Linköpings universitet | Matematiska institutionen
Konsumtionsuppsats, 15 hp | Ämneslärarprogrammet (7-9) - Matematik
Vårterminen 2018 | LiU-LÄR-MG-A--2018/9--SE

Elevers begreppsbilder av likhetstecknet

– En litteraturstudie om standard- och icke-standardekvationers påverkan vid användning i undervisningen

---

Students´ Concept Images of the Equal Sign
– A Literature Survey of the Impact of Standard and Non-Standard Equations When Used in Teaching

Fanny Hammarström

Handledare: Björn Textorius
Examinator: Peter Frejd

LINKÖPINGS UNIVERSITET

Linköpings universitet
SE-581 83 Linköping, Sweden
013-28 10 00, www.liu.se

LINKÖPINGS UNIVERSITET	Matematiska institutionen 581 83 LINKÖPING	Seminariedatum 2018 - 06 - 8

Språk (sätt kryss före) X Svenska/Swedish Engelska/English	Rapporttyp Examensarbete grundnivå	ISRN-nummer (fyll i löpnr) LIU-LÄR-L-EX--16/XX--SE

Titel
Elevers begreppsbilder av likhetstecknet – En litteraturstudie om standard- och icke-standardekvationers påverkan vid användning i undervisningen

Title
Students' Concept Images of the Equal Sign – A Literature Survey of the Impact of Standard and Non-standard Equations When Used in Teaching

Författare
Fanny Hammarström

Sammanfattning

Studien är en litteraturöversikt där standard- och icke-standardekvationers påverkan på elevers begreppsbilder samt hur frekvent dessa exponeras i läroböcker framställs. Elevers begreppsbilder av likhetstecknet diskuteras i relation till Sfards teoretiska ramverk för att kunna resonera om hur elevers begreppsbilder vidareutvecklas. Resultaten belyses med exempel kopplade till litteraturen.

Det har visat sig att elever ofta har en operationell syn på likhetstecknet. Elever ser likhetstecknet som en ”uppmaning att göra någonting”. *Icke-standardekvationer* med *operationer i både V.L. och H.L.* (t.ex. 2 + 3 = __ + 1) har visat sig reducera elevers operationella begreppsbild likhetstecknet och istället förstärka en strukturell begreppsbild av det. Däremot förekommer sådana uppgifter sällan i läroböcker medan *standardekvationer* (t.ex. 2 + 3 = __) förekommer mer frekvent. Därför är det av vikt att lärare reflekterar över vilka uppgifter som exponeras för eleverna samt kompletterar undervisningen med ytterligare icke-standardekvationer utöver de som förekommer i läroböckerna om dessa är få.

Nyckelord

Likhetstecken, Begreppsbild, Ekvationer, Läromedel, Matematik

Innehållsförteckning

1. Inledning

Enligt Skolverket (2011a) ska elever lära sig likhetstecknets betydelse redan i årskurs 1-3, men likhetstecknets betydelse och användning missuppfattas ofta av elever i grundskolan (Powell, 2012). Mina erfarenheter under verksamhetsförlagd utbildning är att många elever i årskurserna 7-9 har svårigheter att hantera likhetstecknet, i synnerhet när de ska lösa ekvationer. Bergsten, Häggström och Lindberg (1997) framhåller också vikten av elevers förståelse för likhetstecknet vid ekvationslösning. Det är därför av intresse att ta reda på vilka begreppsbilder elever har om likhetstecknet eftersom att dessa påverkar elevers förmåga att förstå och lösa ekvationer (Bergsten et al, 1997).

Algebra är ett område inom matematiken som för många är synonymt med bokstavsräkning. En sådan inställning till algebra är procedurinriktad och fokuserar på att man ska utföra vissa manipulationer för att få fram ett svar. En möjlig anledning till det är att aritmetikundervisningen, som introduceras före algebraundervisningen, ofta stärker elevers bild av att likhetstecknet är ”symbolen innan svaret” genom att låta dem räkna uppgifter av typen 1 + 2 = __, där beräkningen sker i vänster led och svaret står i höger led. Om eleven inte exponeras för andra typer av uppgifter som exempelvis __ = 1 + 2 är det inte överraskande att eleven uppfattar likhetstecknet som en uppmaning att utföra en beräkning i vänster led och få fram ett svar i höger led (Bergsten et al, 1997).

För att kunna förstå ekvationer och ekvationslösning är det nödvändigt att eleven kan tolka likhetstecknet som *är lika mycket med* eller *är lika mycket som* (Bergsten et al, 1997). Forskning kring hur elever uppfattar och löser ekvationer visar på att elevens begreppsbild av likhetstecknet spelar stor roll. Elever som uppfattar likhetstecknet som en symbol som alltid följs av svaret på en beräkning kommer att har svårare att förstå och lösa ekvationer. Dessa elever kan ofta lösa ekvationen 4 + x = 13 medan ekvationen 13 = 4 + x uppfattas som svårlöst. Elevers begreppsbilder av likhetstecknet påverkar alltså deras förståelse för algebra och därför är det av stor vikt att undervisningen bidrar till ökad förståelse för likhetstecknets betydelse (Bergsten et al, 1997). Därför undersöker denna studie hur olika typer av ekvationer påverkar elevers begreppsbild av likhetstecknet samt hur frekvent de olika typerna av ekvationer exponeras i läroböcker.

2. Bakgrund

I avsnittet definieras i arbetet använda begrepp och det teoretiska ramverket presenteras. I studien utgår jag från Sfards teoretiska ramverk för begreppsbilder eftersom det även beskriver utvecklingen av en individs begreppsbild. Detta är relevant eftersom att det dels ger en förståelse för hur begreppsbilder utvecklas, dels för att resultaten kan problematiseras utifrån ramverket på ett givande sätt.

2.1 Vad betyder likhetstecknet?

Enligt Nationalencyklopedin (2018) är *likhetstecknet* en symbol (=) som beskriver att två uttryck har samma värde, exempelvis 2x = 6. Ekvationen som bildas av de två uttrycken syftar till att 2x *är lika mycket värt som* 6. Vidare skriver också Bergsten et al. (1997) att likhetstecknet ska tolkas som *är lika med* eller *lika mycket som*, vilket innebär att uttrycket som står till vänster om likhetstecknet är lika mycket värt som uttrycket som står till höger om likhetstecknet (V.L. = H.L.). Tolkningen gör för det första att en ekvation kan läsas från vänster till höger och vice versa och för det andra innebär den att uttrycken är likvärdiga, alltså ekvivalenta (Bergsten et al, 1997).

2.2 Begreppsförståelse och begreppsbilder – ur ett skolperspektiv

I grundskolan ska elever utveckla fem olika matematiska förmågor. B*egreppsförmågan* är en av dem (Skolverket, 2011b). Begreppsförmågan innebär elevers förståelse och användning av olika begrepp, t. ex likhetstecknet. Elever ska kunna definiera begreppet likhetstecken, förstå dess egenskaper och användbarhet samt redogöra för relationen med andra matematiska begrepp. Den sistnämnda punkten gör att elever kan förstå samband mellan olika begrepp, vilket skapar en helhet för förståelsen för matematik (Skolverket, 2011b). *Begreppsbilder* används när en elever utvecklar sin begreppsförmåga. Det är bilden eleven har om ett visst begrepp samt hur den uppfattar begreppet (Häggström, 2008). En begreppsbild består av alla kognitiva strukturer i en individs minne som associeras med ett specifikt begrepp, exempelvis likhetstecknet eller negativa tal. En individs begreppsbild byggs upp och förändras över tid som en konsekvens av individens mognad och erfarenheter av begreppet. Exempel: När en individ stöter på begreppet subtraktion används oftast positiva heltal och individen lär sig att en subtraktion reducerar svaret. En sådan begreppsbild kommer ställa till kognitiva konflikter i framtiden när individen upptäcker att en subtraktion kan mynna ut i negativa tal. På det sättet kommer alla mentala attribut och erfarenheter, medvetet eller omedvetet, att förändra individens ursprungliga begreppsbild av subtraktion och då också bli en del av individens nya begreppsbild av det (Tall & Vinner 1981). Stycket nedan förklarar Sfards teoretiska ramverk mer utförligt.

2.3 Sfards teoretiska ramverk för begreppsbilder

Sfards (1991) teoretiska ramverk för hur individers operationella och/eller strukturella begreppsbilder fungerar och byggs upp är relevant för att förstå hur elever tolkar likhetstecknet och hur eleverna kan gå från att tolka likhetstecknet operationellt - som en process, till strukturellt – som ett objekt. Att ha en *strukturell begreppsbild* innebär att individen ser ett matematiskt begrepp som ett objekt – en statisk struktur som existerar och är självständig som individen känner igen och kan se som en helhet utan att behöva gå in på detaljer. Att ha en *operationell begreppsbild* innebär att individen ser ett matematiskt begrepp som en process, algoritm eller handling – en dynamisk struktur som är kontextberoende där individen kommer att fokusera på detaljer snarare än helheten. Sfard (1991) motiverar att abstrakta begrepp så som likhetstecknet, ett tal eller en funktion kan uppfattas på antingen operationell eller strukturellt genom analys av olika matematiska definitioner och representationer. Sfard (1991) argumenterar för att de två olika typerna av begreppsbilder kan närma sig varandra, men de är också strängt oförenliga samtidigt som de är komplementära och hierarkiska. Alltså, det strukturella synsättet är mer abstrakt än det operationella synsättet, och utifrån ett filosofiskt perspektiv är likhetstecknet, tal och funktioner inget annat än processer då de inte är materiella ting, de existerar endast i form av mentala bilder. Utifrån denna beskrivning är det rimligt att föreställa sig att den operationella begreppsbilden måste konstrueras före den strukturella begreppsbilden eftersom att det är enda sättet att ”komma i kontakt” med abstrakta strukturer överhuvudtaget (Sfard, 1991). Hur ska en individ förstå likhetstecknets relationella betydelse, när likhetstecknet filosofiskt sett inte är något annat än en påhittad symbol, utan att undersöka det operationella användandet av den?

Med grund i ovanstående argument har Sfard (1991) skapat en modell för hur individer går från att ha en operationell till en strukturell begreppsbild. Modellen utgör tre faser: internalisering (interiorization), kondensering (condensation), objektifiering (reification), vilka är hierarkiska. Alltså, individen måste först uppnå fas ett – internalisering - för att sedan kunna uppnå fas två – kondensation – för till sist uppnå tredje fasen objektifiering (Sfard, 1991). Nedan förklaras de tre olika faserna.

Internalisering innebär att individen blir bekant med en process (exempelvis subtraktion som ger negativa tal) vilken så småningom ger upphov till ett nytt begrepp (negativa tal). Processen är en beräkningsoperation av enklare matematiska uppsättningar (t.ex. 2 – 3 = -1). En individ har uppnått internalisering när den kan se negativa tal som en självständig kategori utan att behöva utföra en subtraktion för att förstå att negativa tal existerar. Alltså, vid internalisering blir en individ bekant med ett begrepp genom att utföra operationer eller processer på matematiska uppsättningar (Sfard, 1991).

Kondensering är fasen individer befinner sig i längst. Här är individen mer angelägen att se en given process som en helhet snarare än att känna behov av att fokusera på detaljer. Individen kan hantera ett större givet problem genom att dela upp långa frekvenser till mindre och mer hanterbara delar. Vissa processer autonomiseras, vilket innebär att individen refererar processen i termer av ”input-output-relationer” snarare än att se den som operationer som ska utföras. Individen utvecklar förmågan att kunna växla mellan olika representationer av begreppet samt jämföra och generalisera begreppets betydelse och funktion. Vid kondensering utvecklar individen exempelvis förmågan att utföra aritmetiska manipuleringar som att addera eller multiplicera negativa och positiva tal (t.ex. -2 + -2 = -4), vilket innebär att individen utvecklat förmågan att kombinera de underliggande processerna (t.ex. addition) med andra beräkningsoperationer (t.ex. addera två negativa tal). Som nämnts ovan varar kondenseringsfasen under lång tid och går inte över förrän individen helt gått från att koppla en viss process till ett visst begrepp till att se begreppet som ett objekt i sig, alltså när begreppet blivit objektifierat, vilket leder oss in på den tredje och sista fasen - objektifiering (Sfard, 1991).

Objektifiering innebär att individen utvecklar förmågan att se begreppet från ett helt nytt perspektiv. Individen uppfattar ett begrepp (negativa tal) som totalt självständigt och processen (subtraktion) som gav upphov till begreppet är nu helt avskilt från det. Alltså, begreppet utgör nu en helt ny mening för individen eftersom att det är medlem i en helt ny kategori. Till slut kommer den nya kategorin vara basen för hur begreppet tolkas, som ett objekt i sig självt, vilket i sin tur ger individen förmågan att undersöka allmänna egenskaper hos begreppet samt förstå olika representationer av det och relationer där emellan. Till skillnad från internalisering och kondensering, vilka är gradvisa och kvantitativa förmågor, beskrivs objektifiering som en kvalitativ förmåga där individen ser ett begrepp som en statisk struktur. Det abstrakta begreppet har nu en mening för individen som använder sig av det (Sfard, 1991).

Kopplat till en individs förståelse för begreppet likhetstecken kan dessa tre faser se ur på följande sätt: 1) internalisering – en individ kommer i kontakt med begreppet likhetstecken genom att utföra aritmetiska manipulationer (t.ex. 1 + 2 = __), och utvecklar på så sätt förståelse för att likhetstecknet existerar. Individer som inte kommer vidare till fas två kommer att behålla en operationell syn på likhetstecknet och på så sätt missuppfatta den verkliga betydelsen av det; 2) kondensering – individen utvecklar förmågan att använda likhetstecknet i olika representationer av uppgifter och kan lösa mer komplexa uppgifter med hjälp av begreppet (t.ex. $2x + 3 = 5 \leftrightarrow 2x = 2 \leftrightarrow x = 1$). Individen förstår likhetstecknets relationella betydelse, men kan inte se likhetstecknet som en statisk struktur; 3) objektifiering – individen har nu utvecklat förmågan att se likhetstecknet som ett totalt självständigt begrepp och alla aritmetiska manipulationer som gett upphov till begreppet är nu helt avskilt från det. Individen kan använda likhetstecknet i olika sammanhang på ett självsäkert sätt eftersom att begreppet i sig självt utgör en mening för individen som använder sig av det (Sfard, 1991; Vermeulen & Meyer, 2017).

2.4 Standard- resp. icke-standardekvationer

I uppsatsen tolkas elevers begreppsbilder av likhetstecknet med hjälp av en kategorisering av uppgifter A = B som standardekvationer och icke-standardekvationer (McNeil, Grandau, Knuth, Alibali, Stephens, Hattikudur, & Krill, 2006). Uppgiften A = B kallas standardekvation (SE) om vänsterledet A men inte högerledet B innehåller operationer; exempel: 2 + 3 = 5, 2 + 3 = __, 2 + 3 = [ ], annars kallas uppgiften för en icke-standardekvation (ISE); exempel: 5 = 2 + 3, 8 = 8, 5 = 2x + 3. Uppgiften A = B kallas alltså en icke-standardekvation om både A och B innehåller operationer, om endast B innehåller operationer eller om varken A eller B innehåller operationer. SE och ISE kan bestå av antingen aritmetiska eller algebraiska ekvationer (McNeil et al, 2006). Tabellen nedan visar en sammanställning av olika typer av SE och ISE samt exempel med tillhörande förklaring.

Tabell 1 – Sammanställning av olika typer av SE och ISE (Min tolkning av McNeil et al, 2006)

SE/ISE	**ARE/ALE**	**Exempel**	**Förklaring**
Standardekvation (SE)	Aritmetisk ekvation	2 + 3 = 5 2 + 3 = __ 2 + 3 = [ ]	Endast operationer i V.L.
	Algebraisk ekvation	2 + 3 = x 2x + 3 = 5 4x = 12	Endast operationer i V.L.

Icke-standardekvation (ISE)	Aritmetisk ekvation	2 + 3 = 4 + 1 2 + 3 = __ + 1 2 + 3 = [ ] + 1	Operation i V.L. och H.L.
		5 = 2 + 3 __ = 2 + 3 [ ] = 2 + 3	Operation i H.L.
		8 = 8 3 = 3	Ekvation utan operation
		”Använd <, =, eller > för att fullborda påståendet” T.ex. 2 < 5	Ingen ekvation
	Algebraisk ekvation	2 + 3 = x + 1 3x + 6 = 2x	Operation i V.L. och H.L.
		12 = 4x y = 2x	Operation i H.L.
		x = x y = x	Ekvation utan operation
		”Använd <, =, eller > för att fullborda påståendet” T.ex. 2x < 5x	Ingen ekvation

3. Syfte och frågeställningar

Syftet med studien är att undersöka vilka typer av aritmetiska och algebraiska ekvationer, som är fördelaktiga att använda i undervisningen för att befrämja att elever utvecklar sin begreppsbild av likhetstecknet, som kan förebygga missuppfattningar och stödja deras fortsatta lärande i matematik.

Frågeställningar:

1. Vilken begreppsbild av likhetstecknet är mest frekvent förekommande hos elever?
2. Vilken påverkan har användning av standard- och icke-standardekvationer i undervisningen på elevers begreppsbild av likhetstecknet?
3. Hur frekvent presenteras standard- och icke-standardekvationer i läroböcker?

4. Metod

För att kunna svara på frågeställningarna görs en systematisk litteraturstudie. Litteraturstudien bygger på andras studier och innehåller flera steg: 1) urvalsmetod, 2) datainsamlingsmetod, 3) litteratursökning och 4) analys av vald litteratur (Eriksson Barajas, Forsberg, Wengström, 2013). Följande kapitel är uppdelat i två delar: 4.1 litteratursökning och 4.2 Litteraturanalys. *Litteraturundersökningen* innehåller steg 1-3 medan *litteraturanalysen* innehåller steg 4.

4.1 Litteratursökning

Litteraturen som används i studien har dels hittats genom databassökning och dels genom manuell sökning. En databassökning innebär att litteratur söks via en eller flera databaser och en manuell sökning innebär att litteratur hittas genom att undersöka andra studiers referenslistor (Eriksson Barajas et al, 2013). Litteraturen som använts till studien har hittats via två olika databaser: 1) Unisearch, 2) ERIC, *Educational Resources Information Center*. Unisearch är en sökmotor som består av flera databaser. I Unisearch finns allt från artiklar till e-böcker att finna vilket gör att det finns mycket litteratur att välja på. ERIC är en bred databas som täcker pedagogik och psykologi. Den innehåller böcker, tidskriftsartiklar, avhandlingar m.m. (Eriksson Barajas et al, 2013).

4.1.1 Sökord

I litteraturstudien har jag använd både engelska och svenska sökord:

- De engelska sökorden jag har använt är:
  - equal sign*, high school*, elementary school*, algebraic equation*, misconcpetions*, students misconceptions, equivalence*, conception image*, textbooks*, conceptions*, structural conception*, operational conception*
- De svenska sökorden jag har använt är:
  - likhetstecken*, ekvivalens*, operationell begreppsbild*, strukturell begreppsbild*, begreppsbild*, läroböcker*

Jag har sökt litteratur med både engelska och svenska sökord för att vidga sökresultaten vilka kan ge mig större förståelse och mer givande svar på mina frågeställningar. Jag har valt att inte använda några svenska artiklar på grund av att dessa inte uppfyllde mina urvalskriterier (se 4.1.2) samt inte svarade på mina frågeställningar (se 3).

4.1.2 Urvalskriterier

De avgränsningarna jag gjorde var:

- Litteraturen ska vara peer-reviewed, för att säkerhetsställa vetenskapligheten på artikeln
- Litteraturen ska vara tidigast från år 2000, för att öka relevansen av artikelns innehåll
- Litteraturen ska vara skriven på engelska eller svenska, för att jag ska kunna analysera innehållet på ett konsekvent sätt
- Litteraturen ska innehålla information om begreppsbilder (första kriteriet) samt uppfylla minst ett av de två resterande kriterierna för att frågeställningarna ska kunna besvaras. Den skall alltså:
  - utförligt förklara vad begreppsbilder är och hur dessa fungerar

- behandla kvantitativa och/eller kvalitativa elevundersökningar där elevernas begreppsförmåga av likhetstecknet testas eller elevers begreppsbilder av likhetstecknet undersöks
- innehålla en utförlig läromedelsanalys där minst 10 läroböcker analyseras.

4.1.3 Litteratursökning

Nedan presenteras en litteratursökningsmatris som redogör för hur sökningarna av de valda artiklarna har gått till. Jag valde att ha med Kieran (1981) och Sfard (1991), trots att dessa artiklar var äldre än vad mitt urvalskriterium tillät eftersom de var relevanta för min studie. Kieran (1981) behandlar elevers olika begreppsbilder av likhetstecknet med tydliga exempel. Sfard (1991) valde jag att använda som teoretiskt ramverk eftersom det beskriver vilka begreppsbilder som finns och hur dessa uppstår på ett ingående sätt.

Tabell 2 – Litteratursökningsmatris

Sökord	Avgränsningar	Antal träffar	Utvalda artiklar	Databas	Typ av sökning
Equal sign AND Students misconceptions	Peer reviewed Från 2000 – 2018 Full Text	22	Vermeulen & Meyer (2017) Powell (2012)	Unisearch	Databassökning
Equal sign* Textbooks*	Peer reviewed	6	McNeil et al. (2010)	ERIC	Databassökning
Equal sign AND Structural conception* AND Operational conception*	Peer reviewed Från 2000 – 2018 Full Text	10	Machaba (2017)	Unisearch	Databassökning
Concepts associated with the equality symbol	Peer reviewed Från 1980 – 2018 Full Text	6	Kieran (1981)	Unisearch	Manuell sökning; referensen hittades i alla andra artiklar
On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin	Peer reviewed År 1991	3	Sfard (1991)	Unisearch	Manuell sökning; referensen hittades i 2 av de andra artiklarna; Machaba (2017) och Vermeulen & Meyer (2017)

4.2 Litteraturanalys

Litteraturanalysen utgick från Eriksson et al. (2013) analysmetoder för systematiska litteraturstudier. Metoden omfattar granskning av resultaten genom att dela upp dessa i mindre delar för att sedan kunna sammanställa de viktiga delarna av resultaten för att forma ett slutresultat. Genom att selektera de viktiga delarna av varje artikel (se 5.1) kunde en resultatsammanfattning (se 5.2) analyseras fram med syfte att visa på likheter och skillnader mellan de valda artiklarna. En kort sammanfattning om hur urvalet och analysen av artiklarna har genomförts presenteras i 4.2.1. En mer utförlig analys av varje artikel samt en resultatsammanfattning presenteras i 5.1 respektive 5.2.

4.2.1 Analysprocessen

De träffar, som databassökningen gav, behandlades på följande sätt. Först granskades alla artiklarnas titlar, och sammanfattningarna av de artiklar, vilkas titlar var relevanta i relation till forskningsfrågorna, lästes. Om dessa sammanfattningar var relevanta granskades artiklarnas metod, resultat och diskussion, om sådana fanns, annars granskades texten utifrån rubrikernas innehåll. Denna process resulterade i de sex artiklarna i tabell 2, vilka lästes flera gånger.

Den första läsningen var översiktlig och idéer och frågor, som då uppstod, antecknades. I den andra, noggranna läsningen markerades relevanta stycken och flera idéer och frågor antecknades. Efter den tredje, sista, läsningen sammanställdes en omfattande sammanfattning av varje artikel, innehållande även ovanstående idéer och frågor.

Dessa sammanfattningar analyserades genom att där söka svar på forskningsfrågorna:
1. Vilken begreppsbild av likhetstecknet är mest frekvent förekommande hos elever?
2. Vilken påverkan har användning av standard- och icke-standardekvationer i undervisningen på elevers begreppsbild av likhetstecknet?
3. Hur frekvent presenteras standard- och icke-standardekvationer i läroböcker?

De funna svaren kategoriserades i tre kategorier, så att kategori K(n) innehåller svar på forskningsfråga n, n = 1, 2, 3. Nedan presenteras en sammanställning av de utvalda artiklarna kategoriserade efter vilken eller vilka forskningsfrågor de besvarade.

Tabell 3 – Sammanställning av utvalda artiklar samt kategoriseringar enligt 5.1

Författare	Årtal	Titel	Sammanfattning	K(n)
Kieran	1981	Concepts associated with the equality symbol	En metastudie om hur elever tolkar likhetstecknet från förskola till universitetsnivå.	n = 1
Machaba	2017	Grade 9 Learners' Structural and Operational Conceptions of the Equal Sign: A Case Study of Secondary School In Soshanguve	En redogörelse för hur 49 elever i årskurs nio uppfattar begreppet likhetstecknet och hur de rör sig från aritmetiska till algebraiska ekvationer.	n = 1
McNeil, Grandau, Knuth, Alibali, Stephens, Hattikudur & Krill	2010	Middle-School Students' Understanding of the Equal Sign: The Books They Read Can't Help	Läromedelsanalys vilken undersöker frekvensen av SE och ISE i 4 olika läroboksserier. Undersöker också hur SE och ISE påverkar	n = 1 n = 2 n = 3

			elevers begreppsbilder av likhetstecknet.	
Powell	2012	Equations and the equal sign in elementary mathematics textbooks	Läromedelsanalys vilken undersöker frekvensen av SE och ISE i 48 olika läroboksserier.	n = 3
Sfard	1991	On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin	Beskriver olika begreppsbilder samt hur dessa uppkommer hos individer	Används som teoretiskt ramverk
Vermeulen & Meyer	2017	The Equal Sign: Teachers' Knowledge and Stundents' Misconceptions	En studie om elevers och lärares missförståelser av likhetstecknets betydelse.	n = 1

5. Analys och resultat

I resultatet presenteras först artikelsammanfattningar av de valda artiklarna som en del av analysen av dem. Det ger läsaren möjlighet att både få utförlig information om artiklarna och kontrollera min analys. Sedan presenteras en resultatsammanfattning vilken innehåller en sammanställning och analys av artiklarnas resultat kopplade till mina frågeställningar.

5.1 Artikelsammanfattningar

5.1.1 Kieran (1981) - Concepts associated with the equality symbol

Kieran (1981) belyser frekvensen av elevers operationella syn på likhetstecknet genom en metastudie som undersöker vad tidigare forskning visar angående elevers användning av likhetstecknet samt underliggande begrepp som likvärdighet och icke-ekvivalens. Studien omfattar elever i förskola, grundskola, gymnasieskola och universitetsstudenter.

När eleverna börjar förskolan eller befinner sig i början av grundskolan (5 – 11 år) brukar addition (+) och subtraktion (-) och likhetstecknet (=) vara det första aritmetiska symbolerna som introduceras. Dessa symboler tolkar eleverna operationellt, alltså en uppmaning att utföra någonting. Tabellen nedan är en sammanställning på elevers olika sätt att tolka likhetstecknet på.

Tabell 5 – Elevers tolkningar av likhetstecknet (Min tolkning av Kieran, 1981)

Aritmetisk ekvation	Respons från elever
3 + 5 = __	”Likhetstecknet betyder att talen läggs ihop” ”3 och 5 blir 8”
__ = 3 + 5	”Blank är lika med 3 + 5” ”Det är baklänges! Det ska stå 3 + 5 = __”
8 = 8	Elever upplever påståendet som falskt eftersom att det inte finns en beräkning att göra
4 + 5 = 3 + 6	”Efter likhetstecknet ska svaret stå. Det är slutet, inte ett till problem, 4 + 5 = 9 och 3 + 6 = 9”

Tabellen ovan visar att elever i förskolan eller första åren i grundskolan (5 – 11 år) ofta missuppfattar likhetstecknet strukturella betydelse. För det första tror vissa elever att ”likhetstecknet betyder att talen läggs ihop” vilket är en tydlig operationell syn på likhetstecknets betydelse från elevernas sida. För det andra läses 3 + 5 = 8 som ”3 och 5 blir 8” vilken återigen är ett bevis på elevernas operationella syn på likhetstecknet. För det tredje tycker de att __ = 3 + 5 står baklänges och ändrar till 3 + 5 = __. För det fjärde förstår de inte relationen mellan 4 + 5 = 3 + 6 utan menar att efter 4 + 5 kommer svaret, inte en till beräkning. De räknar därför V.L. för sig och H.L. för sig och gör sedan en jämförelse mellan dem. För det femte har elever i förskolan och elever i början av grundskolan svårt att se påståendet ”8 = 8” som sant. De påstår att det är ett falskt påstående eftersom att de inte finns någon beräkning att göra.

Elever i gymnasiet och på universitetet använder också likhetstecknet felaktigt. De har ofta kvar sin operationella syn på likhetstecknet upp i åldrarna. Nedan presenteras två exempel, det första är ett exempel från en elev som studerar på gymnasiet, det andra är ett exempel från en elev som studerar på universitetet. De gör samma misstag i användningen av likhetstecknet när de redovisar sina lösningsförslag, men uppgifterna är olika.

Gymnasieskola:

”x + 3 = 7
= 7 – 3
= 4 ”

(Kieran, 1981, s. 323)

Universitet:

”$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

$= (x^2 + 1)^{1/2}$

$= \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-1/2} D_x (x^2 + 1)$

$= \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-1/2} (2x)$

$= x(x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}$

$= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$”

(Kieran, 1981, s. 324)

Användningen av likhetstecknet i exemplen ovan skapar falska likheter där V.L. ≠ H.L. Det kan finnas två möjliga anledningar till att elever väljer att göra på detta sätt. Antingen försöker eleven att ta en ”genväg” för att slippa skriva ut V.L. i varje steg, eller är det elevens avsaknad av förståelse för likhetstecknets relationella betydelse, alltså att V.L. = H.L., som gör att misstaget begås. Oavsett vilket av dessa två alternativ som är anledningen till missförståelsen, bevisar de att eleven har kvar sin operationella syn på likhetstecknet – ”en signal att göra något för att få fram svaret”.

Artikelns resultat kategoriseras som K(1).

5.1.2 Machaba (2017) - Grade 9 Learners’ Structual and Operational Conceptions of the Equal Sign: A Case Study of a Secondary School in Soshanguve

Machaba (2017) har gjort en empirisk fallstudie studie på hur 49 elever i årskurs 9 förstår och tolkar likhetstecknet samt hur övergången från aritmetiska- till algebraiska ekvationer går till i relation till likhetstecknet. Studien bestod av en kvantitativ och en kvalitativ del. Alla 49 elever svarade på en enkät som innehöll matematiska uppgifter indelade i tre olika kategorier, 1) aritmetiska ekvationer 2) algebraiska ekvationer och 3) aritmetiska matematiska påståenden, varav denna litteraturstudie endast analyserar de två första kategorierna eftersom att den tredje kategorin inte kan placeras under verken SE eller ISE. Av dessa 49 elever valdes 8 elever ut för en intervju. Studien visade att en stor del av eleverna dels tolkade likhetstecknet operationellt, alltså en implikation på att ”göra någonting” eller ”ge ett svar”, och dels som ett enkelriktat tecken, alltså att ”proceduren görs i V.L. och svaret står i H.L.”. Tabellen nedan visar ett utdrag av exempel kopplat till den kvantitativa enkätundersökningen.

Tabell 4 – Sammanställning av ARE och ALE (Min tolkning av Machaba, 2017)

Typ av uppgift	**Exempel**	**Korrekt svar (antal)**	**Korrekt svar (procent)**	**Inkorrekt svar (antal)**	**Inkorrekt svar (procent)**	**Analys av inkorrekta svar**
Aritmetisk ekvation	4 + 5 = [ ] – 1 (ISE)	28	57 %	21	43 %	Svar 9 (10) Svar 8 (9) Svar 5 (1) Svar 1 (1)
Algebraisk ekvation	7 + *n* = 6 + 9 (ISE)	12	24 %	37	76 %	N= 22 eller 22n (14) N= 15 eller 15n (5) N= 16 eller 16n (4) N= annat (14)

Resultatet av den kvantitativa datan visade att eleverna hade svårare att lösa algebraiska ekvationer än aritmetiska ekvationer. Resultatet kan vara en konsekvens av att många elever inte tolkar likhetstecknet strukturellt, utan operationellt. I exemplet av den aritmetiska ekvationen 4 + 5 = [ ] – 1 svarade 43 % av eleverna fel varav 34 % gav svaret 9 eller 8. De elever som gav svaret 9 uppfattade likhetstecknet som ”en uppmaning att ge ett svar” eftersom att de adderade 4 + 5 i V.L. men ignorerade -1 i H.L. De elever som gav svaret 8 uppfattade likhetstecknet på samma sätt, men efter adderingen av 5 och 4 subtraherade de 1, alltså 4 + 5 = 9 – 1 = 8, vilken är en falsk likhet där V.L. ≠ H.L. De två svaren visar på att eleverna haft en operationell syn på likhetstecknet och på så sätt missuppfattat den strukturella betydelsen av det. Dessa elever tolkade likhetstecknet som ”svaret blir” och hade inte förståelsen för den relationella betydelsen av likhetstecknet, alltså att V.L. = H.L.

Resultatet från elevsvaren av den algebraiska ekvationen 7 + *n* = 6 + 9 exponerade elevers okunskap angående förståelsen för likhetstecknets betydelse samt oförmågan att lösa algebraiska ekvationer. 14 av 49 elever gav svaren 22 eller 22n, 5 av 49 elever gav svaret 15, 4 av 49 elever gav svaren 16 eller 16n, och 14 andra elever gav ett felaktigt svar som inte kunde kodas av. Eleverna hade en operationell begreppsbild av likhetstecknet.

Eleverna kunde inte heller se sambandet mellan aritmetiska ekvationer och algebraiska ekvationer, utan menade att ”boxen” i första exemplet betyder att ett svar ska ges och ”variabeln n” i andra exemplet betyder att n ska lösas ut. Eleven såg alltså inga likheter mellan de två ekvationstyperna. En annan elev ansåg att de två uppgifterna var olika eftersom att den ena hade en ”box” och den andra hade ett ”n” och menade då att det inte fanns något samband mellan de två symbolerna.

Intervjuerna med de 8 eleverna som valdes ut förstärkte resultatet ovan, alltså att elever ofta ser likhetstecknet operationellt, men gav också förklaringar på hur eleverna misstolkat likhetstecknet. Nedan följer ett utdrag från en av intervjuerna där en elevs (L5) tolkning av likhetstecknets betydelse exponeras genom att eleven förklarar sin tankegång kring sin lösning av den aritmetiska ekvationen 4 + 5 = [ ] - 1.

Researcher: Okay, what does the equal sign mean? What does it tell you?

L5: It tells me to give an answer for 4 plus 5, which is 9.

Researcher: Okay, but there is -1 on the right-hand side of this equation, where did you take it to?

L5: No, I did not use it because it is not part of an answer.

(Machaba, 2017, s. 7250)

Här exponeras L5:s operationella syn på likhetstecknet samt avsaknaden av den relationella betydelsen av den. L5 menar att den negativa 1 i den aritmetiska ekvationen 4 + 5 = [ ] – 1 ”inte är en del av svaret”, utan att det räcker att addera 4 + 5 = 9 eftersom att likhetstecknet är en indikation på att ”ett svar ska ges på additionen 4 + 5”.

Artikelns resultat kategoriseras som K(1).

5.1.3 McNeil, Grandau, Alibali, Stephens, Hattikudur, och Krill (2006) - Middle-School Students' Understanding of the Equal Sign: The Books They Read Can't Help

McNeil et al, (2006) har gjort en läromedelsanalys där 4 olika matematikboksserier, gjorda för elever i årskurs 6-8, analyserats utifrån hur likhetstecknet presenteras. Vid läromedelsanalysen valdes slumpartat 50 % av sidorna i varje lärobok ut. Därefter undersöktes hur likhetstecknet representerades och de olika representationerna av likhetstecknet kategoriserades utifrån nedanstående typer av ekvationer.

Tabell 8 – Olika typer av standard- och icke-standardekvationer (Min tolkning av McNeil et al, 2006)

Typ av ekvation	**Exempel**	**Definition**
1) Standardekvationer	3 + 4 = 7 2x + 5 = 7 3 + 4 = __ 3 + 4 = x	Endast operationer i V.L.
2) Icke-standardekvationer		Alla uppgifter som inte innehåller standardoperationer
2A) Operationer i både V.L. och H.L.	3 + 4 = 5 + 2 3x + 6 = 2x	Operationer i både V.L. och H.L.
2B) Andra icke-standardoperationer	7 = 3 + 4 7 = 7 y = 2x	
2B1) Ekvationer med operationer i H.L.	7 = 3 + 4 y = 2x	Endast operationer i H.L.
2B2) Ekvationer utan operationer	7 = 7 x = y	Inga operationer i verken V.L. eller H.L.
2B3) Inga ekvationer	”Använd <, =, eller > för att fullborda påståendet”	Inga ekvationer

När läromedelsanalysen var färdigställd gjordes två elevundersökningar. I första elevundersökningen deltog 110 elever i årskurs 6 vilka var slumpmässigt utvalda att identifiera likhetstecknet i en av tre olika kontexter; 1) ”operationer som ger svar-kontexter” där likhetstecknet är presenterat i en SE där beräkningen sker i V.L. (t.ex. 3 + 4 = 7), 2) ISE, ”operationer i H.L.-kontexter” där beräkningen sker i H.L. (t.ex. 7 = 3 + 4) eller 3) ISE, ”ekvationer utan operationer-kontexter” där ingen beräkning görs i verken V.L. eller H.L. (t.ex. 7 = 7). Eleverna fick också svara på frågorna; A) ”Vad är namnet på symbolen (=)?” och B) ”Vad betyder symbolen (=)?”. Den andra elevundersökningen var konstruerad på samma sätt som den första, men här skulle eleverna endast utgå ifrån en av två icke-standardkontexter; 1) ”operationer i H.L.-kontexter” där operationen sker i H.L. (t.ex. 7 = 3 + 4) eller 2) ”operationer på båda sidor-kontexter” där operationer sker i både V.L. och H.L. (t.ex. 3 + 4 = 5 + 2).

Resultaten av läromedelanalysen visade att likhetstecknet ofta var presenterat i SE (t.ex. 3 + 4 = 7). Av ISE var *ekvationer utan operationer* (7 = 7) mest förekommande. ISE med *ekvationer i H.L.* (7 = 3 + 4) var näst mest förekommande. Näst mest sällsynt var *ekvationer med operationer i V.L. och H.L.* (3 + 4 = 5 + 2). Mest sällsynt var ISE *utan ekvationer* (”Använd <, =, eller > för att fullborda påståendet”).

Resultatet av den första elevundersökningen visade att elever som löste uppgifter av typen *standardekvationer* var mindre benägna att förstå likhetstecknets relationella betydelse jämfört med de elever som löste uppgifter av icke-standardekvationerna *operationer i H.L.* och *ekvationer utan operationer*. Alltså, resultatet visar att icke-standardekvationer är mer effektiva jämfört med standardoperationer för att utveckla förståelsen av den relationella betydelsen av likhetstecknet bland dessa elever, vilken är en förutsättning för att eleverna ska kunna utveckla en strukturell begreppsbild av likhetstecknet.

Resultatet av den andra elevundersökningen visade att alla former av icke-standardekvationer inte är lika effektiva när det kommer till at utveckla förståelse för likhetstecknets relationella betydelse. Uppgifter av typen ISE med operationer i både V.L. och H.L. ökade elevers förståelse för likhetstecknets relationella betydelse bättre jämfört med operationer i endast H.L.

Utifrån studiens resultat sammanfattas effektiviteten av hur de olika typerna av ekvationerna hjälper elever att utveckla förståelse för likhetstecknets relationella betydelse följande: 1) icke-standardekvationer med operationer i både V.L. och H.L. var mest effektiv, 2) andra icke-standardekvationer var näst mest effektiv och 3) standardekvationer var minst effektiv på att öka elevers förståelse för likhetstecknets relationella betydelse. Vidare är det resultatet av läromedelsanalysen problematisk eftersom att det visade på att uppgifter av typen icke-standardekvationer med operationer i både V.L. och H.L. var mycket ovanligt medan standardekvationer var de som förekom mest frekvent.

Artikelns resultat kategoriseras som K(1), K(2) och K(3).

5.1.4 Powell (2012) - Equations and the equal sign in elementary mathematics textbooks

Powell (2012) har undersökt hur 8 vanligt förekommande lärobokserier i Chicago exponerar likhetstecknet i olika typer av ekvationer; *standard-* (t.ex. 4 + 6 = 10) eller *icke-standardekvationstyper* (t.ex. 10 = 4 + 6). Lärobokserierna var avsedda för elever från förskolan och upp till årskurs 5 och det var sammanlagt 47 läroböcker som analyserades. Lärarhandledningarna tillhörande varje lärobok analyserades utifrån hur likhetstecknet presenterades och beskrevs, alltså vilken definition av likhetstecknet som användes.

Vid läromedelsanalysen valdes 50 % av sidorna i varje lärobok ut. Därefter undersöktes vilka olika typer av uppgifter som exponerades i läroböckerna utifrån följande kriterier; *standard-* eller *icke-standardekvationstyper* uppdelade i 12 olika kategorier varav 5 standardekvationstyper och 7 icke-standardekvationstyper. Tabellen nedan presenterar de 12 olika kategorierna med tillhörande exempel och beskrivning.

Tabell 9 – 12 olika kategoriseringar av standard- och icke-standardekvationer (Powell, 2012, s. 633)

Typ av ekvation	**Förklaring**	**Operation**	**Form**	**Exempel**
Standard	Operation i V.L.	Addition	a + b = c	4 + 6 = 10
	Operation i V.L.	Subtraktion	a – b = c	11 – 6 = 5
	Operation i V.L.	Multiplikation	a x b = c	7 x 6 = 42
	Operation i V.L.	Division	a ÷ b = c	25 ÷ 5 = 5
	Operation i V.L.	Blandad	a + b – c = d	(4 + 3) x 2 = 14
Icke-standard	Operation i H.L.	Addition	c = a + b	10 = 4 + 6
	Operation i H.L.	Subtraktion	c = a – b	5 = 11 – 6
	Operation i H.L.	Multiplikation	c = a x b	42 = 7 x 6
	Operation i H.L.	Division	c = a ÷ b	5 = 25 ÷ 5
	Operation i H.L.	Blandad	d = (c ÷ b) x a	25 = (10 ÷ 2) x 5
	Ingen operation	Ingen	a = a	4 = 4
	Operation i V.L. och H.L.	Valfri kombination av +, -, x, ÷	a + b = c – d a – b = c – d a x b = c ÷ d	4 + 3 = 2 + 5 12 ÷ 3 = 2 x 2 9 – 3 = 24 ÷ 4

Resultatet av läromedelsanalysen visade att endast 1 av 47 läroböcker presenterade fler icke-standardekvationer än standardekvationer. Vidare hade resterande läroböcker betydligt fler standardekvationer jämfört med icke-standardekvationer. Läroboken som hade flest antal uppgifter av icke-standardekvationstypen innehöll 66,3 % sådana uppgifter. 9 stycken läroböcker innehöll inga, alltså 0 %, icke-standardekvationer. Medelvärdet av antal icke-standardekvationer fördelat på de 47 läroböckerna var 8,88 %.

Analysen av lärarhandledningarna visade på flera resultat. För det första var det ingen större skillnad mellan hur lärarhandledningarna presenterade likhetstecknet. Definitioner som ”lika med”, ”är samma som”, ”två sidor är lika” presenterades ofta i lärarhandledningarna. De flesta presentationer av likhetstecknet i lärarhandledningarna var relationella/strukturella, medan några var operationella (t.ex. ”summan av”, ”numret mellan siffrorna och summan”). Däremot var det ingen lärarhandledning som använde sig av samma definition av likhetstecknet i alla årskurser. För det andra presenterades likhet och likhetstecknet som mest åtta gånger i en lärarhandledning, vanligast var att definitionen endast var presenterad en gång, i vissa lärarhandledningar nämndes inte likhetstecknet överhuvudtaget. För det tredje presenterades likhetstecknet mer frekvent i lärarhandledningarna för förskolan, årkurs 1 och årskurs 2, medan lärarhandledningarna till årskurs 3-5 nämnde likhetstecknet mycket sällan, ofta nämndes det inte överhuvudtaget. För det fjärde var det tre av åtta lärarhandledningar som uppmanade lärare att använda sig av icke-standardekvationer för att öka elevers förståelse för likhetstecknets relationella betydelse, dock var det endast en av dessa tre som reflekterar förslaget i läroboken på ett frekvent och rättvist sätt.

Artikelns resultat kategoriseras som K(3).

5.1.5 Vermeulen och Meyer (2017) - The Equal Sign: Teahers' Knowledge and Students' Misconceptions

I denna artikel skriver Vermeulen och Meyer (2017) om elevers missförståelse av likhetstecknet men också om lärares svårigheter vad gäller att hitta och reducera elevernas feltolkningar. I denna fallstudie deltog 57 elever i årskurs 6 och 3 lärare som undervisade matematik i årskurs 5 respektive 6. Fallstudien utgick från kvalitativ data som omfattade frågor till lärarna samt en gruppintervju med dem. Eleverna fick svara på frågor och efter det valdes 6 elever ut, utifrån deras svar på frågorna, för att delta i en intervju. Resultaten visar att det är få elever som har god förståelse för likhetstecknets relationella betydelse. Majoriteten av eleverna kunde inte beskriva likhetstecknets betydelse korrekt. Vidare indikerade resultaten att lärarna i allmänhet saknade kunskap och färdigheter för att identifiera, förebygga, minska eller korrigera elevers missuppfattningar angående likhetstecknets betydelse.

Eleverna fick svara på en enkät som omfattade fyra möjliga typer av missförståelser; 1) Höljesbildning (Closure), 2) använder alla tal i ekvationen (using all the numbers in the equation), 3) strängoperationer (string operations) och 4) oförmåga att beskriva likhetstecknets betydelse korrekt (an inability to describe the meaning of the equal sign correctly). Höljesbildning innebär att eleven endast räknar ut värdet i V.L. utan att ta hänsyn till H.L. I exemplet 7 + 2 = [ ] – 4 skulle eleven svarat 9. Att använda alla tal i ekvationen innebär att eleven använder sig av alla tal i både V.L. och H.L. och skapar på så sätt falska likheter. I exemplet 9 + 3 = [ ] – 4 skulle eleven först fylla i rutan med talet 12 för att sedan lägga till ett andra likhetstecken och på så sätt skapa den falska likheten 9 + 3 = 12 + 4 = 16. Strängoperationer innebär också att eleven skapar falska likheter, i det här fallet genom att bryta ner en beräkning till för eleven mer lätthanterliga beräkningar. Exempelvis delar eleven upp uppgiften 4 + 8 – 6 = 6 genom att först beräkna strängen 4 + 8 = 12 för att sedan tillfoga den saknade termen – 6 och skriver alltså 4 + 8 = 12 – 6 = 6 vilken är en falsk likhet. Elever som inte kunde beskriva likhetstecknets betydelse svarade exempelvis ”svaret”, ”svaret kommer efter”. Tabellen nedan visar ett utdrag från resultaten av enkätundersökningen.

Tabell 6 – Ett utdrag från resultatet av den kvantitativa datan (Min tolkning av Vermeulen & Meyer, 2017)

Typ av missförståelse	Uppgift	Antal elevsvar	Antal elever som demonstrerade en missuppfattning	Procentandel som demonstrerade en missuppfattning
Höljesbildning	7 + 2 = [ ] + 4	57	2	3,5
Använder alla tal i ekvationen	9 + 3 = [ ] – 4	57	1	1,8

Strängoperationer	Är påståendet nedan sant? Hur vet du? 4 + 8 = 12 – 6 = 6	54	27	50
Oförmåga att beskriva likhetstecknets betydelse korrekt	Vad betyder symbolen (=)?	57	31	54,3

Resultatet visar att missuppfattningar av typ 3) strängoperationer och 4) oförmåga att beskriva likhetstecknets betydelse korrekt är vanligast bland dessa 57 elever. Eleverna som svarat fel på uppgifterna i enkäten hade en operationell syn på likhetstecknet. De flesta eleverna befann sig i vad Sfard skulle beskriva som kondenseringsfasen, och inte den önskade objektifieringsfasen. Dessa elever förstod likhetstecknets relationella betydelse, alltså att V.L. = H.L., men kunde inte se likhetstecknet som en statisk struktur, alltså något oföränderligt som har samma egenskap oavsett kontext.

Artikeln redogör också för intervjuer med de tre lärarna som undervisade matematik i årskurs 5 respektive 6. Intervjuerna visade att lärarna i allmänhet saknade kunskap och färdigheter för att identifiera, förebygga, minska eller korrigera elevers missuppfattningar angående likhetstecknets betydelse. Intervjuerna behandlade hur de olika lärarna såg på likhetstecknet och på vilka sätt de upplevde att eleverna använde sig av likhetstecknet. Därefter diskuterades lärarnas svar i en gruppdiskussion. Lärarna fick också bedöma elevuppgifter och förklara hur de tänkt (Vermeulen & Meyer, 2017). Nedan visas ett utdrag av resultaten från lärarnas bedömningar av elevuppgifter.

Tabell 7 – Elevernas missuppfattningar av likhetstecknet och lärarnas felbedömningar av elevuppgifter (Min tolkning av Vermeulen & Meyer, 2017)

Elevuppgift	Elevsvar	Elevens missuppfattning	Lärarens bedömning	Lärarens missuppfattning
3 x 9 – 5 ÷ 11	3 x 9 – 5 ÷ 11 = 27 – 5 ÷ 11 = 27 – 5 = 22 ÷ 11 = 2	Använder alla tal i ekvationen	Läraren bedömer uppgiften som godkänd	Antingen förstår inte läraren att det uppstått en missuppfattning eller tillåter läraren missförståelsen
Är påståendet nedan sant eller falskt? 2 x 8 = 16 + 1	Sant	Stängning	Läraren bedömer uppgiften som fel men beskriver det inte typen av missförståelse (Stängning)	Läraren ser inte att missuppfattningen är av typen stängning utan bedömer att eleven endast har problem med multiplikationstabellen

Resultaten visade att en av lärarna uteslöt de flesta svaren som var relevanta för att förstå elevers missuppfattningar av likhetstecknets betydelse. Majoriteten av lärarna kunde förstå hur eleverna tänkt utifrån deras svar, men få av dem kunde identifiera elevernas missförståelser. Även i de fall lärarna upptäckte fel kunde de inte förhindra, korrigera eller reducera felen hos eleverna. Sammanfattningsvis var det tre fel lärarna gjorde: 1) De kunde inte avgöra om eleverna missuppfattat uppgiften, 2) de kunde inte avgöra vad som orsakat elevens missuppfattning, 3) de visade inga strategier på hur man kan förebygga eller reducera missförstånden hos eleverna. Det är sannolikt att lärarnas brist på kunskap leder till att eleverna fortsätter att misstolka likhetstecknet eftersom att de inte får förklaringar på vad de gör för fel. Dessutom får de emellanåt godkänt på uppgifter trots de använt likhetstecknet på ett felaktigt sätt.

Artikelns resultat kategoriseras som K(1).

5.2 Resultatsammanfattning

Nedan presenteras en punktlista av resultaten av artiklarna ovan.

- Elever har ofta en operationell begreppsbild av likhetstecknet.
- Elever löser aritmetiska ekvationer bättre än algebraiska ekvationer.
- ISE utvecklar elevernas strukturella begreppsbild av likhetstecknet i större utsträckning än SE.
- Läromedel presenterar ofta likhetstecknet i SE och sällan i ISE med *operationer i både V.L. och H.L.*

(Kieran, 1981: K(1); Machaba, 2017: K(1); McNeil et al, 2006: K(1), K(2), K(3); Powell, 2012: K(3); Vermeulen & Meyer, 2017 K(1))

5.3 Svar på frågeställningarna

5.3.1 Fråga 1: Vilken begreppsbild av likhetstecknet är mest frekvent förekommande hos elever?

Kieran (1981) har visat att den operationella begreppsbilden är mest frekvent förekommande hos elever samt att den ofta består upp i årskurserna. Alltså, elever utvecklar ofta en operationell begreppsbild av likhetstecknet i ung ålder och behåller den ofta i upp i åldern, vissa har den till och med när de studerar på universitetet. Elever kan möjligtvis komma ifrån sin begränsande operationella tolkning av likhetstecknet upp i åldrarna genom att lösa aritmetiska ekvationer av typen ISE med operationer i både V.L. och H.L. och då förstå att ”värdet är lika” i både V.L. och H.L. Däremot är det inte kartlagt när den tolkningen av likhetstecknet äger rum, alltså vid vilken ålder eller årskurs eleverna börjar utveckla en strukturell begreppsbild av likhetstecknet (Kieran, 1981).

På liknande sätt belyser Machaba (2017) frekvensen av elevers operationella begreppsbild av likhetstecknet. Machaba (2017) visar att elever med en operationell begreppsbild av likhetstecknet har svårt att lösa algebraiska ekvationer. Resultaten visar också att elever har lättare att lösa aritmetiska ekvationer än algebraiska ekvationer vilket indikerar att det finns ett kognitivt gap hos elever när de går från att lösa aritmetiska ekvationer till att lösa algebraiska ekvationer. Alltså, elever ser inte sambandet mellan den aritmetiska ekvationen: $4 + 5 = [\ \ ] - 1$ (ISE) och den algebraiska ekvationen: $7 + n = 6 + 9$ (ISE) eftersom att de saknar en strukturell begreppsbild av likhetstecknet och kan då inte se att ”boxen” och ”variabeln n” har samma funktion, de representerar båda en okänd siffra. Vidare visar intervjuer med elever att de tolkar likhetstecknet fel och tror att det betyder ”att ett svar ska ges” vilket är ett tydligt tecken på att eleverna har en operationell begreppsbild av likhetstecknet.

Även Vermeulen och Meyer (2017) exponerar elevers operationella begreppsbild av likhetstecknet. Hälften av eleverna förstod inte att den aritmetiska ekvationen 4 + 8 = 12 – 6 = 6 (SE) var en falsk likhet, utan uppfattade likhetstecknet som en signal att göra någonting. Eleverna tänkte ”först adderade jag 4 och 8 som blir 12 och sedan subtraherade jag 6 från 12 och fick svaret 6” vilket visar på att eleverna använde likhetstecknet för att visa ”sedan gjorde jag det här”. Sammanfattningsvis visade resultaten att majoriteten av eleverna låg i Sfard's andra fas; kondenseringsfasen. Dessa elever förstod möjligtvis likhetstecknets relationella betydelse, alltså att V.L. = H.L., men kunde inte se likhetstecknet som en statisk struktur, alltså något oföränderligt som har samma egenskap oavsett kontext (Vermeulen & Bronwin, 2017).

5.3.2 Fråga 2: Vilken påverkan har användning av standard- och icke-standardekvationer i undervisningen på elevers begreppsbild av likhetstecknet?

McNeil et al (2006) har visat att ISE med *operationer i både V.L. och H.L.* är mer effektiva för att utveckla elevers strukturella begreppsbild av likhetstecknet än SE. Utifrån studiens resultat sammanfattas hur användning av de olika typerna av ekvationer hjälper elever att utveckla förståelse för likhetstecknets relationella betydelse samt elevernas strukturella begreppsbild av likhetstecknet på följande sätt:

1. ISE med *operationer i både V.L. och H.L.* har bäst effekt,
2. andra ISE har näst bäst effekt,
3. SE har minst effekt.

Vidare kan resultatet av läromedelsanalysen uppfattas problematiskt eftersom att det visade på att uppgifter av typen ISE med *operationer i både V.L. och H.L.* var mycket ovanliga medan SE och ISE *utan operationer* var de som förekom mest frekvent (McNiel et al, 2010), vilket förklaras mer utförligt i 5.3.3.

5.3.3 Fråga 3: Hur frekvent presenteras standard- och icke-standardekvationer i läroböcker?

McNeil et al (2006) läromedelsanalyser visade att det de undersökta läroböckerna ofta innehöll SE och en sällan ISE med *operationer i både V.L. och H.L.* Tabellen nedan visar hur frekvent förekommande varje typ av uppgift var i läroböckerna sett till genomsnitt, max- och minvärde.

Tabell 10 – Frekvensen av standard- och icke-standardekvationer i läroböckerna (Min tolkning av McNeil et al, 2006)

Typ av ekvation	Minvärde (avrundat till hela procent)	Maxvärde (avrundat till hela procent)	Genomsnitt (avrundat till hela procent)
ISE utan operationer	31	91	60
SE	10	70	39
ISE med operationer i H.L.	0	69	38
ISE med operationer i både V.L. och H.L.	0	9	5

ISE utan ekvation	0	9	2

Powells (2012) läromedelsanalys visar på att endast 1 av 47 läroböcker presenterade fler ISE än SE. Tabellen nedan visar hur frekvent förekommande ISE och SE var i läroböckerna sett till genomsnitt, max- och minvärde.

Tabell 11 – Frekvensen av standard- och icke-standardekvationer i läroböckerna (Min tolkning av Powell, 2012)

Typ av ekvation	**Minvärde (avrundat till hela procent)**	**Maxvärde (avrundat till hela procent)**	**Genomsnitt (avrundat till hela procent)**
ISE	0	66	9
SE	34	100	91

Tabellen nedan visar hur frekvent förekommande de olika typerna av ISE, alltså ISE med *operationer i H.L.*, ISE med *operationer i V.L. och H.L.* och ISE *utan operationer*, var i läroböckerna sett till genomsnitt, max- och minantal.

Tabell 12 – Frekvensen av olika typer av icke-standardekvationer i läroböckerna (Min tolkning av Powell, 2012)

Typ av ISE	**Minvärde (antal)**	**Maxvärde (antal)**	**Genomsnitt antal per lärobok (avrundat till heltal)**
ISE med operationer i H.L.	0 st	110 st	3
ISE med operationer i både V.L. och H.L.	0 st	64 st	11
ISE utan ekvation	0 st	12 st	1

Sammanfattningsvis kan både skillnader och likheter mellan de två läromedelsanalyserna utläsas. Både McNeil et al (2006) och Powell (2012) visar att SE är vanligt förekommande i läroböcker, även om Powel (2012) visar på en högre frekvens av SE jämfört med McNeil et al (2006), alltså ett genomsnitt på 91,12 % jämfört med 39 %. Däremot visar båda läromedelsanalyserna att ISE med *operationer i både V.L. och H.L.* förekommer sällan i läroböckerna. Vad gäller ISE *utan ekvation* var det den typen av ekvation som var mest sällsynt förekommande i läroböckerna enligt båda läromedelsanalyserna.

6. Diskussion

6.1 Resultatdiskussion

I resultatdiskussionen kopplas resultaten från litteraturanalysen samman med Sfards teoretiska ramverk för hur begreppsbilder utvecklas. Det görs dels för att en vedertagen teori kring elevers begrepps utveckling ger mig möjligheter att diskutera hur lärare kan hjälpa elever att utveckla sin begreppskunskap, dels för att problematisera resultaten utifrån ramverket. Varje frågeställning diskuteras och analyseras utifrån det teoretiska ramverket. Utifrån resultatdiskussion drar jag slutsatser, ger implikationer till lärare samt ger förslag på vidare forskning.

6.1.1 Sfards teoretiska ramverk kopplat till elevers operationella begreppsbild av likhetstecknet

De flesta elever har en operationell begreppsbild av likhetstecknet och befinner i Sfards andra fas: kondenseringsfasen. Dessa elever förstår, till viss del, likhetstecknets relationella betydelse, alltså att V.L. = H.L., men kan inte se likhetstecknet som en statisk struktur, alltså något oföränderligt som har samma egenskap oavsett kontext (Vermeulen & Bronwin, 2017; Sfard, 1991). Elever behåller ofta den operationella begreppsbilden upp i åldern och utvecklar inte en strukturell begreppsbild av likhetstecknet. Alltså, elever stannar ofta i kondenseringsfasen och utvecklas inte vidare till Sfards objektifieringsfas (Kieran, 1981; Sfard, 1991), vilket inte är önskvärt. Frågan är vilken faktor som spelar störst roll för att utveckla elevers strukturella begreppsbild? Är det läroböckers upplägg, lärarens undervisningsmetoder eller elevens kognitiva förmåga som starkast påverkar vilken begreppsbild av likhetstecknet eleven har? Detta diskuteras mer ingående i 6.1.3.

6.1.2 Sfards teoretiska ramverk kopplat till resultatet av standard- och icke-standardekvationer påverkan på elevers begreppsbilder

Det har visats att ISE med operationer i både V.L. och H.L. är de mest effektiva uppgifterna, av dem som testats, för att utveckla elevers strukturella begreppsbild av likhetstecknet (Mc.Neil et al, 2006). Alltså, sådana uppgifter ger elever en större möjlighet att gå från Sfards kondenseringsfas och vidare till objektifieringsfasen. Däremot måste hänsyn tas till att Sfards trestegsmodell är hierarkisk, vilket innebär att sådana uppgifter inte är relevanta att visa för en elev som befinner sig i internaliseringsfasen eller tidigt i kondenseringsfasen. En sådan elev skulle kanske uppfatta $4 + 5 = 3 + 6$ (ISE) som falsk och möjligtvis ge kommentarer som ”efter likhetstecknet ska svaret stå.” eller ”det är slutet, inte ett till problem, $4 + 5 = 9$ och $3 + 6 = 9$” (Kieran, 1981). Eleven kanske har svårare att lösa $7 + n = 6 + 9$ (ISE) eftersom att elevens operationella begreppsbild av likhetstecknet blir ett hinder vid lösning av sådana uppgifter (Machaba, 2017). Det är svårt att säkerhetsställa om ISE (inkluderat ekvationer med operationer i både V.L. och H.L.) endast leder till att elever utvecklar en begreppsbild mer åt det strukturella hållet, men också om den begreppsbilden kommer att behållas i andra kontexter. Däremot är det rimligt att tro att ju mer en elev utsätts för ISE, och på så sätt utvecklar en mer strukturell begreppsbild av likhetstecknet, desto större chans är det att den begreppsbilden behålls i andra sammanhang eftersom att den, till skillnad från en operationell begreppsbild, fungerar i alla kontexter (McNeil, 2006).

6.1.3 Sfards teoretiska ramverk kopplat till resultatet av läromedelsanalyserna

Resultatet av läromedelsanalyserna visar att SE ofta förekommer i läroböcker medan ISE med operationer i både V.L. och H.L. förekommer sällan (McNeil et al, 2006; Powell, 2012). Om elever löser många SE och få ISE skulle det kunna förstärka deras operationella begreppsbild av likhetstecknet. Därför kanske läroböcker inte är optimalt konstrukturerade för att ge eleverna bästa möjliga chans att utveckla en strukturell begreppsbild av likhetstecknet (McNeil 2006). Eftersom att det har visat sig att ISE med operationer i både V.L. och H.L. är mer effektiva på att utveckla en strukturell begreppsbild av likhetstecknet hos elever, varför innehåller läroböcker inte fler sådana uppgifter?

Som förklarat tidigare, är Sfards trestegsmodell hierarkisk, och konsekvensen av det blir att elever måste exponeras av vissa typer av uppgifter innan de kan förstå mer komplexa sådana. Eleven måste alltså först komma i kontakt med likhetstecknet genom att utföra enklare aritmetiska ekvationer (t.ex. 1 + 2 = __ (SE)) (internaliseringsfasen) för att kunna lösa mer komplexa uppgifter (t.ex. __ = 8 + 4 (ISE)) (kondenseringsfasen) för att sedan ha möjlighet att utveckla förmågan att på ett självständigt sätt använda likhetstecknet korrekt oavsett kontext (objektifieringsfasen) (Sfard, 1991). Ett svar på frågan ovan blir därför att det inte finns någon poäng i att låta elever försöka lösa uppgifter de inte är kapabla till att förstå. Däremot finns det inget svar på hur många SE en elev som ligger i internaliseringsfasen måste lösa för att kunna gå vidare till kondenseringsfasen. Likaså finns det inget mått på hur länge en elev måste befinna sig i kondenseringsfasen för att kunna gå vidare till objektifieringsfasen. Eftersom att det inte finns något mått på hur många uppgifter av en viss ekvationstyp (SE eller ISE) en elev måste lösa för att kunna gå vidare till nästa fas är det svårt att säga hur en lärobok skulle vara uppbyggd för att alla elever ska ha lika stor chans att utvecklas. Som nämnts ovan finns det ingen poäng i att låta elever lösa uppgifter de inte är kapabla till att förstå. Därför finns det anledning att ifrågasätta läromedelsanalysernas tillförlitlighet vad gäller hur läromedels uppbyggnad påverkar elevers begreppsbilder, eftersom att varje elevs utvecklingskurva är individuell.

En annan anledning till att ifrågasätta hur mycket läromedels uppbyggnad påverkar elevers begreppsbild av likhetstecknet är att det finns ytterligare faktorer som påverkar utvecklingen av elevers begreppsbilder, exempelvis lärarens undervisningsmetoder, elevens kognitiva förmåga och kontext. Alltså är det orimligt att tro att det endast är erfarenheten eleven får genom att lösa vissa typer av ekvationer i läroböcker som bestämmer vilken begreppsbild eleven får, utan också lärares undervisningsmetoder (alltså hur läraren undervisar samt vilka uppgifter eleverna då exponeras för), elevens kognitiva förmåga (alltså vilken förmåga eleven har för att ta in och hantera kunskap/information) och kontext (alltså att eleven kanske förstår likhetstecknets betydelse i en kontext, t.ex. när hen löser ISE med operationer i både V.L. och H.L., men inte i en annan t.ex. vid derivering) (McNeil et al, 2006).

Trots ovanstående resonemang går det att argumentera för att läroböckers upplägg faktiskt påverkar elevers begreppsbilder av likhetstecknet. Anledningen till det är att Vermeulen och Meyer (2017) skriver att lärarna som deltog i undersökningen förlitade sig till och utgick till stor del från läroböckerna vid planering av sin undervisning. Därför är det rimligt att tro att om läroböckerna innehöll fler ISE skulle eleverna få större möjlighet att utveckla en strukturell begreppsbild av likhetstecknet, vilket skulle kunna öka deras möjlighet att lösa mer komplexa algebraiska ekvationer (Machaba, 2017). Den lärobok, som hade minst del ISE med operationer i både V.L. och H.L. hade inga sådana uppgifter, och den lärobok, som hade störst del sådana ISE, hade 9 % sådana uppgifter (McNeil et al, 2006; Powell, 2012). Det skapar en orättvisa gentemot de elever vars undervisning utgår från en lärobok med få eller inga sådana ekvationer. Konsekvensen blir troligtvis att dessa elever löper större risk att behålla en operationell begreppsbild av likhetstecknet vilket i sin tur kan hindrar deras framgångar i algebra. Lärare som använder sig av ett läromedel som innehåller få eller inga ISE har ett större ansvar att se till att eleverna exponeras för sådana uppgifter utöver de som finns eller inte finns i läroboken. Argumentet för det är, som framhållits tidigare, att ISE, framförallt ISE med operationer i både V.L. och H.L., har visat sig hjälpa elever att utveckla en strukturell begreppsbild av likhetstecknet.

6.2. Slutsats

- Elever har ofta en operationell begreppsbild av likhetstecknet och befinner sig i Sfards andra fas; kondenseringsfasen
- Vilka ekvationer eleverna löser påverkar deras begreppsbild av likhetstecknet
- ISE, framförallt ISE med operationer i både V.L. och H.L. hjälper elever att utveckla en strukturell begreppsbild av likhetstecknet i större utsträckning än SE
- Faktorer så som lärares undervisningsmetoder, elevens kognitiva förmåga och kontext påverkar också elevers begreppsbild av likhetstecknet
- Det är svårt att konstruera en lärobok som hjälper alla elever att utveckla sin begreppsbild av likhetstecknet eftersom att varje elevs utvecklingskurva är individuell
- Lärare borde reflektera över hur de själva samt hur läroböcker presenterar likhetstecknet för att kunna lägga upp sin undervisning på ett sätt som gynnar elevers utveckling till en strukturell begreppsbild av likhetstecknet.

6.3. Implikationer till lärare

Eftersom att det har visat sig att ISE med operationer i både V.L. och H.L. är de uppgifter som hjälper elever utveckla en strukturell begreppsbild borde lärare exponera sådana uppgifter för elever (McNeil, 2006). Däremot är inte alla elever benägna att förstå sådana uppgifter. Vilken av Sfards tre faser; internalisering, kondensering eller objektifiering, eleven befinner sig i påverkar elevens förmåga att kunna eller inte kunna förstå och lösa sådana typer av uppgifter (Sfard, 1991). Därför är det betydelsefullt att lärare uppmärksammar vilken fas varje elev befinner sig i för att kunna anpassa undervisningen till varje elevs nivå. Hur en lärare ska kunna avgöra det har jag tyvärr inget svar på. Därför vore det relevant med forskning på det området.

Lärare borde också vara konsekvent med vilken definition av likhetstecknet de använder. De borde använda sig av en strukturell definition exempelvis ”båda sidor har samma värde” för att eleverna lättare ska kunna utveckla en strukturell begreppsbild av likhetstecknet (Powell, 2012). Likaså borde lärare vara observanta på vilken typ av läromedel som används och då välja ett som innehåller en stor del ISE vilka gynnar elevers utveckling till en strukturell begreppsbild av likhetstecknet. Om ett sådant läromedel inte finns, borde läraren komplettera med andra uppgifter utöver de som finns i läroboken. Alltså, det är av stor vikt att lärare reflekterar över sina egna undervisningsmetoder, vilka uppgifter som exponeras för eleverna samt uppmärksammar vilken fas eleven befinner sig i. Allt detta för att underlätta för elevens utveckling närmre en strukturell begreppsbild av likhetstecknet.

6.4. Förslag på vidare forskning

Eftersom att studien inte behandlar någon svensk litteratur hade svensk forskning på samma område vara intressant. Genom att undersöka vilka begreppsbilder av likhetstecknet elever i svensk skola har kan likheter och skillnader kartläggas mellan dessa elever och elever i internationell skola. Vidare borde de resultaten studeras för att reda på vad möjliga skillnader skulle kunna bero på för att på så sätt kunna dra slutsatser om vilka faktorer gynnar elevers utveckling till en strukturell begreppsbild av likhetstecknet mest. Det vore också relevant att utföra läromedelsanalyser på vanligt förekommande läroböcker i Sverige eftersom att det visats att ISE med operationer i både V.L. och H.L. är mer fördelaktiga när elever ska utveckla en strukturell begreppsbild av likhetstecknet.

Som nämnts ovan vore det av vikt med forskning på hur lärare kan avgöra vilken av Sfards tre faser en elev befinner sig i. Det skulle kunna leda till att lärare anpassar sina undervisningsmetoder samt val av uppgifter för att varje elev ska få största möjliga chans att få en strukturell begreppsbild av likhetstecknet och därmed bäst chans att göra framsteg i algebra.

6.5 Metoddiskussion

I en konsumtionsuppsats är det urvalet av artiklar som speglar resultatet. Därför är det viktigt att ifrågasätta den valda metoden som varit till grund för urvalet av artiklarna. En systematisk litteraturstudie ska omfatta all relevant forskning på området (Eriksson et al, (2013), men endast en liten del artiklar har analyserats på grund av tidsbegränsningen och studiens omfång. Konsekvensen blir att en stor del artiklar som berör området har sållats bort vilket sänker tillförlitligheten på resultaten och slutsatserna av studien.

Den valda sökstrategin kan också ifrågasättas eftersom att den påverkar antal sökträffar och då också vilka artiklar som behandlas. I litteraturanalysen gjordes specifika sökningar grundade i frågeställningarna och urvalskriterierna, men det finns en risk att andra sökord och kombinationer av sökord, som också kan passa in på frågeställningarna och urvalskriterierna, hade gett andra träffar. Detta innebär att slumpen spelar en viss roll, men eftersom det finns många sådana söksträngar är det orimligt att fordra att alla artiklar som behandlar frågeställningarna ska upptäckas och analyseras. Konsekvensen av det begränsade urvalet är att studiens tillförlitlighet minskar.

Det som talar för valet av metod är att sökorden noggrant valts och alla artiklar har analyserats utifrån frågeställningarna och urvalskriterierna. Alla artiklar har varit peer-reviewed, alltså vetenskapligt granskade, vilket ger en form av säkerhetsställning av resultaten (Eriksson et al, (2013). Många av artiklarna refererade till samma forskare (t.ex. Kieran, 1981; McNiel et al., 2006; Sfard, 1991) vilket kan antyda att dessa är väletablerade inom forskningsområdet. Det ger en viss trovärdighet till val av artiklar samt resultatet och slutsatserna i denna studie.

7. Referenser

Bergsten, C., Häggström, J., & Lindberg, L. (1997). *Nämnaren Tema: Algebra för alla.* Bohus: Ale Tryckteam AB.

Eriksson Barajas, K., Forsberg, C., & Wengström, Y. (2013). *Systematiska litteraturstudier i utbildningsvetenskap: vägledning vid examensarbeten och vetenskapliga artiklar.* Stockholm: Natur & Kultur.

Häggström, J. (2008). *Teaching systems of linear equations in Sweden and China: What is possible to learn?* (Doctoral thesis, Gothenburg studies in educational sciences, 262) Göteborg: Göteborgs universitet. Tillgänglig: http://hdl.handle.net/2077/17286

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(3), 317-326. doi: 10.1007/BF00311062

Machaba, F. M. (2017). Grade 9 Learners' Structual and Operational Conceptions of the Equal Sign: A Case Study of a Secondary School in Soshanguve. *Eurasia journal of mathematics, science and technology education, 13*(11), 7243-7255. DOI: 10.12973/ejmste/78017

McNiel, N. M., Grandau, L., Knuth, E. J., Alibali, M. W., Stephens, A. C., Hattikudur, S., & Krill, D. E. (2006). Middleschool students' understanding of the equal sign: The books they read can't help. *Cognition and Instruction*. *24*(3), 367-385.

Nationalencyklopedin [NE]. (2018). *Likhetstecken.* Tillgänglig: https://www.ne.se/uppslagsverk/ordbok/svensk/likhetstecken

Powell, S. R. (2012). Equations and the equal sign in elementary mathematics textbooks. *The elementary school journal*, *112*(4), 627-648.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics*, *22*, 1-36. doi: 10.1007/BF00302715

Skolverket. (2011a). *Kursplan – matematik.* Hämtad 2018-05-10, från: file:///C:/Users/User/Downloads/Kursplan%20-%20Matematik%20(5).pdf

Skolverket. (2011b). *Om ämnet matematik.* Hämtad 2018-05-10, från: file:///C:/Users/User/Downloads/Alla%20kommentarer%20(8).pdf

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational studies in mathematics*, *12*(2), 151-169. doi: 10.1007/BF00305619

Vermeulen, C., & Meyer, B. (2017). The equal sign: Teachers' knowledge and students' misconceptions. *Afrikan journal of research in mathematics, science and technology education*, *21*(2), 136-147. doi: 10.1080/18117295.2017.1321343