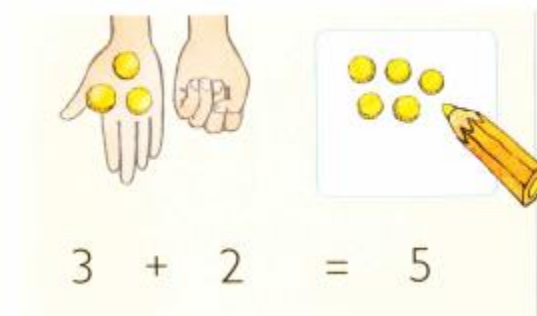
Presentationen av uppgifterna varierar för denna ekvationstyp, det finns både uppgifter med och utan ikoner/bilder. Uppgifterna utan bildstöd varierar mellan uppgifter där summan saknas (figur 15) och uppgifter där någon term saknas (figur 16).

Hur många är det tillsammans?



Figur 17 (Prima, s. 31)

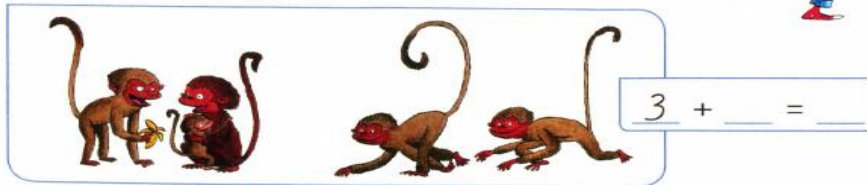
Hur många är det sammanlagt?



Figur 18 (Pixel, s. 27)

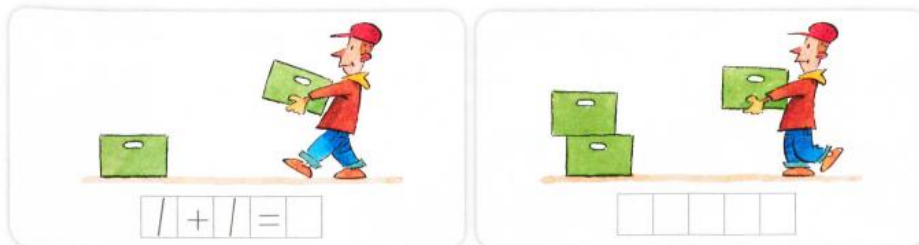
De uppgifter som har bildstöd kan delas upp i två grupper beroende på bildstödet utformning. Bildstödet kan skiljas mellan en statisk skildring (figur 17, 18) och en dynamisk skildring av ekvationerna (figur 19, 20). Den statiska skildringen visar kort ett antal ting som ska läggas samman. Den dynamiska skildringen visar däremot tydligt någon form av händelse. Denna skildringstyp kan påverka elevers uppfattning gällande likhetstecknets innebörd.

Hur många är det tillsammans?



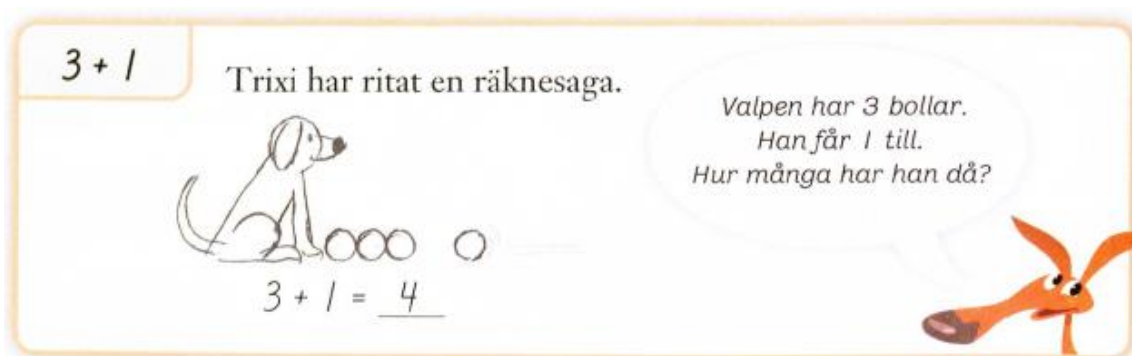
Figur 19 (Prima, s. 30)

1. Hur många lådor är det tillsammans?



Figur 20 (Mitt i prick, s. 43)

Utöver de ovannämnda utformningarna förekommer även uppgifter med så kallade *räknehändelser* (figur 21, 22). Bildstödet i dessa varierar mellan inget och de båda skildringstyperna. Det som däremot är gemensamt för dessa uppgifter är att de uppmanar eleven att hitta på och koppla någon form av händelse till uppgiften.



Figur 21 (Safari, s. 42)

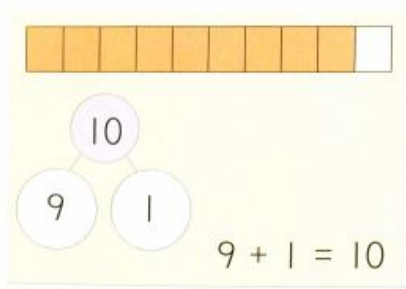
Rita en räknehändelse till additionen.



Figur 22 (Prima, s. 33)

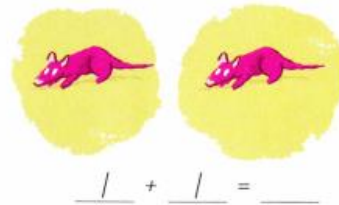
Språkbruket för uppgifterna utan bildstöd varierar mellan två olika typer av formuleringar. Den ena formuleringen uppmanar eleven att *addera/räkna*, den andra formuleringen lyder istället *skriv summan/termen som fattas*. Dessa formuleringar skiljer sig i vad eleven ombeds att göra. Språkbruket i den första formuleringen omber rakt eleven att utföra en operation, den andra formuleringen omber istället eleven att färdigställa ekvationens ofullständiga delar. Valet av språkbruk kan påverka elevers uppfattning gällande likhetstecknet funktion i standardekvationer.

Summan är 10.



Figur 23 (Pixel, s. 30)

● Skriv + och =. Räkna ut.



Figur 24 (Safari, s. 37)

1. 1 av fåglarna flyger iväg. Hur många stannar kvar?



Figur 25 (Mitt i prick, s. 51)

För uppgifterna med bildstöd används formuleringen *hur många är det tillsammans/sammanlagt* nästan uteslutande. Denna sorts formulering var uniform oberoende av bildstödet skildringstyp. Det fanns enstaka avvikande formuleringar, såsom *summan är* (figur 23), *skriv + och =. Räkna ut* (figur 24), *hur många stannar/finns kvar?* (figur 25). Den första av de avvikande formuleringarna bekräftar kort talets summa i ekvationen som något statiskt. De andra två avvikande formuleringarna förknippar istället ekvationerna med någon form av operation eller händelse. Gällande räknehändelser är språkbruket i stort sett homogent och löd *rita/skriv en räknehändelse/räknesaga*.

Operation-Höger-Sida

Den enda icke-standardekvationen som förekommer i de påföljande uppslagen efter introduktionen är *operation-höger-sida*, ekvationstypen förekommer i två av fem läromedel (Pixel; Prima).

Rita eller kryssa över klossar så det blir lika.



Figur 26 (Pixel, s. 23)

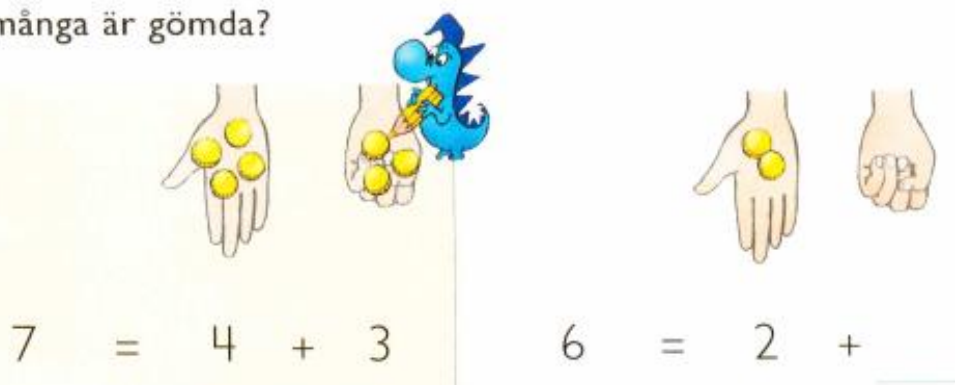
Skriv färdigt additionen.

$$\begin{array}{ccc} 2 + \underline{\quad} = 5 & \underline{\quad} + \underline{\quad} = 3 & 5 = 4 + \underline{\quad} \\ 4 + \underline{\quad} = 5 & \underline{\quad} + \underline{\quad} = 5 & 4 = 2 + \underline{\quad} \end{array}$$

Figur 27 (Prima, s. 33)

Presentationen av uppgifterna varierar för denna ekvationstyp, det finns både uppgifter med och utan ikoner/bilder. Bildstödet skiljer sig mellan läromedlen, Pixel presenterar enbart uppgifter med olika bildstöd och Prima presenterar enbart uppgifter utan bildstöd. Det går vidare att skilja på två sammanhang i vilka uppgifterna för denna ekvationstyp presenteras, antingen blandas de med uppgifter från *operation-vänster-sida* (figur 26, 27) eller så består de exklusivt utav uppgifter av ekvationstypen *operation-höger-sida* (figur 28). Uppgifter där ekvationstyperna blandas finns i båda läromedlen, dessa uppgifter kan stärka sambandet mellan de två ekvationstyperna. Bara i Pixel förekommer därutöver uppgifter av ekvationstypen *operation-höger-sida* i ett exklusivt sammanhang, bildstödet för dessa är då av statisk skildringstyp med en redan given summa.

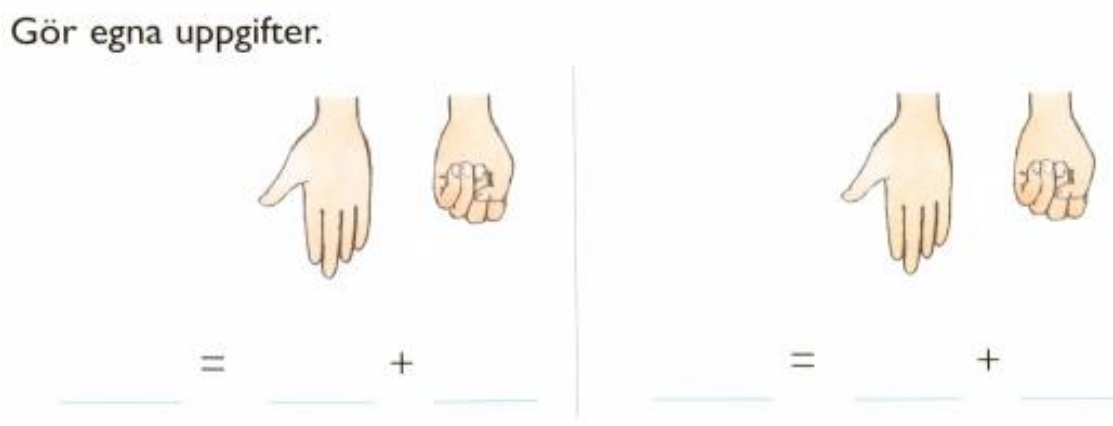
Hur många är gömda?



Figur 28 (Pixel, s. 29)

Det finns inget homogent språkbruk för de blandade uppgifterna. I Pixel uppmanas eleven att *göra så att det blir lika*, i Prima uppmanas eleven att *skriva färdigt additionen*. Den första formuleringen handlar i princip om att skapa jämvikt. Den senare formuleringen kan liknas vid formuleringen *skriv*

summan/termen som fattas som tidigare nämndes under avsnittet *operation-vänster-sida*. Språkbruket i de uppgifter av ekvationstypen *operation-höger-sida* som presenteras i ett exklusivt sammanhang är homogent och lyder *hur många är gömda/saknas*. Formuleringen kan sammanfattas i att eleven utifrån en given summa ombeds återupprätta jämviktsrelationen mellan likhetstecknets båda sidor. I samband med dessa uppgifter presenteras liknande men tomma uppgifter där eleven uppmanas *göra egna uppgifter* (figur 29), detta språkbruk är i sig neutralt och bör ses i relation till den tidigare formuleringen.



Figur 29 (Pixel, s. 29)

4.2.3 Resultatsammanfattning

Resultatet belyser i vilken utsträckning samt genom vilka strategier som lärarhandledningarna förbereder och ger lärare stöd inför introduktionen av likhetstecknet. Analysen visar att stödet varierar avsevärt mellan olika lärarhandledningar. Därtill visar resultatet vilka ekvationstyper som används för att introducera likhetstecknet i elevarbetsböcker samt hur utformningen av uppgifternas bildstöd och språkbruk ser ut; analysen visar på ett antal fynd som kan påverka elevers uppfattningar om likhetstecknet. De mest intressanta fynden är den varierande omfattningen av stöd i lärarhandledningarna samt språkbruk, bildstöd, räknehändelser och förekomst av icke-standardekvationstyper i elevarbetsböckerna. I nästa avsnitt diskuteras dessa fynd i relation till forskning.

5. Diskussion

Först diskuteras studiens mest intressanta fynd relaterat till tidigare forskning, sedan diskuteras värdet av studien och slutligen motiveras samt efterlyses ytterligare forskning.

5.1 Resultatet i förhållande till tidigare forskning

Resultatet visar på en stor variation i det stöd som lärare får från de undersökta lärarhandledningarna om arbete med och introduktionen av likhetstecknet. I flera fall är stödet undermåligt. Li och kollegor (2008) belyser stödet i lärarhandledningen som en avgörande faktor för den stora skillnaden mellan kinesiska och amerikanska elevers prestationer gällande förståelse för likhetstecknet (98 % vs 28 %). Kort lyfter forskarna fram det faktum att kinesiska lärarhandledningar genomgående betonar vikten av att presentera likhetstecknet genom en mängd olika problem och sammanhang, forskarna lyfter även fram att enbart ett fåtal amerikanska lärarhandledningar direkt behandlar likhetstecknet. Li och kollegor resonerar att lärare bara kan förväntas att lära ut vad de själva upplever och förstår. Det vore naivt att förutsätta att alla lärare under sin karriär och/eller utbildning skaffar sig en exemplarisk förståelse för likhetstecknet och de svårigheter som kan relateras till tecknet. Om inte lärare får tydligt stöd och instruktioner går det inte heller att förvänta att lärarnas elever kommer få en korrekt förståelse för likhetstecknet. Vi vet också att forskning visar att läromedel i överlag ligger till grund för vad lärare lär ut (Behr et al., 1980; Essien & Setati, 2006; Kieran, 1981; McNeil et al., 2006; Reys et al., 2004), detta styrker än mer tesen om att lärarhandledningar måste bidra tydliga instruktioner för att säkerställa att elever får ett utförligt didaktiskt stöd från sina lärare. I denna studie saknar dock majoriteten av de undersökta lärarhandledningarna utförligt stöd gällande likhetstecknet. Li och kollegor (2008) fann för de amerikanska lärarhandledningar som undersöktes i deras studie att dessa gav ett undermåligt stöd. Det går alltså att se likheter i utbudet av stöd mellan de undersökta lärarhandledningarna i dessa två studier, vilket kan tänkas vara oroväckande, med tanke på amerikanska elevers resultat i Li och kollegors studie. Essien (2009) betonar att elever, hellre än att bara lära sig att använda likhetstecknet också måste få lära sig att förstå dess innebörd och betydelse i matematiska påståenden. För att faktiskt kunna förklara detta behöver lärare alltså få stöd. Skolverket (2017b) ger bara vaga förmaningar gällande svårigheter relaterade till likhetstecknet, men inget egentligt stöd, och väljer således att överlåta ansvaret för detta. Powells (2012) kommentar om att läromedelsförfattare utan större problem skulle kunna bidra lärarhandledningar med ett utförligt didaktiskt stöd blir här än mer aktuell. För som vi ser i resultatet i denna studie går det inte att räkna med ett utförligt didaktiskt stöd gällande likhetstecknet i svenska lärarhandledningar. Varifrån lärare förväntas få det nödvändiga didaktiska stödet kan vara väsentligt att undersöka vidare.

Resultatet visar i ett annat avseende att språkbruket kan variera mellan och ibland även inom läromedel. Powell (2012) betonar vikten av ett konsekvent språkbruk förknippat med likhetstecknet samt ihållande relationella definitioner (ex., *är lika med*, *de två sidorna har lika mycket/många*). Som vi kan se i resultatet skiljer sig ofta språkbruket mellan definitioner som ger en operationell antydning av likhetstecknet (såsom *blir lika* och *addera*) och mer relationella definitioner (såsom *är lika* och *hur många är det tillsammans*). De operationella definitionerna, menar Li och kollegor (2008), hjälper elever att snabbt få ut rätt svar i enkla additions- och subtraktionsproblem, men att de senare också kan

leda till missuppfattningar hos eleverna när de möter problem av icke-standardekvationstyper. Problematiken är tydlig, vare sig läromedel uteslutande använder operationella definitioner eller om de varvar dessa tillsammans med mer relationella definitioner. Dock garanterar inte heller de mer relationella definitionerna – om de skulle användas uteslutande – att elever får en korrekt förståelse för likhetstecknet, även om dessa är att föredra (Li et al., 2008). Essien (2009) argumenterar att korta definitioner i sig (oavsett om de är tydligt relationella eller ej) osannolikt skulle kunna befästa en korrekt förståelse för likhetstecknet. Istället är det sättet på vilket elever vanligtvis introduceras för likhetstecknet i läromedel som i slutändan tenderar att befästa och framställa likhetstecknet som en signal för att producera svar. Det är således av yttersta vikt att lägga märke till och diskutera hur olika skildringstyper i uppgifternas bildstöd kan komma att påverka elevers uppfattning gällande likhetstecknets innebörd. Essien (2009) varnar för att introducera likhetstecknet tillsammans med operatörer såsom plus- och minustecknet, eftersom dessa i grundläggande aritmetik mer eller mindre uteslutande fungera som en inbjudan till att utföra någonting. Med detta i åtanke kan vi alltså förstå att elevers uppfattning om likhetstecknet kommer ställas inför tydliga utmaningar då eleven möter uppgifter som också innehåller operatörer. Därtill bör vi minnas att upplägget av standardekvationer (*operation-vänster-sida*) i sig signalerar en beräkning (Capraro, Ding, Matteson, Capraro & Li, 2007). Det är nu väsentligt att betona om vikten av att kontinuerligt påminna elever om likhetstecknets faktiska funktion och innebörd (Carpenter & Levi, 2000; Powell, 2012). Om också bildstödet i en standardekvation tydligt skildrar en händelse (se figur 19, 20) kan det med stor sannolikhet antas att eleven riskerar att uppfatta likhetstecknet som en signal för att *svaret kommer härnäst* (Carpenter et al., 2003). Riskerna för att ett dynamiskt bildstöd ska förespråka och bidra till en operationell uppfattning om likhetstecknet är tydliga. På liknande sätt kan uppgifter i form av *räknehändelser* (se figur 21, 22) tänkas vara riskfyllda för elever som just börjar bilda sig en uppfattning av likhetstecknet. Denna typ av uppgifter omber uttryckligen eleven att behandla ekvationen som en operation. Därmed uppmanas eleven mer eller mindre att se på likhetstecknet som en signal för att exempelvis *göra något* eller att *svaret ska följa*, vilket är karaktäristiskt för en operationell uppfattning (Cobb, 1987; McNeil & Alibali, 2005; Sherman & Bisanz, 2009). Det är svårt att i denna studie säga vilken inverkan som språkbruk, dynamiskt bildstöd och räknehändelser faktiskt har på elevers uppfattningar om likhetstecknet men det är definitivt något som bör studeras vidare.

I resultatet ser vi en stor skillnad mellan förekomsten av icke-standardekvationstyper i introduktionsavsnitten och de påföljande uppslagen (se tabell 3). Kort sammanfattat kan omfattningen menas vara närmast obefintlig i de påföljande uppslagen, då bara en icke-standardekvationstyp (*operation-höger-sida*) finns att finna och det enbart i två av de fem undersökta elevarbetsböckerna (Pixel; Prima). Med detta resultat i åtanke är det av stor vikt att lyfta fram att icke-standardekvationer anses ha bäst kapacitet – eller rent av vara nödvändiga – för att främja en relationell förståelse för likhetstecknet (McNeil et al., 2006). Vilket skulle kunna bemötas med det faktum att resultatet i den här studien visar att olika icke-standardekvationer frekvent används i den explicita introduktionen av likhetstecknet och det av samtliga undersökta läromedel. Därtill går det att påpeka att två av fem läromedel (Pixel; Prima) också nyttjar standardekvationer i sin introduktion. Dock kan värdet av detta påpekande ifrågasättas eftersom standardekvationer i sig inte medför att elever bildar sig en operationell uppfattning om likhetstecknet, påpekandet skulle snarare varit relevant i det fall att elever uteslutande utsattes för standardekvationer (Baroody & Ginsburg, 1983; Capraro et al., 2007; Herscovics & Kieran, 1980; McNeil, 2008; McNeil et al., 2006). Li och kollegor (2008) diskuterar möjligheten att förståelsen för sådana kombinationer bl.a. kan vara det som positivt särskiljer kinesiska elever från amerikanska elever. Men för att återgå till och fullfölja det första resonemanget är det också nödvändigt att lägga märke att kontinuerligt arbete med likhetstecknet menas vara en

förutsättning för att rätta till och förhindra missuppfattningar om likhetstecknet (Carpenter & Levi, 2000; Powell, 2012). Powell (2012) betonar det som ett problem att många läromedel endast i låg utsträckning bidrar med icke-standardekvationer i elevernas arbetsböcker. Det räcker alltså inte bara med att använda icke-standardekvationer i den explicita introduktionen av likhetstecknet, för att därefter antingen uteslutande eller till mycket hög grad förlita sig på standardekvationer, vilket vi alltså ser i resultatet i denna studie (se tabell 3). Med detta i åtanke verkar det som att denna studie kan tänkas stödja Falkner och kollegors (1999) påstående om att det dessvärre inte tycks finnas någon uppenbar variation av hur likhetstecknet vanligtvis behandlas i grundskolan.

Avslutningsvis kan diskussionen kring resultatet sammanfattas med att introduktionen av likhetstecknet uppenbart inte enbart bör behandlas genom explicita introduktionsavsnitt i läromedel – för att sedan falla i skymundan – eftersom förståelse för likhetstecknet är kritiskt och något som tar mycket lång tid för elever att befästa.

5.2 Tillförlitlighet

Metoden i denna studie bygger på upplägg från tidigare forskning i ämnet (Charalambous et al., 2010; McNeil et al., 2006; Li et al., 2008), detta för att ge studien en välgrundad utgångspunkt. Det bör dock noteras, för kategoriseringen av uppgifter utifrån ekvationstyp, att denna studie endast använder en kodare, tillskillnad från McNeil och kollegor (2006) som använder två kodare för att öka sin tillförlitlighet. Här bör det dock tilläggas att McNeil och kollegor undersöker läromedel på högstadienivå (amerikansk middle school), medan läromedlen i denna studie tillhör det tidiga lågstadiet, med detta sagt går det att förstå att uppgifterna som undersöks i denna studie är mindre komplexa. Oavsett kan det vara nyttigt att uppmana läsaren att själv också bilda sig sin egen uppfattning om uppgifternas eventuella tillhörighet. Utöver kategoriseringen är det viktigt att notera att samtliga grupperingar i studiens resultat av uppgifter utifrån karaktärsdrag fungerar som förslag, och inte på något sätt påstås vara de enda möjliga grupperingarna, dessa fungerar snarare som en möjlig uppsättning grupper vilka anses vara av intresse för studien. Med det sagt motiveras varje gjord gruppering för att tillåta läsaren och andra forskare att jämföra och eventuellt testa/undersöka resonemang.

5.3 Relevans för undervisning och lärande

Med tanke på att läromedel i överlag fastställer hur och vad lärare lär ut om likhetstecknet (t.ex., Essien & Setati, 2006; McNeil et al., 2006; Reys et al., 2004) är det av stor relevans för lärare att kunna välja ett bra läromedel. Genom denna studie kan lärare öka sin förståelse för vad som är förknippat med och viktigt att veta om likhetstecknet samt hur det behandlas i några svenska läromedel. Därtill lyfter denna studie fram ett antal fynd som kan vara nödvändiga för lärare att se över för att elever mer effektivt ska kunna skapa sig en korrekt förståelse för likhetstecknet oavsett vilka läromedel som används.

5.4 Förslag på fortsatta studier

Det bör understrykas att trots att denna studie är mycket begränsad har ändå en rad viktiga fynd och upptäckter gjorts, fler än vad som hade förväntats. Med detta sagt är det av stor vikt att efterlysa djupare och mer omfattande forskning gällande likhetstecknet i svenska läromedel, där hela läromedel och samtliga uppgifter undersöks. Med upptäckten av de olika skildringstyperna i bildstöd kan det också vara nödvändigt att undersöka elevers intryck av och vilken påverkan olika skildringstyper har på deras uppfattning om likhetstecknet. Det skulle kunna vara nyttigt att forska kring hur elevnära bildstöd kan utformas mest effektivt. I frågan om varifrån lärare förväntas få det nödvändiga didaktiska stödet gällande likhetstecknet kan det även vara nödvändigt att intervjua lärare, lärarutbildare, läromedelsförfattare osv. Slutligen är det mycket viktigt – för lärare såväl som för framtida elever – att vi undersöker vad ett bra läromedel faktiskt menas utgöra, så att våra läromedel i framtiden på bästa sätt ska kunna försäkra ett utförligt didaktiskt stöd och korrekt förståelse för likhetstecknet såväl som för andra kritiska matematiska begrepp.

6. Referenslista

- Alseth, B. (2015a). *Pixel: [matematik]. 1A, Grundbok*. (2. uppl.) Stockholm: Natur & kultur.
- Alseth, B. (2015b). *Pixel: [matematik]. 1A, Lärarbok*. (2. uppl.) Stockholm: Natur & kultur.
- Baroody, A. J., & Ginsburg, H. P. (1983). The effects of instruction on children's understanding of the "equals" sign. *The Elementary School Journal*, 84(2), 199–212.
- Behr, M., Erlwanger, S., & Nichols, E. (1980). How children view the equals sign. *Mathematics Teaching*, 92(000), 13–15.
- Brorsson, Å. (2014). *Prima Matematik. 1A*. (2.,[utök.] uppl.) Malmö: Gleerups Utbildning.
- Brorsson, Å. (2015). *Prima Matematik 1 Lärarhandledning 2:a uppl.* (2 uppl.) Malmö: Gleerups Utbildning.
- Capraro, M. M., Ding, M., Matteson, S., Capraro, R. M., & Li, X. (2007). Representational implications for understanding equivalence. *School Science and Mathematics*, 107(3), 86–89.
- Carpenter, T. P., & Levi, L. (2000). *Developing Conceptions of Algebraic Reasoning in the Primary Grades. Research Report*. Madison, WI: University of Wisconsin-Madison, National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.
- Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking Mathematically: Integrating Arithmetic and Algebra in Elementary School*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Charalambous, C. Y., Delaney, S., Hsu, H. Y., & Mesa, V. (2010). A comparative analysis of the addition and subtraction of fractions in textbooks from three countries. *Mathematical Thinking and Learning*, 12(2), 117–151.
- Cobb, P. (1987). An investigation of young children's academic arithmetic contexts. *Educational Studies in Mathematics*, 18(2), 109–124.
- Essien, A. A. (2009). An analysis of the introduction of the equal sign in three Grade 1 textbooks. *Pythagoras*, 2009(69), 28–35.
- Essien, A., & Setati, M. (2006). Revisiting the equal sign: Some Grade 8 and 9 learners' interpretations. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, 10(1), 47–58.
- Falck, P., Picetti, M. & Elofsdotter Meijer, S. (2011). *Matte direkt. Safari. 1 A, Lärarhandledning*. (2. uppl.) Stockholm: Bonnier utbildning.
- Falck, P., Picetti, M. & Elofsdotter Meijer, S. (2013). *Matte direkt. Safari. 1A, Kikaren*. (1. uppl.) Stockholm: Sanoma utbildning.
- Falkner, K. P., Levi, L., & Carpenter, T. P. (1999). Children's understanding of equality: A foundation for algebra. *Teaching Children Mathematics*, 6(4), 232–236.
- Haapaniemi, S. (2012). *Favorit matematik. 1A, Lärarhandledning*. (1. uppl.) Lund: Studentlitteratur.
- Herscovics, N., & Kieran, C. (1980). Constructing meaning for the concept of equation. *The Mathematics Teacher*, 73(8), 572–580.
- Jacobs, V. R., Franke, M. L., Carpenter, T. P., Levi, L., & Battey, D. (2007). Professional development focused on children's algebraic reasoning in elementary school. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(3), 258–288.
- Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, 12(3), 317–326.
- Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M., & Alibali, M. W. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 37(4), 297–312.
- Li, X., Ding, M., Capraro, M. M., & Capraro, R. M. (2008). Sources of differences in children's understandings of mathematical equality: Comparative analysis of teacher guides and student texts in China and the United States. *Cognition and Instruction*, 26(2), 195–217.
- McNeil, N. M. (2008). Limitations to teaching children $2 + 2 = 4$: Typical arithmetic problems can hinder learning of mathematical equivalence. *Child Development*, 79(5), 1524–1537.

- McNeil, N. M., & Alibali, M. W. (2005). Knowledge change as a function of mathematics experience: All contexts are not created equal. *Journal of Cognition and Development*, 6(2), 285–306.
- McNeil, N. M., Grandau, L., Knuth, E. J., Alibali, M. W., Stephens, A. C., Hattikudur, S., & Krill, D. E. (2006). Middle-school students' understanding of the equal sign: The books they read can't help. *Cognition and Instruction*, 24(3), 367–385.
- Powell, S. R. (2012). Equations and the equal sign in elementary mathematics textbooks. *The Elementary School Journal*, 112(4), 627–648.
- Reys, B. J., Reys, R. E., & Chavez, O. (2004). Why Mathematics Textbooks Matter. *Educational Leadership*, 61(5), 61–66.
- Rinne, S. (2016a). *Mitt i prick matematik. 1 A*. (1. uppl.) Nacka: Majema!.
- Rinne, S. (2016b). *Mitt i prick matematik. 1 A, Lärarhandledning med facit*. (1. uppl.) Nacka: Majema!.
- Ristola, K., Tapaninaho, T. & Tirronen, L. (2012). *Favorit matematik. 1A*. Lund: Studentlitteratur.
- Seo, K.-H., & Ginsburg, H. P. (2003). "You've got to carefully read the math sentence...": Classroom context and children's interpretations of the equals sign. I A. J. Baroody & A. Dowker (Eds.), *Studies in Mathematical Thinking and Learning. The development of Arithmetic Concepts and Skills: Constructing adaptive expertise* (s. 161–187). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Sherman, J., & Bisanz, J. (2009). Equivalence in symbolic and nonsymbolic contexts: Benefits of solving problems with manipulatives. *Journal of Educational Psychology*, 101(1), 88–100.
- Skolverket (2011a). *Kommentarmaterial till kursplanen i matematik*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket (2011b). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket (2017a). *Kommentarmaterial till kursplanen i matematik: reviderad 2017*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket (2017b). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011: reviderad 2017*. Stockholm: Skolverket.

