



UPPSALA  
UNIVERSITET

TVE-F 17 030 juni

Examensarbete 15 hp  
Juni 2017

# Beam-Beam Simuleringar genom att Använda Avbildningar för Andra Momentet av Strålningspridningar

---

Johannes Ekman



UPPSALA  
UNIVERSITET

## Abstract

# **Beam-Beam Simuleringar genom att Använda Ausbildningar för Andra Momentet av Strålningsspridningar**

---

*Johannes Ekman*

**Teknisk- naturvetenskaplig fakultet  
UTH-enheten**

Besöksadress:  
Ångströmlaboratoriet  
Lägerhyddsvägen 1  
Hus 4, Plan 0

Postadress:  
Box 536  
751 21 Uppsala

Telefon:  
018 – 471 30 03

Telefax:  
018 – 471 30 00

Hemsida:  
<http://www.teknat.uu.se/student>

Kolliderare är en typ av partikelaccelerator som används till att kollidera subatomiska partiklar och är viktiga för utförandet av experiment i partikel- och kärnfysik. Laddade partiklar accelereras och hålls i separata omloppsbanor med dipol- och kvadrupolmagneter, och deras banor korsar varandra minst en gång. De laddade partiklar som åker i en omlopps bana kan generaliseras till en laddad partikelstråle. Dessa strålar propagerar åt motsatta håll, och när dessa kolliderar rakt in i varandra, är laddningarna så tätt fördelade att dess elektriska fält påverkar partiklarna i den motgående strålen. Denna så kallade beam-beam effekt begränsar prestandan på kolliderare, och det är därför av intresse att kunna beskriva denna effekt med en så precis modell som möjligt. I denna rapport testas en modell av beam-beam effekten som baserar sig på en modell som beskrevs av M. A. Furman, K. Y. Ng och A. W. Chao i rapporten "A Symplectic Model of Coherent Beam-Beam Quadrupole Modes" från 1988, men med en ändring på hur de elektriska fälten påverkar de laddade partiklarna. Denna modell testas därefter mot Furmans modell, och den nya modellen utvärderas. Den nya modellen ger stabilare strålningsspridningar under inverkan av beam-beam effekten jämfört med Furmans modell.

Handledare: Volker Ziemann  
Ämnesgranskare: Ken Welch  
Examinator: Martin Sjödin  
ISSN: 1401-5757, TVE-F 17 030 juni

# Populärvetenskaplig Sammanfattning

Partikelacceleratorer är enorma rör i vilka klumpar, eller buntar, med laddade partiklar accelereras upp till väldigt höga hastigheter, upp till en signifikant bråkdel av ljusets hastighet. I cirkulära partikelacceleratorer hålls de laddade partiklarna i bana med olika typer av magneter. Partiklarna samlas i ett antal buntar på rad efter varandra, som ett tåg, vilket i detta sammanhang kallas för en partikelstråle. I experiment inom partikel- och kärnfysik vill man kollidera dessa partiklar, och det åstadkommer man genom att låta två partikelstrålars banor att korsa varandra. Strålarna går då åt motsatta håll så att partikelbuntarna frontalkolliderar. En effekt som stör experiment av denna sort, och som man helst vill bli av med, är beam-beam effekten. Eftersom att partiklarna i partikelstrålarna är elektriskt laddade, så skapar dessa partiklar elektriska fält, vilka påverkar andra laddade partiklar. Två laddade partiklar med positiv laddning stöter bort varandra, och två laddningar där den ena är positivt laddad och den andra negativt attraherar varandra, osv.. Detta resulterar i att partiklar i två kolliderande buntar påverkar varandra med en kraft som destabiliserar partikelstrålarna. Detta begränsar prestandan i partikelacceleratorer, och det är därför av stort intresse att kunna beskriva denna effekt på ett sätt som är så nära verkligheten som möjligt. För att förenkla uträkningar görs vissa approximeringar, och i en modell från 1988 som utvecklades av M. A. Furman, med två andra forskare, görs en approximering där partikelstrålarnas elektriska fält beräknas på samma sätt som om de kom från två elektriskt laddade cirkulära cylindrar som åker rakt genom varandra. Detta innebär att strålen är lika laddad i mitten som i kanten, och utanför kanten blir laddningen noll. Enligt denna modell visar sig olika effekter som syns i hur strålarnas tjocklekar varierar i en specifik punkt i acceleratoren i varv efter varv, beroende på bland annat antalet partiklar i varje strålbunt. Strålningsspridningens andra moment, som finns nämnd i titeln, är just tjockleken på en partikelstråle. Beroende på hur starka krafterna är mellan strålarna, påverkar strålarna varandra varv efter varv, men sedan når stråltjocklekarna ett jämviktsläge där den inte ändras längre från varv till varv, eller så byter den mellan ett visst antal värden (tre, till exempel) i oändlighet. Det sistnämnda fallet kan nästan förklara ett visst fenomen där två strålar på sätt och vis byter varandras tjocklek; när en tunn stråle kolliderar med en tjock stråle växlar tjocklekarna och den tunna blir tjock och den tjocka blir tunn. En skillnad mellan det observerade fenomenet och det som händer i modellen är att i modellen så byter strålarna inte varandras tjocklekar, utan båda går från tunn till tjock, och tvärtom, samtidigt. Utifrån beräkningar utförda i modellen verkar denna effekt bero på att styrkan av de elektriska fälten är orimligt stort för tunna strålar. Detta fenomen tycks dyka upp på grund av approximeringen av partikelstrålarnas elektriska fält. Man kan ändra på denna modell i detta avseende så att laddningstätheten är störst i mitten på strålen och sedan avtar ju längre från centrum man kommer, vilket överensstämmer bättre med hur strålen är i verkligheten. Hur stråltjocklekarna varierar med styrkan på beam-beam interaktionen är annorlunda enligt denna modell. Tjockleken på strålarna når alltid ett specifikt jämviktsvärde utan att variera mellan olika värden från varv till varv när den väl kommit dit. Att stabilitet nås är ett bra tecken för experiment inom partikel- och kärnfysik, men något tecken på en flip-flop effekt visar sig inte i denna modell.

# Contents

<b>1</b>	<b>Introduktion</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Teori</b>	<b>4</b>
2.1	Strålmatiser . . . . .	4
2.2	standardavvikelsen . . . . .	6
2.3	Strålmatiser (fortsättning) . . . . .	7
2.4	Vad modellerna inkluderar . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Metoder</b>	<b>10</b>
3.1	Furmans modell . . . . .	10
3.2	Furmans Modell Modifierad . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Resultat från simuleringar i tidsdomänen</b>	<b>15</b>
4.1	Furmans Modell . . . . .	15
4.2	Furmans Modell Modifierad . . . . .	16
<b>5</b>	<b>Resultat, fixpoint</b>	<b>18</b>
5.1	Furmans modell . . . . .	19
5.2	Furmans Modell Modifierad . . . . .	19
<b>6</b>	<b>Diskussion och Slutsatser</b>	<b>20</b>

# 1 Introduktion

I cirkulära partikelacceleratorer kan man lagra laddade partiklar som färdas i relativistiska hastigheter. Partiklarna hålls i omloppsbana med magnetiska kvadrupoler och dipoler [1]. Dessa partiklar kan som helhet beskrivas som en partikelstråle som beskrivs av ett antal moment. Det nollte momentet är antalet partiklar, första momentet beskriver positionen av strålens masscentrum (vilket i detta fall är referensbanan, vilket tas upp senare), och det andra momentet, och det mest intressanta i detta projekt, beskriver strålens tjocklek. I en sådan partikelstråle delar partiklarna upp sig i ett antal buntar (bunches) på rad. I kolliderare låter man sådana strålar korsa varandras banor på så vis att strålarna propagerar åt motsatta håll i interaktionspunkten (IP). Kolliderare används för att kollidera partiklar under experiment inom partikel- och kärnfysik, men på grund av den höga laddningstätheten skapas elektriska fält kring strålarna. Då strålarna kolliderar och påverkar varandra med sina elektriska fält upplever strålarna en "kick," vilket ändrar de laddade partiklarnas riktning och påverkar partikelstrålarnas tjocklek [6]. Denna så kallade beam-beam effekt begränsar prestandan på kolliderare [3]. En effekt som kan ske då beam-beam effekten uppkommer är flip-flop effekten. Om en bunt med elektroner kolliderar med en bunt med positroner inträffar flip-flop effekten då diametern på buntens med positroner växer, och buntens med elektroner krymper [4]. År 1988 publicerades rapporten "A Symplectic Model of Coherence" av M. A. Furman, och två kollegor, hur två partikelstrålarnas dimensioner varierar då de propagerar genom en partikelaccelerator, kolliderar med varandra och beam-beam effekten uppstår. Den modellen skall jämföras mot en annan modell som är väldigt lik Furmans modell med undantaget att partikelstrålarnas elektriska fält beskrivs annorlunda. Vad dessa modeller förutsäger för olika styrkor på beam-beam effekten testas och jämförs, och om dessa förutsäger flip-flop effekten kommer att utvärderas. Det som först tas upp i denna rapport är allmänt om hur modellerna beräknar hur strålarna propagerar genom lagringsringarna genom att använda strålpropageringsmatriser och sigma-matriser. Ett sätt att simulera ett sådant system på är att simulera varje laddad partikel i systemet, men denna metod tar lång tid då en mycket stor mängd partiklar simuleras. Därför generaliseras partikelstrålen till en Gaussfördelad partikelstråle. Den Gaussfördelade strålens medelvärde blir således en referensbana mitt i partikelacceleratorn, och strålens tjocklek avgjör av partiklarnas standardavvikelse. Den modell som testas i denna rapport är av en enkel typ, och alla strålar som simuleras är runda, dvs. samma standardfördelning i både x-planet, och y-planet, och strålarna har alltid motsatt laddning. Strålens tjocklek oscillerar kring denna referensbana, vilket beror på hur acceleratorn är tillverkad [2]. Acceleratorn beskrivs också med en avbildning, en strålpropageringsavbildning, som beror på hur acceleratorn är konstruerad. Utifrån den kan man i en punkt bestämma tjockleken på partikelstrålen efter ett eller flera varv, om man har lämpliga begynnelsevärden för partikelstrålen. Om itereringarna tillåts pågå länge nog, kommer under vissa förhållanden strålarnas tjocklekar att nå en viss jämvikt som de ej kommer att avvika från. Detta kallas för en fix-point solution som kan vara ett visst värde, eller flera olika värden, som stråltjockleken går mellan från varv till varv. Detta är en aspekt som kommer att undersökas då modellerna jämförs. Sedan tas de elektriska fälten från partikelstrålarna upp, och hur Furmans modell följer Gauss lag för ett elektriskt fält inuti en homogent laddad cylinder. Det nya som tillkommer är att modifiera

Furmans modell så att det elektriska fältet beskrivs som om det kommer från en Gaussisk stråle istället för från en homogent laddad elliptisk stråle. Därefter beskrivs hur den nya kicken beskrivs i den nya modellen. Sedan kommer metoddelen, där beskrivs hur linjärtransformationen utförs enligt Furmans modell, hur beam-beam kicken beskrivs enligt den omodifierade Furmanmodellen, samt hur den modifierade modellen beskriver kicken. Det finns två resultatsektioner, där den övre redovisar resultaten av simuleringarna i tidsdomänen, och den andra simuleringarna i fix-point domänen. Simuleringarna som dessa resultat erhålles från utförs i MATLAB. Vad dessa två modeller förutsäger för olika styrkor på beam-beam effekten, och om flip-flop effekten kan förklaras diskuteras i sektionen "Diskussion och Slutsatser".

## 2 Teori

I denna sektion presenteras i första hand de koncept som behövs för att begripa metoddelen efter denna sektion. Dessa koncept inkluderar hur en enstaka partikel rör sig genom acceleratoren, hur en partikelstråles tjocklek beskrivs och förändras då den åker genom en accelerator, samt hur strålarnas elektriska fält beskrivs i modellerna.

### 2.1 Strålmatiser

För att kunna beskriva en partikelstråle behövs först en beskrivning av en partikels rörelse i acceleratoren. En partikels rörelse beskrivs i relation till en referensbana som en ideal referenspartikel tar genom acceleratoren. Den laddade partikeln hålls i sin bana med magnetiska dipoler och kvadrupoler, och den får en energiökning då den går genom en radio-frekvens kavitet (RF cavity, en hålighet i metall som avgränsar mikrovogor och finns bland annat i mikrovågsugnar).  $x$  är det horisontella avståndet till referenspartikeln (meter),  $x'$  är den horisontella vinkeln relativt referenspartikeln (radianer),  $y$  är det vertikala avståndet till referenspartikeln (meter), och  $y'$  är den vertikala vinkeln relativt referenspartikeln (radianer).

För att beskriva en partikels rörelse genom partikelacceleratoren behövs uträknas hur partikelns moment ändrar sig från en punkt till en annan. För att begripa detta koncept övervägs rörelsen av en enstaka partikel, med en nollskild hastighet, i ett utrymme med längd  $L$  utan elektriska eller magnetiska fält. Denna partikel kommer inte avvika från sin kurs, utan fortsätter i en rak linje. Om vi tar i beaktande ett 2-dimensionellt exempel[2], kan detta händelseförlopp beskrivas med en vektor  $\vec{x}_1 = (x_1, x'_1)$  som beskriver partikelns position ( $x$ ) och riktning ( $x'$ ) före partikeln korsat rummet, en vektor  $\vec{x}_2 = (x_2, x'_2)$  som beskriver partikelns position och riktning efter att partikeln har korsat rummet, samt en avbildningsmatris  $M$ , och händelserna beskrivs på följande sätt:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x'_1 L \\ x'_1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Ekvation (1) beskriver att partikeln behåller samma vinkel  $x'_1$  före och efter att den korsat utrymmet vilket stämmer överens med att partikeln färdas längs en rak linje. För att bestämma hur partikeln rör sig genom två sådana utrymmen, kan man multiplicera den ena avbildningsmatrisen med den andra, och därefter betrakta den som en ny avbildningsmatris.

Ännu ett viktigt element är en tunn magnetisk kvadrupol som påverkar den laddade partikeln med sitt magnetfält som beskrivs av Maxwells ekvationer, vilket i detta fall innebär att magnetfältet ökar linjärt längs x-axeln. Denna beter sig som en tunn optisk lins. Den ger partikeln en kick, dvs. ändrar en partikels vinkel  $x'$ . Storleken på denna kick är proportionell mot avståndet till kvadrupolens centrum då partikeln går genom kvadrupolen. På samma sätt som att en ljusstråle riktad rakt mot en tunn konvex lins fokuseras i en brännpunkt på ett avstånd  $f$  (= brännvidd) så mottager partikeln som är på väg in i kvadrupolen en kick som gör att den korsar en brännpunkt på avståndet  $f$  från kvadrupolen efter att ha åkt genom den. Avbildningsmatrisen för en sådan kvadrupol är följande [2]:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Om en partikel med  $\vec{x}_1 = (x_1, x_1' = 0)$  multipliceras med avbildningsmatrisen för kvadrupolen, på samma sätt som gjordes i ekvation (1), erhåller man att  $\vec{x}_2 = (x_1, -x_1/f)$ . Om man multiplicerar denna vektor med avbildningsmatrisen för ett fältlöst utrymme med samma längd som brännvidden  $f$ , blir den resulterande vektorn som beskriver partikelns position och rörelser  $(0, -x_1/f)$ . Detta approximerar en kvadrupol[2]. Determinanten av överföringsmatrisen för utrymmet som nämnts tidigare är ett, och determinanten av överföringsfunktionen för kvadrupolen är även den ett. Detta innebär att om man multiplicerar dessa två överföringsmatriser kommer även produkten att ha determinanten ett. Determinanten är bevarad genom hela acceleratoren [2]. Hädanefter kommer den linjära avbildningsmatrisen, eller överföringsmatrisen,  $M$  att beskriva partikelns position efter ett varv kring en ringformad accelerator som är uppbyggd av utrymmen utan elektriska och magnetiska fält, och magnetfältsgenererande sektioner av vilka kvadrupolen är ett exempel. Eftersom att  $M$  har en enhetsdeterminant parametreras  $M$  på följande sätt:

$$M = \begin{pmatrix} \cos \mu + \alpha \sin \mu & \beta \sin \mu \\ -\frac{1+\alpha^2}{\beta} \sin \mu & \cos \mu - \alpha \sin \mu \end{pmatrix} \quad (3)$$

Hursomhelst sker parametreringen på det viset att  $\alpha = 0$  i växelverkanspunkt vilket ger följande  $M$ :

$$M = \begin{pmatrix} \cos \mu & \beta \sin \mu \\ -\frac{1}{\beta} \sin \mu & \cos \mu \end{pmatrix} \quad (4)$$

$\beta$  är en funktion som spelar en avgörande roll i beskrivningen av laddade partikelstrålars fortplantning genom acceleratoren, och beror på hur acceleratoren är konstruerad. Den är relaterad till strålens tjocklek enligt  $\sigma_x = \sqrt{\varepsilon\beta}$  där  $\sigma_x$  är standardavvikelsen för strålen i x-led, även definierad som strålens bredd, och  $\varepsilon$  är emittansen[2]. Variabeln  $s$  i  $\beta(s)$  ger hur långt i längs acceleratoren partikelbunten har kommit. Hursomhelst, i detta fall är det ett periodiskt system som undersöks (cirkulära accelerationer), och  $\beta$  är då konstant, vilket ger följande ekvation[1]:

$$\sigma_x = \sqrt{\varepsilon\beta} \quad (5)$$

$\mu$  är fasavanseringen och brukar benämnas som  $\mu = 2\pi Q$ , där  $Q$  är antalet oscilleringar en partikel utför under ett varv i acceleratoren. I Fig. 1 visas någorlunda

överdrivet hur sådana oscillationer går till. Cirkeln med svarta kanter är acceleratorn, och den blå linjen i den är en partikels bana genom acceleratorn.  $Q$  kallas på engelska "tune", och på svenska "arbetspunkt", men i fortsättningen kommer ordet "tune" att användas. Vanligen finns det en tune för vertikal rörelse ( $Q_y$ ) och horisontell rörelse ( $Q_x$ ). I Figur 1 visas horisontell rörelse.

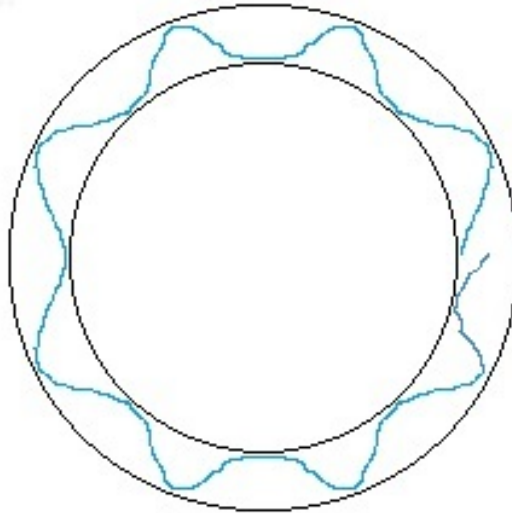


Figure 1: Förenklad figur av en partikels bana genom en partikelaccelerator sedd ovanifrån. Som syns i figuren, behöver en partikels oscillationer inte vara ett heltal.

Hur en laddade partikel rör sig i en partikelaccelerator kan beskrivas med följande ekvation[2]:

$$\bar{x} = \sum_{j=1}^n R_{ij}x_j \quad (6)$$

Ekvationen ovan är skriven på komponentform, men i matris-form skulle ekv. 6 ha vissa likheter med ekv. 1, där avbildningsmatrisen som beskriver utrymmet utan elektriska och magnetiska fält är produkten av ett antal avbildningsmatriser så som ekv. 1 och 2 och benämns som  $R$ ,  $x = x_1$ , och  $\bar{x} = x_2$ . Längden på vektorn  $x$  är inte begränsad till 2, och brukar vanligen vara 2, 4, eller 6. Nu skall fallet med flera partiklar tas upp, och för det måste ett område som tar upp begreppen standardavvikelse, och normalfördelning beträdas.

## 2.2 standardavvikelsen

Då antalet partiklar som simuleras kan vara väldigt stort (mellan  $10^6$  och  $10^{11}$ ) generaliseras partiklarna till en gaussfördelad partikelstråle. Masscentra för partiklarna bestäms genom följande ekvation [2]

$$\langle x^n \rangle = \int x^n \psi(x) dx$$

Det koncept som är viktigt för simuleringarna som presenteras senare är tjockleken på en partikelstråle, vilket i detta fall innebär standardavvikelsen från masscentrat, vilket beskrivs med följande ekvation [2]:



$$\sigma^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

För att beräkna medelvärdet över en funktion kan följande ekvatio användas, där medelvärdet benämns med vinkelparenteser [2].

$$\langle g() \rangle = \int g() \phi() dV \quad (7)$$

Eftersom att partiklarna påverkas av slumpmässiga krafter, blir spridningen gaussisk, enligt den Centrala Gränsvärdeessatsen[2]. Då fördelningen normaliserats, ges den gaussiska kurvan av [2]

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(-x^2/2\sigma^2) \quad (8)$$

För flera dimensioner ( $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ) ges den gaussiska kurvan av[2]

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det \sigma}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (\sigma^{-1})_{ij} x_i x_j\right) \quad (9)$$

där den symmetriska sigmamatrisen  $\sigma$  introducerats[2]:

$$\sigma_{ij} = \int x_i x_j \phi(\vec{x}) d^n x \quad (10)$$

Sigmamatrisen ovan är vad som simuleras nedan i resultatsektionerna.

## 2.3 Strålmatrixer (fortsättning)

För att beräkna medelvärdet av ett antal partiklar efter en strålbana används vinkelparenteser som notation, stor bokstav används för att benämna medelvärde, och streck över vektorn  $x$  anger att det är strålpositionen efter strålbanan. Medelvärdet över ekv. 4 ger följande:

$$\bar{X}_i = \langle \bar{x}_i \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n R_{ij} x_j \right\rangle = \sum_{j=1}^n R_{ij} \langle x_j \rangle = \sum_{j=1}^n R_{ij} X_j \quad (11)$$

vilket innebär att medelpositionerna  $X_i$  av alla partiklar i en bunt, eller bunch, kan beskrivas på samma sätt som positionen på en enda partikel som gör samma bana. Om medelpositionerna av partiklarna i strålen definieras som origo i x-y planet, definieras sigmamatrisen som

$$\sigma_{ij} = \langle (x_i - X_i)(x_j - X_j) \rangle = \langle (x_i)(x_j) \rangle \quad (12)$$

vilket innebär att sigmamatrisen efter att ha blivit transporterad genom acceleratortorn, kan uttryckas som

$$\bar{\sigma}_{ij} = \langle \bar{x}_i x_j \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n R_{ik} x_k \sum_{l=1}^n R_{jl} x_l \right\rangle = \sum_{k=1}^n R_{ik} \sum_{l=1}^n R_{jl} \langle x_k x_l \rangle = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n R_{ik} R_{jl} \sigma_{kl} \quad (13)$$

vilket i matrisform är

$$\bar{\sigma} = R\sigma R^T \quad (14)$$

Sigmamatrisen kan parametreras[2] på formen som visas i ekvation 15

$$\sigma = \varepsilon \begin{pmatrix} \beta & -\alpha \\ -\alpha & \gamma \end{pmatrix} \quad (15)$$

där  $\beta$  har tagits upp ovan,  $\gamma = \frac{1-\alpha^2}{\beta}$ , och  $\alpha$  är en parameter. Matrisen är parametrerad på det viset att determinanten alltid är ett så länge rörelsen är konservativ. Parametern  $\varepsilon$  kallas emittans, och den är bevarad då rörelsen är konservativ, och som man lätt kan se på ekvation 15 så är den relaterad till sigmamatrisen på följande sätt:  $\varepsilon^2 = \det \sigma$ . Elementet  $\sigma_{11}$  är kvadraten av strålens standardavvikelse, vilket innebär följande:

$$\sigma_{11} = \sigma_x^2 = \varepsilon\beta \quad (16)$$

Och det är från sambandet i ekvation 16 som ekvation 5 kommer från.

## 2.4 Vad modellerna inkluderar

Det händelseförlopp som skall modelleras inkluderar två runda strålar, den ena positivt och den andra negativt laddad, som båda transporteras genom acceleratorn. Under vägen genom acceleratorn påverkar partiklarna varandra och emitterar synkrotronstrålning som visar sig dämpa och excitera partiklarnas oscillationer. Den energi som går förlorad återförs till partiklarna när dessa går genom RF kaviteter. På samma punkt på varje varv kolliderar partikelstrålarna och ger upphov till beam-beam effekten p. g. a. sina elektriska laddningar. I båda modeller som jämförs i denna rapport, är det första momentet som strålarna utsätts för att bli transporterade genom acceleratorn, den linjära transporten, vilken beskrivs av ekvation 4. Den rörelse som partiklarna går igenom här är konservativ, och emittansen förblir därför konstant här. Nästa moment som uppkommer är dämpning p. g. a. synkrotronstrålning, och den kick som partiklarna får när de passerar RF kaviteten och då partiklarna i strålen påverkar varandra, och hur en partikel påverkas kan tillfälligtvis beskrivas med ekvation 17

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x'_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ \lambda x'_n + \theta_{rms} \hat{r} \end{pmatrix} \quad (17)$$

där  $x_n$  är partikelns position före påverkan,  $x_{n+1}$  efter påverkan, och  $x'_n$  är partikelns riktning före påverkan, och  $x'_{n+1}$  efter påverkan. Dessa moment är inte konservativa, och emittansen behöver därför inte förbli konstant i detta moment. Denna process kan liknas vid det som sker i ekvation 17, där  $\lambda$  är dämpningen,  $\hat{r}$  är slumpmässiga tal så att dess medelvärde är  $\langle \hat{r} \rangle = 0$ , och  $\langle \hat{r}^2 \rangle = 1$ . Ekvation 17 beskriver att en partikel som utsätts för en dämpning  $\lambda$ , och sedan för en slumpgenererad kick med absolutbeloppet  $\theta_{rms}$ .

Det moment som därefter sker i modellen är själva beam-beam kicken som uppstår då de laddade partikelstrålarna kolliderar och påverkar varandra med sina elektriska fält. För att kunna beskriva denna process måste man ta i beaktande hur de elektriska fälten från buntarna ser ut, och det är detta som skiljer modellerna åt. I Furmans modell approximeras det elektriska fältet från en partikelstråle som

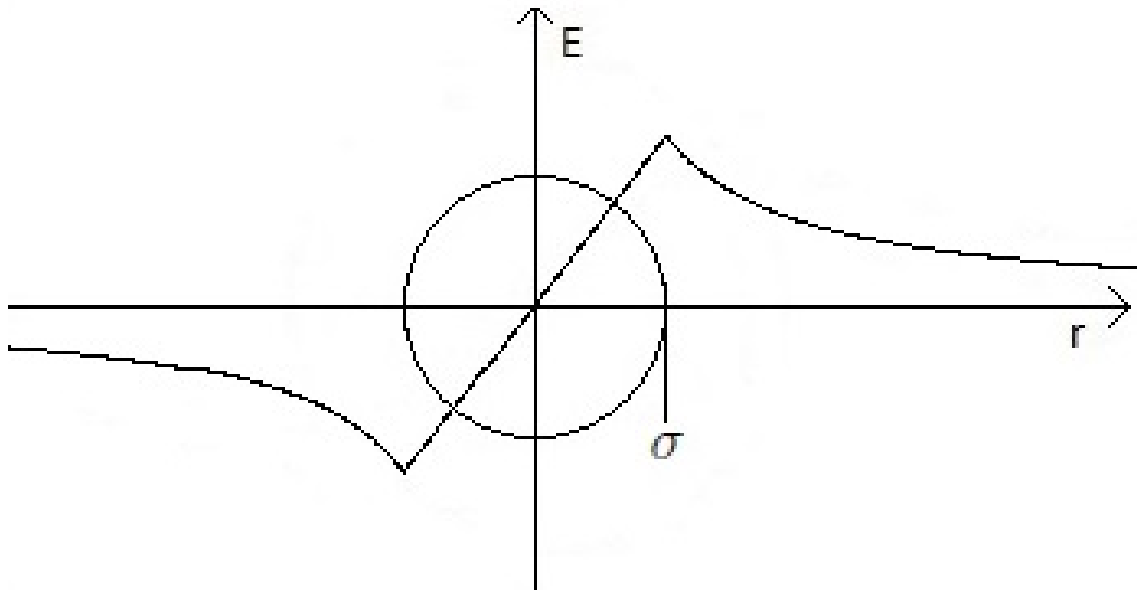


Figure 2: Absolutbeloppet av E-fältet från beam-beam kicken enligt Furmans modell. Cirkeln i mitten representerar strålen sedd framifrån. Den sneda linjen som går genom origo är styrkan på det elektriska fältet.

fältet från en homogent laddningsfördelad cylinder med strålens standardavvikelse som höjd och bredd. Fältstyrkan från en rund cylinder med en homogen laddningsfördelning beskrivs av följande ekvation [5]:

$$E_x = 4\lambda x \frac{1}{a(a+b)} \quad (18)$$

där  $a$  är ellipsens axel i x-led, och  $b$  ellipsens axel i y-led.  $\lambda = A\rho$  är laddningen per längdenhet, och  $A$  är strålens tvärsnittsarea, och  $\rho$  laddningen per areanehet. För att få det elektriska fältet i y-led byts  $x$  ut mot  $y$ , och  $a$  mot  $b$ . Man kan även använda Gauss lag för att erhålla en beskrivning av absolutbeloppet för det elektriska fältet från en rund homogen laddningsfördelning, vilket ger följande:

$$E = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{c\lambda}{A} & R \leq R_l \\ \frac{c\lambda R_l^2}{A} \frac{1}{R} & R > R_l \end{array} \right\} \quad (19)$$

där  $c$  är en konstant som inte är viktig i detta sammanhang,  $R$  är avståndet till cylinderns centrum, och  $R_l$  är cylinderns radie. Den övre ekvationen i ekv. 19 gäller innanför cylindern, och den nedre utanför. Styrkan på det elektriska fältet upplevd av den motgående strålen visas i Fig. 2, där cirkeln i mitten representerar strålen sedd framifrån. Den sneda linjen som går genom origo är styrkan på det elektriska fältet.

I den nya modellen approximeras de elektriska fälten från strålarna istället till elektriska fält från Gaussfördelade strålar. Om strålen är rund, kan laddningsfördelningen beskrivas av

$$\rho(r) = \frac{ne}{2\pi\sigma^2} e^{-r^2/2\sigma^2} \quad (20)$$

där  $n$  är antal partiklar per längdenhet,  $e$  är elementarladdningen,  $\sigma$  är standardavvikelsen, och  $r$  är avståndet från strålens centrum. Detta  $\rho$  är laddningstätheten,

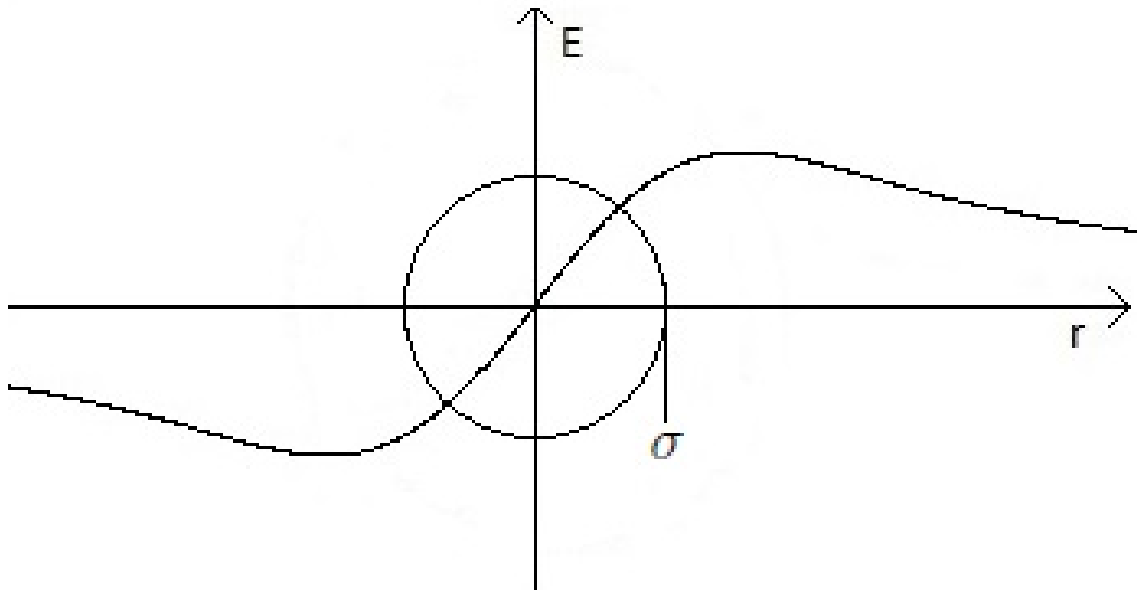


Figure 3: Absolutbeloppet av E-fältet från beam-beam kicken enligt den modifierade modellen som approximerar efter det elektriska fältet från en gaussisk stråle. Cirkeln i mitten representerar strålen sedd framifrån. Den sneda linjen som går genom origo är styrkan på det elektriska fältet.

och är inte att blanda ihop med ett annat  $\rho$  som kommer att introduceras i metodsektionen. Om man utnyttjar Gauss lag erhåller man följande ekvation som beskrivning av den radiella komponenten av det elektriska fältet[3]:

$$E_r = \frac{ne}{2\pi r\epsilon_0}(1 - e^{-r^2/2\sigma^2}) \quad (21)$$

där  $\epsilon_0$  i just detta fall är permittiviteten (och är inte att blanda ihop med emit-tansen), och  $\sigma^2$ , som finns i nämnaren i ekvationen för laddningsdensiteten, försvinner under uträkningen av hela laddningen vilket utförs genom en integral över  $r$ . En figur som visar det elektriska fältet från en gaussisk stråle visas i Fig. 3. Det är ovanstående ekvation som utnyttjas då den nya modellen utvecklas.

### 3 Metoder

I denna sektion skall två modeller tas upp, Furmans modell och den nya modellen som undersöks. I delen om Furmans modell beskrivs först parametrar som används, och sedan beskrivs delmomenten i modellen i detalj, itereringen av strålen från varv till varv, samt hur den löses analytiskt. Båda kommer sedan att användas för att bestämma ungefär vilka lösningar som finns givna specifika värden på parametrarna. Därefter tas den modifierade modellen upp, nya parametrar introduceras, och hur beam-beam effekten approximeras utifrån den. Sedan kommer tas upp hur iterationen sker, och hur lösningarna för den nya modellen löses numeriskt.

#### 3.1 Furmans modell

I denna rapport tas enbart runda strålar upp, och därför tas i beaktelse enbart en dimension per stråle. Den ena strålen är positivt laddad (benämns med ett "+"), och

den andra är negativt (benämns med ett "-"). Som tidigare benämns en partikels position med  $x$ , och lutningen på dess lutning med  $x'$ , och följande normaliserade koordinater definieras[6]:

$$q_{\pm} \equiv \frac{x_{\pm}}{\sqrt{\beta}}, \quad p_{\pm} \equiv \frac{\beta x'_{\pm} + \alpha x_{\pm}}{\sqrt{\beta}} \quad (22)$$

Denna modell kan i stora drag beskrivas som tre överföringsmatriser som multiplicerats ihop, med addition av en slumpfaktor. Dessa tre överföringsmatriser är en som representerar beam-beam effekten ( $B(k_{\pm})$ ), vilket i denna modell sker först. Därefter sker den linjära transporten ( $T$ ) vilket beskriver hur en stråle påverkas då den transporteras genom acceleratoren. Sedan sker dämpningen beskriven av ( $R$ ).[6] Strålarna approximeras som runda cylindrar med homogen laddningsfördelning, vilket ger upphov till ett elektriskt fält vars styrka är, som tidigare beskrivet, linjärt inuti strålen, och avtar proportionellt till  $1/R$  utanför strålen. Detta visas i Fig. 2. Styrkan på det elektriska fältet inuti laddningsfördelningen är proportionellt mot avståndet till strålens centrum, vilket ger samma egenskap som en kvadrupol har. I denna modell tas enbart hänsyn till den linjära delen av beskrivningen av den elektriska styrkan, och beam-beam effekten kan därför beskrivas som en kvadrupol med en matris liknande den i ekv. 2, och den ser ut på följande sätt:

$$B(k_{\pm}) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k_{\pm} & 1 \end{pmatrix} \quad (23)$$

där  $k_{\pm}$  bestämmer brännvidden på kvadrupolapproximationen och beskrivs av

$$k_{\pm} = \frac{2r_0 N \beta}{\gamma \{(\sigma_x + \sigma_y)\sigma_y\}_{\pm}} \equiv \frac{\beta}{f_{\pm}} \quad (24)$$

där  $r_0$  är den klassiska radien för en elektron,  $\gamma$  är Lorentzfaktorn, och  $N$  är antalet partiklar i varje strålbunt[6].  $N$  fyller en liknande funktion som  $n$  som togs upp ovan där de elektriska fälten från olika fördelade laddade partikelstrålar beskrevs, men de hör till olika sammanhang och bör inte tas för samma sak.  $f_{\pm}$  är samma som i ekv. 2 (brännvidden),  $\sigma_x$  är partikelstrålens standardavvikelse i x-led (eller "bredd"), och  $\sigma_y$  är partikelstrålens standardavvikelse i y-led (eller "höjd").  $k_{\pm}$  är lik ekvationen för det elektriska fältet i en elliptisk stråle som beskrivs av ekv. 18. Från ekv. 22 och faktumet att endast runda strålar behandlas här, erhålles att [6]

$$\sigma_{x\pm} = \sigma_{y\pm} = \sqrt{\beta \langle q_{\pm}^2 \rangle} \quad (25)$$

och därifrån erhålles följande uttryck för  $k_{\pm}$

$$k_{\pm} = 4\pi\xi \frac{\varepsilon}{\langle q_{\pm}^2 \rangle} \quad (26)$$

där  $\xi = r_0 N / (4\pi\gamma\varepsilon)$ , vilken kallas för beam-beam parametern, och är ett mått på styrkan i beam-beam kicken. Matrisen  $T$  beskriver nästa del av modellen; strålens transport genom acceleratoren, vilken är lik matrisen i ekv. 4, men med parametriseringen i ekv. 22 blir matrisen

$$T \equiv \begin{pmatrix} \cos 2\pi Q & \sin 2\pi Q \\ -\sin 2\pi Q & \cos 2\pi Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & S \\ -S & C \end{pmatrix} \quad (27)$$

där  $Q$  är tune,  $S = \sin 2\pi Q$ , och  $C = \cos 2\pi Q$ . Den sista delen är matrisen som beskriver dämpningen p. g. a. synkrotronstrålning, och kickar partiklarna utsätts för från slumpmässigt brus, vilket beskrivs av ekv. 17 och uttrycks i följande form:

$$\begin{pmatrix} q'_\pm \\ p'_\pm \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} q_\pm \\ p_\pm \end{pmatrix} + \hat{r}_\pm \sqrt{\varepsilon(1-\lambda^2)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (28)$$

där  $\lambda$ , som förut, är dämpningen, men istället för  $\theta$  är det nu termen  $\sqrt{\varepsilon(1-\lambda^2)}$  som beskriver styrkan på dessa kickar. Då alla bitar som nu hör till Furmans modell är introducerade, skall dessa multipliceras ihop, och det ger att avbildningsmatrisen för processen, med undantag av kickarna p. g. a. slumpmässigt brus, kan beskrivas på följande sätt [6]:

$$M(k_\pm) = RTB(k_\pm) = \begin{pmatrix} C - k_\pm S & S \\ -\lambda(S + k_\pm C) & \lambda C \end{pmatrix} \quad (29)$$

För att kunna bestämma hur strålens tjocklek varierar från varv till varv, används nu ekvation 14, vilket ger

$$\begin{bmatrix} \langle q_\pm^2 \rangle & \langle p_\pm q_\pm \rangle \\ \langle p_\pm q_\pm \rangle & \langle p_\pm^2 \rangle \end{bmatrix}_{n+1} = \begin{bmatrix} C - k_\pm S & S \\ -\lambda(S + k_\pm C) & \lambda C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle q_\pm^2 \rangle & \langle p_\pm q_\pm \rangle \\ \langle p_\pm q_\pm \rangle & \langle p_\pm^2 \rangle \end{bmatrix}_n \quad (30)$$

$$\dots \begin{bmatrix} C - k_\pm S & -\lambda(S + k_\pm C) \\ S & \lambda C \end{bmatrix} + \varepsilon(1-\lambda^2) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (31)$$

Man kan utnyttja ovanstående ekvation för att få följande beskrivning av hur båda strålarna rör sig i acceleratoren[6]:

$$\frac{1}{\varepsilon} \begin{bmatrix} \langle q_+^2 \rangle \\ \langle p_+ q_+ \rangle \\ \langle p_+^2 \rangle \\ \langle q_-^2 \rangle \\ \langle p_- q_- \rangle \\ \langle p_-^2 \rangle \end{bmatrix}_{n+1} = \begin{bmatrix} \tilde{M}(k_{-,n}) & 0 \\ 0 & \tilde{M}(k_{+,n}) \end{bmatrix} \frac{1}{\varepsilon} \begin{bmatrix} \langle q_+^2 \rangle \\ \langle p_+ q_+ \rangle \\ \langle p_+^2 \rangle \\ \langle q_-^2 \rangle \\ \langle p_- q_- \rangle \\ \langle p_-^2 \rangle \end{bmatrix}_n + (1-\lambda^2) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (32)$$

där  $\tilde{M}$  beror på matrisen  $M(k_\pm)$  i ekv. 29, och ges av

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} M_{11}^2 & 2M_{11}M_{12} & M_{12}^2 \\ M_{11}M_{21} & M_{11}M_{22} + M_{12}M_{21} & M_{12}M_{22} \\ M_{21}^2 & 2M_{21}M_{22} & M_{22}^2 \end{pmatrix} \quad (33)$$

Genom att ha passande begynnelsevärden på standardavvikelsevektorn i högerledet i ekv. 32 (vilken i resten av rapporten kommer att benämnas pq-vektorn) kan ekv. 32 itereras över, och man kan då från pq-vektorn utläsa hur strålarnas tjocklekar varierar i en punkt från varv till varv. Det visar sig att, beroende på vilka värden parametrarna tilldelats, stråltjocklekarna går mot vissa jämviktsvärden, vilket visas i resultatsektionerna. Dessa jämviktsvärden kallas för fix-point solutions. När det är endast ett sådant värde som inte förändras sig från varv till varv, är det en period-1 fix point solution. I annat fall kan vektorn hoppa mellan två olika värden från varv till varv, vilket är en period-2 fix-point solution. Det finns även period-3 och period-4 fix point solutions. För att på annat sätt bestämma jämviktsvärdena i

elementen i pq-vektorn, kan ekv. 32 lösas analytiskt. För att åstadkomma detta, sätts pq-vektorerna i ekv. 32 i högerled och vänsterled lika, ekvationen möbleras om och man erhåller följande ekvation[6]:

$$\frac{1}{\varepsilon} \begin{bmatrix} \langle q_+^2 \rangle \\ \langle p_+ q_+ \rangle \\ \langle p_+^2 \rangle \\ \langle q_-^2 \rangle \\ \langle p_- q_- \rangle \\ \langle p_-^2 \rangle \end{bmatrix}_\infty = (1 - \lambda^2) \begin{bmatrix} 1 - \tilde{M}(k_-) & 0 \\ 0 & 1 - \tilde{M}(k_+) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (34)$$

Ovanstående ekvation löses inte här, utan lösningarna hämtas från Furman. Hur- somhelst använder Furman några parametrar som behövs för att beskriva lösningarna[6]:

$$\langle q_+^2 \rangle = \frac{4\pi\xi}{\lambda + 1} \frac{\varepsilon}{x}, \quad \langle q_-^2 \rangle = \frac{4\pi\xi}{\lambda + 1} \frac{\varepsilon}{y}, \quad \rho \equiv \frac{4\pi\xi}{\lambda + 1}, \quad \chi \equiv \cot 2\pi Q \quad (35)$$

där  $\rho$  är särskilt viktig då detta uttrycker beam-beam effektens styrka, och är den enda parametern lösningarna beror på (förutom dämningen  $\lambda$  och tune  $Q$ ). Både  $\beta$  och emittansen  $\varepsilon$  parametreras bort. Man kan sätta ett villkor att båda strålar skall vara lika stora ( $x_\pm = y_\pm$ ), vilket, enligt Furman, ger följande för rund stråle:

$$x_\pm = y_\pm = \frac{1}{2\rho} \left[ 2\chi\rho - 1 \pm \sqrt{(2\chi\rho + 1)^2 + 4\rho^2} \right] \quad (36)$$

vilket alltid är reellt. I detta fall i ekvationen ovan har indexet i  $x_\pm$  inget att göra med vilken stråle det är frågan om, utan med kvadratroten i ekvationen, och  $x$  och  $y$  är inte koordinater för partikelpositioner. Om man inte har som villkor att strålarna skall vara lika stora får man andra uttryck för  $x$  och  $y$ :

$$x = \frac{1}{2\rho} \left[ 2\chi\rho + 1 + \sqrt{(2\chi\rho - 1)^2 - 4(1 - \rho^2)} \right] \quad (37)$$

$$y = \frac{1}{2\rho} \left[ 2\chi\rho + 1 - \sqrt{(2\chi\rho - 1)^2 - 4(1 - \rho^2)} \right] \quad (38)$$

Uttrycken ovan för  $x \neq y$  ger reella värden endast för vissa  $\rho$  och  $\chi$ . De måste nämligen uppfylla  $(2\chi\rho - 1)^2 > 4(1 - \rho^2)$ , och  $x$  och  $y$  måste ha samma tecken. Därefter avgjordes huruvida lösningarna var stabila. För att utföra detta, expanderas avbildningsmatrisen beskriven i ekv. 32 så nära fix-pont lösningen att avbildningsmatrisen kan antas vara linjär. Därefter störs fix-point lösningen med ett litet  $\Delta pq$ . Om detta  $\Delta pq$  ökar för varje nästkommande iterering, är lösningen ostabil. Om dessa minskar, är lösningen stabil. Furman ger att om alla egenvärden i stabilitetsmatrisen  $\Sigma(x, y)$  är mindre än ett, så är lösningen stabil. Matrisen beskrivs av

$$\Sigma(x, y) = \begin{bmatrix} \tilde{M}(y) & N(x, y) \\ N(y, x) & \tilde{M}(x) \end{bmatrix} \quad (39)$$

där  $\tilde{M}(y) = \tilde{M}(k_-)$ ,  $\tilde{M}(x) = \tilde{M}(k_+)$ , och

$$N(x, y) = -(\lambda + 1) \frac{2y^2}{x} \begin{bmatrix} S(Sy - C) & 0 & 0 \\ \lambda(2SCy - C^2 + S^2)/2 & 0 & 0 \\ \lambda^2 C(Cy + S) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (40)$$

Dessa ekvationer är från Furmans rapport som nämnts förut och används senare för att utföra fix-point simuleringar där fix-point lösningarna plottas som funktioner av  $\rho$ , och plottarna till dessa finns i resultatkapitlet under motsvarande titel (4.1 och 5.1).

### 3.2 Furmans Modell Modifierad

I den modifierade modellen approximeras inte det elektriska fältet som om det kom från en cylinder med homogen laddningsfördelning, utan som om det kom från en gaussisk stråle. I och med detta, så approximeras inte hela fältet som om det var linjärt som inuti en homogent laddad cylinder heller, utan även det som approximeras bort i Furmans modell tas med. I detta fall beskrivs beam-beam effekten med

$$\begin{aligned} \overline{\langle q_{\pm}^2 \rangle} &= \langle q_{\pm}^2 \rangle \\ \overline{\langle pq_{\pm} \rangle} &= \langle pq_{\pm} \rangle + \frac{NK}{2} \frac{\langle q_{\pm}^2 \rangle}{\langle q_{\pm}^2 \rangle + \langle q_{\mp}^2 \rangle} \\ \overline{\langle p_{\pm}^2 \rangle} &= \langle p_{\pm}^2 \rangle + \frac{(NK)^2}{4\langle q_{\pm}^2 \rangle} \log \left( 1 + \frac{\langle q_{\pm}^2 \rangle^2}{\langle q_{\pm}^2 \rangle^2 + 2\langle q_{\pm}^2 \rangle \langle q_{\mp}^2 \rangle} \right) \end{aligned} \quad (41)$$

vilket förändrar hur processens avbildningsmatris är uppbyggd [8].  $N$  är antalet laddade partiklar i en bunt, och  $K = -2r_0/\gamma$ [7]. Om man approximerar  $\lambda \approx 1$  erhåller man från definitionen av  $\rho$ , samt definitionen av  $\xi$  (se ekv. 35) att

$$\rho = \frac{r_0 N}{2\gamma \varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \frac{2r_0 N}{\gamma} = 4\varepsilon \rho$$

vilket ger följande uttryck för  $N$  och  $K$ :

$$NK = -\frac{2r_0 N}{\gamma} = -4\varepsilon \rho \quad (42)$$

I och med att beam-beam effekten inte beskrivs som en magnetisk kvadrupol i denna modell, finns det heller ingen parameter  $k_{\pm}$  i avbildningen. Detta förändrar matrisen  $M(k_{\pm})$  i ekv. 29 till följande:

$$M_n = \begin{pmatrix} C & S \\ -\lambda S & \lambda C \end{pmatrix} \quad (43)$$

och  $\tilde{M}$  ändras så att den består av elementen i ekv. 43 istället för den tidigare, men är annars densamma. Hela händelseförloppet kan alltså beskrivas som

$$\frac{1}{\varepsilon} \begin{bmatrix} \langle q_+^2 \rangle \\ \langle p_+ q_+ \rangle \\ \langle p_+^2 \rangle \\ \langle q_-^2 \rangle \\ \langle p_- q_- \rangle \\ \langle p_-^2 \rangle \end{bmatrix}_{n+1} = \begin{bmatrix} \tilde{M} & 0 \\ 0 & \tilde{M} \end{bmatrix} \frac{1}{\varepsilon} \begin{bmatrix} \langle q_+^2 \rangle \\ \langle p_+ q_+ \rangle + D_+ \\ \langle p_+^2 \rangle + E_+ \\ \langle q_-^2 \rangle \\ \langle p_- q_- \rangle + D_- \\ \langle p_-^2 \rangle + E_- \end{bmatrix}_n + (1-\lambda^2) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (44)$$



där  $D_{\pm}$  och  $E_{\pm}$  beskrivs av

$$D_{\pm} = \frac{NK}{2} \frac{\langle q_{\pm}^2 \rangle}{\langle q_{\pm}^2 \rangle + \langle q_{\mp}^2 \rangle} \quad (45)$$

$$E_{\pm} = \frac{(NK)^2}{4\langle q_{\pm}^2 \rangle} \log \left( 1 + \frac{\langle q_{\pm}^2 \rangle^2}{\langle q_{\pm}^2 \rangle^2 + 2\langle q_{\pm}^2 \rangle \langle q_{\mp}^2 \rangle} \right) \quad (46)$$

och det är utifrån denna ovanstående ekvation (ekv. 44) som den nya modellen testas, och plottarna efter dessa simuleringar finns i resultatsektionen 4.2 för simuleringar i tidsdomänen.

## 4 Resultat från simuleringar i tidsdomänen

För att testa vad dessa två presenterade modeller förutsäger om hur strålarnas tjocklekar varierar över tiden för olika styrkor på beam-beam interaktionen, och jämföra dessa, simuleras först Furmans modell (delsektion 4.1), och därefter modifieringen av denna (delsektion 4.2). I denna sektion används modellernas avbildningar till simuleringar av hur strålarnas stråltjocklekar varierar i en punkt i acceleratoren från varv till varv. Emittansen  $\varepsilon$  och  $\beta$  har parametriserats bort, och simuleringarna beror då på dämpningsfaktorn  $\lambda$ , tune  $Q$ , begynnelsevärdena på de normaliserade pq-vektorerna (pq-vektorn dividerad med  $\varepsilon$ ), och styrkan på beam-beam interaktionen som uttrycks i  $\rho$ . Värdena på  $\lambda$  och  $Q$  hålls konstanta under simuleringarna, och har för jämförelsens skull valts till  $\lambda = 0.8694$  och  $Q = 0.15$ . Detta är samma värden som Furman, med sina kollegor, använde i sin rapport som nämnt tidigare. Med ett sådant stort värde på  $\lambda$  konvergerar stråltjocklekarna mot sina jämviktsvärden relativt fort [6].

### 4.1 Furmans Modell

För ett visst begynnelsevärde på pq-vektorn (som är normaliserad med avseende på  $\varepsilon$ ) simuleras avbildningsmatrisen i ekv. 32 för olika värden på parametern  $\rho$ . Då erhålles från den normaliserade pq-vektorn hur strålarnas tjocklekar i en punkt i acceleratoren varierar från varv till varv för ett visst värde på  $\rho$ .  $\rho$  är proportionell mot beam-beam parametern vilket är ett mått på styrkan på beam-beam interaktionen. Då  $\rho = 0$  är det ingen beam-beam effekt, och stråltjocklekarna konvergerar då mot ett. Liksom simuleringarna som Furman presenterade i sin rapport, varierar värdet på  $\rho$  mellan 0.1 och 2.5. Den positiva strålens tjocklek benämns med  $(\langle q_+^2 \rangle / \varepsilon)^{0.5}$ , och den negativa strålen med  $(\langle q_-^2 \rangle / \varepsilon)^{0.5}$ , och dessa är enhetslösa. Resultaten av dessa simuleringar visas i Fig. 4. Längst upp till vänster i Fig. 4, där  $\rho = 0.1$ , går stråltjocklekarna på båda strålarna mot ett specifikt värde, vilket är en period-1 fix-point solution för dessa parametrar. Uppe till höger i Fig. 4 är värdet på  $\rho = 0.3$ , vilket orsakar en ganska kaotisk utveckling av stråltjocklekarna. Någon stabil fix-point solution har inte funnits då  $\rho$  har detta värde. I mitten till vänster i Fig. 4 är  $\rho = 1$  stabiliserar stråltjocklekarna på en period-3 solution, där tjocklekarna går från 1.394, till 2.851, till 3.696, och därifrån går den till det första värdet som nämnts i denna sekvens. Båda strålar har alltid samma tjocklek på samma punkter då systemet nått jämviktsläget. Period-3 jämviktslägen uppnås även i plotten i mitten till höger och nere till vänster i Fig. 4. Nere till höger i Fig. 4 kombineras ett

antal sådana simuleringar där  $\rho$  varierats från 0.1 till 2.5. Värdena på parametern  $\rho$  visas i x-led, och stråltjocklekarna visas i y-led. Symbolerna i grafen visar fix-point solutions av olika perioder. Även där kaotiska värden är visas i den plotten.

## 4.2 Furmans Modell Modifierad

För denna modifiering av Furmans modell, utförs simuleringarna med samma värden på parametrarna  $\lambda$  och  $Q$  som användes då simuleringar av Furmans modell utfördes. På samma sätt som gjorts med Furman i föregående delsektion utförs även de simuleringar vars resultat här redovisas, förutom att en annan avbildning används. Även här normaliseras pq-vektorn med avseende på  $\varepsilon$  för att bli oberoende av emittansen, och stråltjocklekarna är enhetslösa. För ett visst begynnelsevärde på pq-vektorn utförs itereringar över avbildningsmatrisen i ekv. 44, för olika värden på parametern  $\rho$ . I Fig. 5 visas hur stråltjocklekarna utvecklas från varv till varv, med stråltjockleken (RMS beam size) som y-axel, och antalet varv som x-axel. I alla dessa grafer stabiliseras stråltjocklekarna mot en period-1 fix-point solution, som ökar med högre värden på parametern  $\rho$ . Längst ned till höger i Fig. 5 sammanställs fix-point solutions från ett antal simuleringar där iterationer sker över ekv. 44, på samma sätt som längst ned till höger i Fig. 4 för Furmans modell.

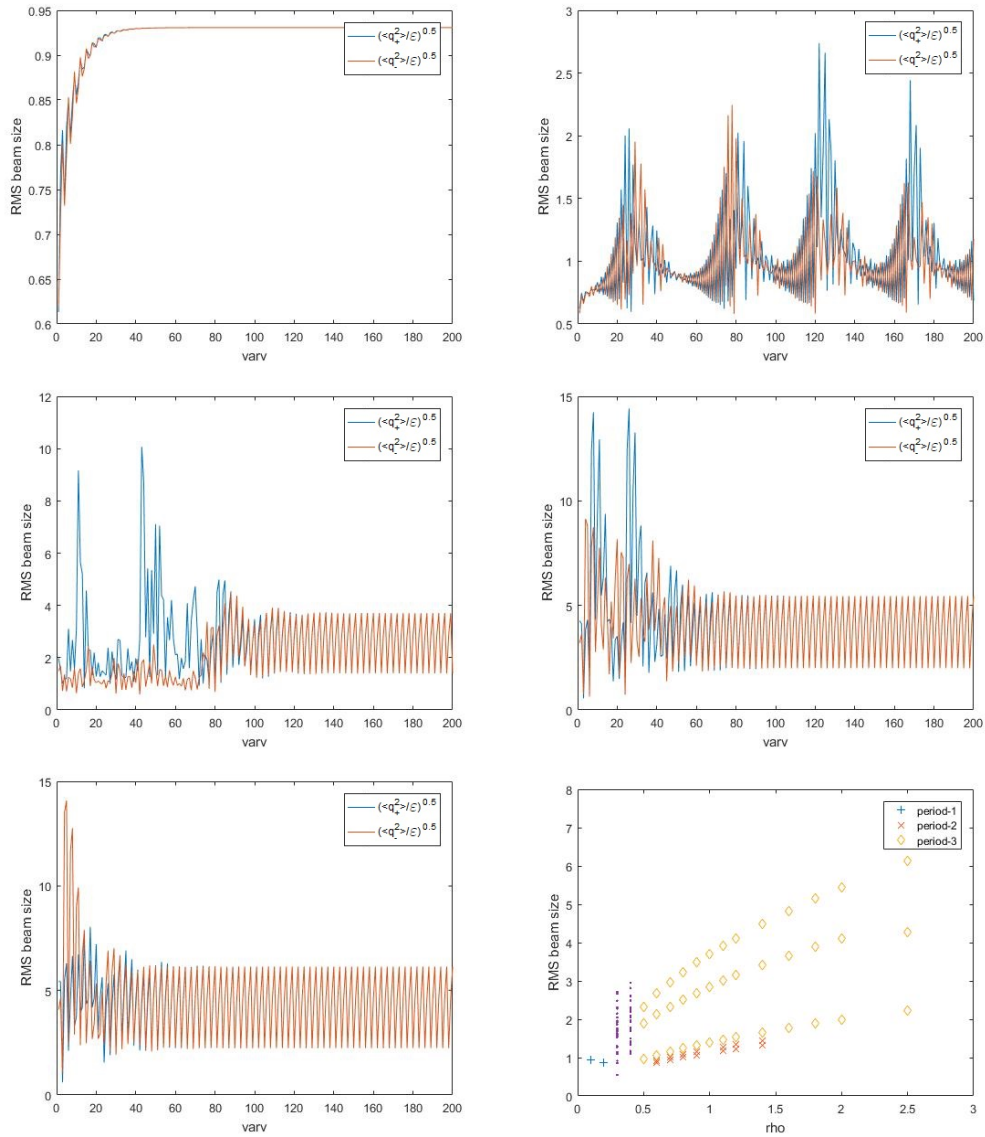


Figure 4: I denna figur visas resultaten av ett antal avbildningsitereringar enligt Furmans modell. Avbildningsiterering där strålens RMS värden tagits fram då  $\rho = 0.1$  finns längst upp till vänster, RMS då  $\rho = 0.3$  finns uppe till höger, RMS då  $\rho = 1.0$  finns i mitten till vänster, RMS då  $\rho = 2.0$  finns i mitten till höger, RMS då  $\rho = 2.5$  finns nedan till vänster. Nedan till höger finns samlade resultat från ett antal simuleringar, där fix-point lösningarna visas som funktion av  $\rho$ .

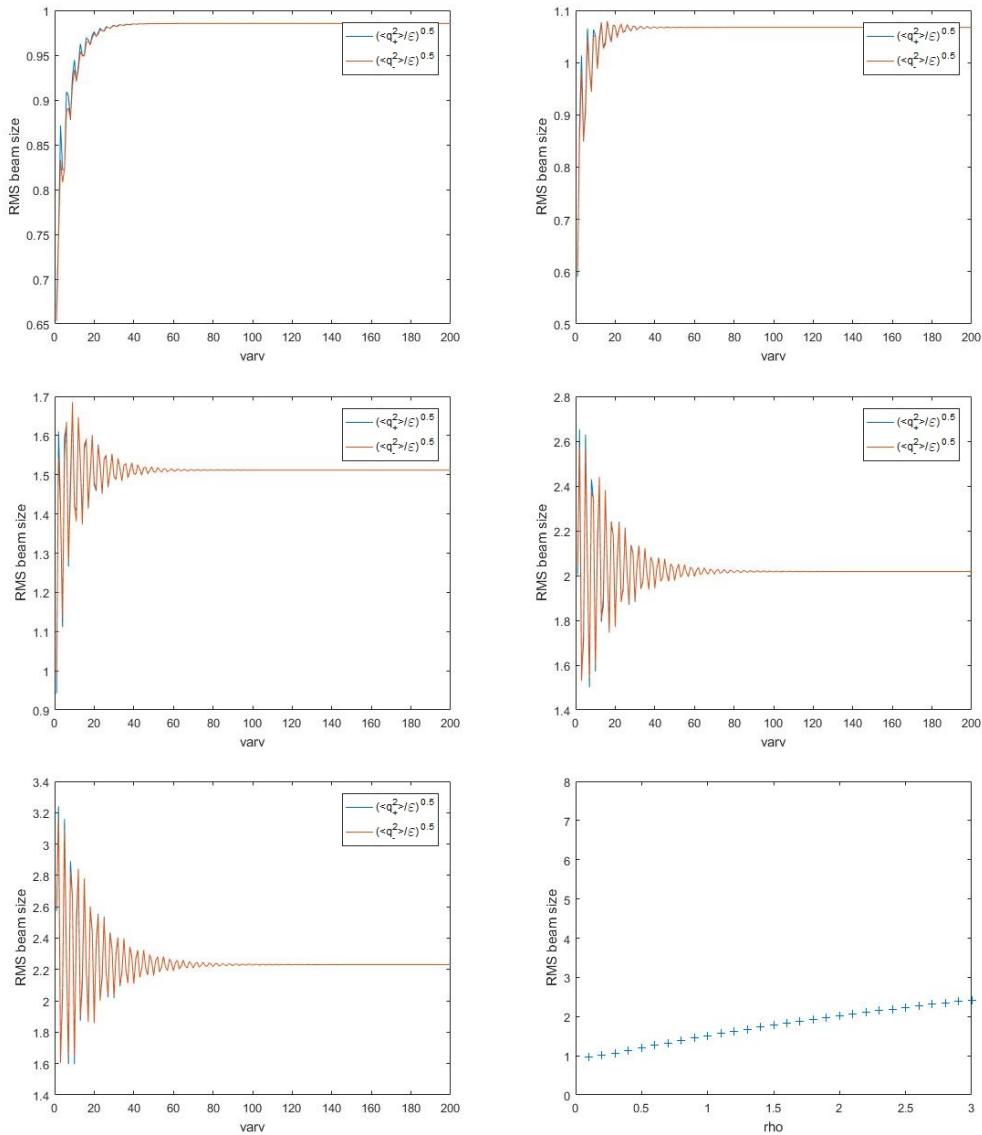


Figure 5: I denna figur visas resultaten av ett antal avbildningsitereringar enligt den modifierade modellen. Avbildningsiterering där strålens RMS värden tagits fram då  $\rho = 0.1$  finns längst upp till vänster, RMS då  $\rho = 0.3$  finns uppe till höger, RMS då  $\rho = 1.0$  finns i mitten till vänster, RMS då  $\rho = 2.0$  finns i mitten till höger, RMS då  $\rho = 2.5$  finns nedan till vänster. Nedan till höger finns samlade resultat från ett antal simuleringar, där fix-point lösningarna visas som funktion av  $\rho$ .

## 5 Resultat, fixpoint

I denna sektion i rapporten redovisas resultaten efter simuleringar av lösningarna till acceleratorernas avbildningsmatriser då man sätter att pq-vektorerna är lika ( $pq_n = pq_{n+1}$ ), vilket ger jämviktsvärdet på pq-vektorerna, dvs. period-1 fixpoint solutions. I delsektionen 5.1 visas plottar av lösningar av avbildningsmatrisen från Furmans modell, och i delsektionen 5.2 visas plottar av lösningar av avbildningsmatrisen för den modifierade modellen.

## 5.1 Furmans modell

För att bestämma fix-point solutions för Furmans modell sätts pq-vektorerna lika ( $pq_n = pq_{n+1}$ ) i ekv. 32, vilket ger ekv. 34, en matrisekvation som lösts av Furman i hans rapport och ger period-1 fix-point solutions (ingen flip-flop-liknande effekt). I simuleringarna beräknas lösningarna med ekv. 35 - 38 som funktioner av  $\rho$ , och resultatet visas i 7. Två olika typer av lösningar erhöles, dels lösningar i det fallet då strålarna är lika stora, vilket visas som en kontinuerlig linje kring  $RMS = 1$ , och är heldragen mellan 0 och 0.25, och prickad resten av sin längd. De två andra linjerna som går från ca  $\rho = 1$  till ca  $\rho = 2$ , och dessa är lösningarna som erhålles då strålarna inte sätts till samma tjocklek. De heldragna linjerna visar inom vilka intervall lösningarna är stabila, medan lösningarna är instabila inom de prickade intervallen. Om en lösning är stabil eller inte bestäms med ekv. 39 i metodsektionen. Några av dessa jämviktsvärden erhöles även då simuleringar i tidsdomänen utfördes, vilka visas i Fig. 4.

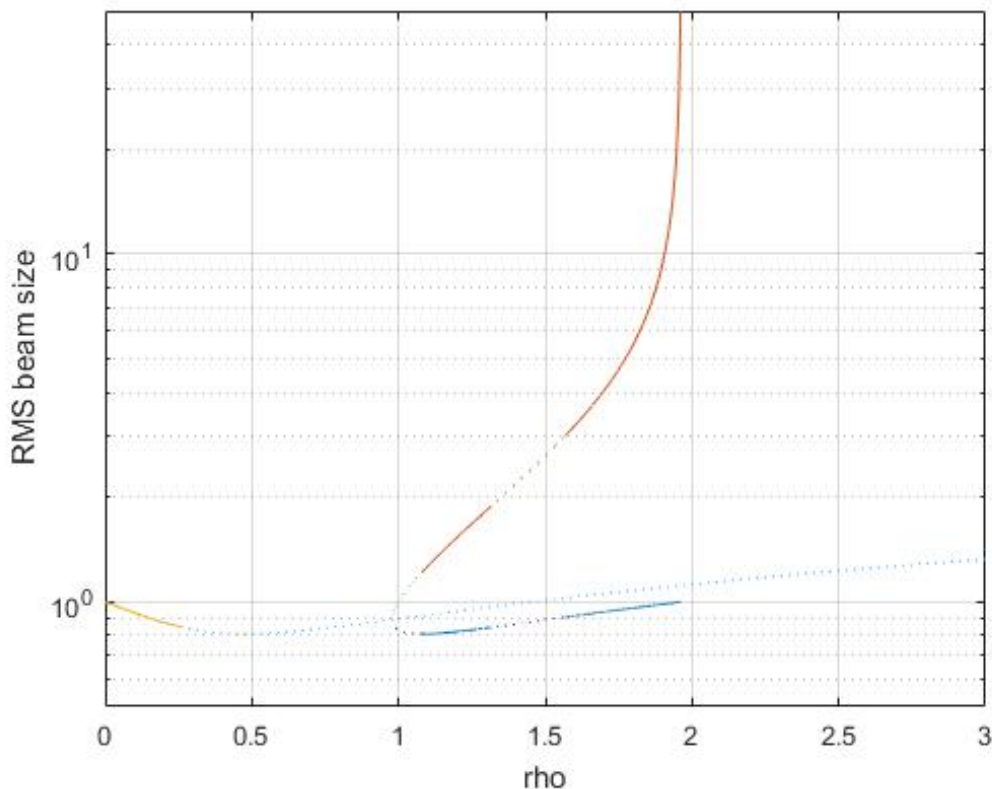


Figure 6: Analytiskt beräknad fix-point solutions i Furmans avbildning som funktion av rho

## 5.2 Furmans Modell Modifierad

För att kunna beräkna lösningarna för denna modifierade modell sätts elementen i pq-vektorerna lika med varandra i ekv. 44, och därefter lösas ekvationerna numeriskt med funktionen fsolve i MATLAB. På detta sätt erhålles period-1 fix-point solutions som en funktion av  $\rho$ . Dessa lösningar stämmer väl överens med de som erhållits från iterationer över modellens avbildning, som visas nere till höger i Fig. 5.

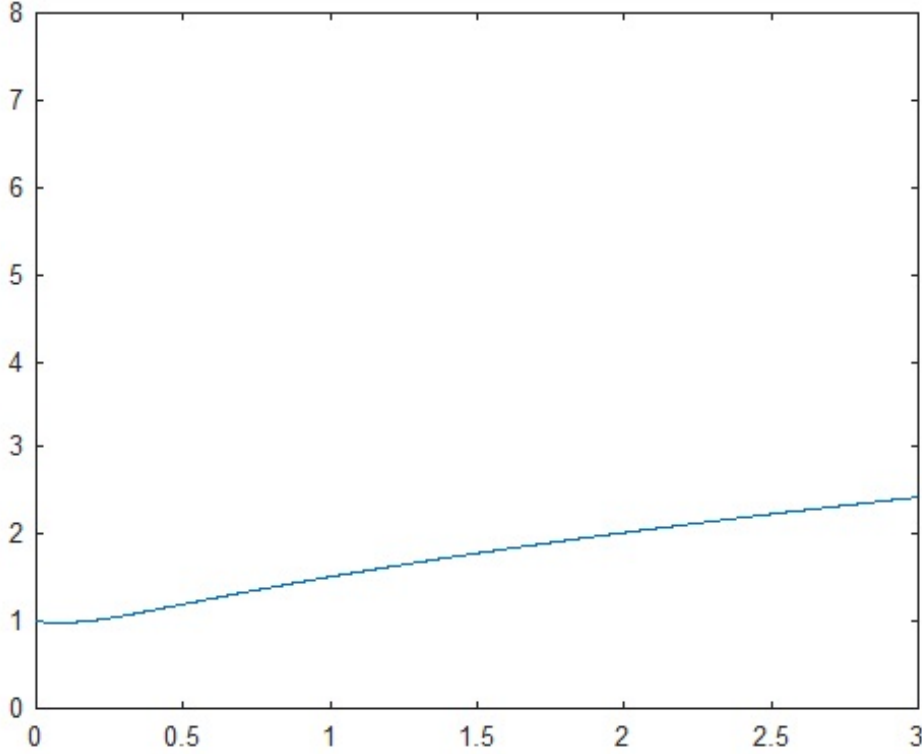


Figure 7: Numeriskt beräknade fix-point solutions i den modifierade modellens avbildning som funktion av rho

## 6 Diskussion och Slutsatser

I Furmans modell kan flera olika fix-point lösningar existera för samma värde på parametern  $\rho$ , och även periodiska sådana (flip-flop effekten), vilket man kan observera i Fig. 4. Hursomhelst, stråltjocklekarna i den modifierade modellen konvergerar i regel mot ett visst värde för alla testade värden på  $\rho$ , vilka visas i 5. Jämviktsvärdet för stråltjockleken ökar med styrkan på beam-beam effekten, och utifrån simuleringarna beskriver denna modell ingenting som liknar flip-flop effekten, och flip-flop effekten kan därför inte förklaras av denna modell. Fix-point lösningarna som erhållits med avbildningsiterering och visas i Fig. 5 liknar de minsta värdena i period-3 fix-point lösningarna som visas i Fig. 4. Det kan finnas en lösning till varför denna omväxlande effekt som liknar flip-flop effekten dyker upp i Furmans omodifierade modell, och för det måste man bestämma  $\bar{\sigma} = B\sigma B^T$ , där  $B$  beskrivs av ekv. 23. Man erhåller då att

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} - k\sigma_{11} \\ \sigma_{12} - k_{\pm}\sigma_{11} & \sigma_{22} - 2k_{\pm}\sigma_{12} + k_{\pm}^2\sigma_{11} \end{pmatrix} \quad (47)$$

och med ekv. 24 kan man för Furmans modell bestämma en ekvation som motsvarar ekv. 41 i den modifierade modellen. Ekvationen för  $\sigma_{11}$  bestäms med 11-elementet i ekv. 47, ekvationen för  $\sigma_{12}$  bestäms med 12 elementet, och  $\sigma_{22}$  med 22-elementet.

Med ekv. 24, och att strålarna är runda ( $\sigma_x = \sigma_y$ ) erhålles följande:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{11} &= \sigma_{11} \\ \bar{\sigma}_{12} &= \sigma_{12} - \frac{r_0 N \beta}{\gamma \sigma_{11f}^2} \sigma_{11} \\ \bar{\sigma}_{22} &= \sigma_{22} - \frac{2r_0 N \beta}{\gamma \sigma_{11f}^2} \sigma_{12} + \frac{r_0^2 N^2 \beta^2}{\gamma^2 \sigma_{11f}^4} \sigma_{11}\end{aligned}\tag{48}$$

där  $\sigma_{11f}$  är kvadraten av den motgående strålens tjocklek. Stråltjocklekarna som uttrycks här är oparametriserade, och  $\sigma_{11}$ -termerna (för båda strålar) har enheten kvadratmeter. Termerna i högerled, förutom  $\sigma_{11}$  och  $\sigma_{22}$ , tillkommer då beam-beam effekten beskrivs i Furmans modell. På grund av den linjära approximationen av det elektriska fältet blir termerna som tillkommer p. g. a. beam-beam effekten väldigt stora då den motgående strålen är väldigt tunn, och orsakar att  $\bar{\sigma}_{22}$  (variansen av partiklarnas riktningar) ökas kraftigt, vilket leder till att stråltjockleken växer då partikelstrålen propageras genom resten av acceleratoren. Om motgående stråle är tjock minskar termerna som beskriver beam-beam effekten i ekvationen ovan, och stråltjocklekarna krymper under dämpningen. Detta kan vara orsaken till att Furmans modell beskriver ett fenomen som liknar flip-flop effekten. Det elektriska fältet från strålarna beskrivs i hela rummet som om styrkan är linjärt beroende av avståndet från referensbanan, vilket leder till att styrkan på fältet blir väldigt stort för stora avstånd, medan styrkan på det elektriska fältet i den approximering som görs i den modifierade modellen avtar på stora avstånd från referensbanan. I termerna  $D$  och  $E$  i den modifierade modellen med den gaussfördelade laddningen tar de flesta  $\sigma$ -termer ut varandra, och parametern för den motgående strålens tjocklek finns i nämnaren i en term inuti en naturlig logaritm, vilket minskar effekten på stora avstånd från strålens masscentrum. Detta stämmer överens med att ingen flip-flop-liknande effekt visar sig i simuleringarna av modifieringen av Furmans modell.

## References

- [1] K. Steffen, Basic Course on Accelerator Optics, CAS CERN Accelerator School General Accelerator Physics, 3-14 September 1984
- [2] V. Ziemann, Accelerator Physics and Technology, kompendium skriven till kursen 1FA330, Oktober 19 2011
- [3] L. R. Evans, J. Gareyte, Beam-Beam Effects, CAS CERN Accelerator School Advanced Accelerator Physics, 21 April 1987
- [4] R. L. Holtzapple, F. -J. Decker, A. S. Fisher, M. Sullivan, Observation of Beam Size Flip-Flop in PEP-II, Stanford Linear Accelerator Center, Stanford University, Stanford CA94305, USA, June 2002
- [5] G. Parzen, Electric Fields of a Uniformly Charged Elliptical Beam, Collider-Accelerator Department Brookhaven National Laboratory Upton, New York 11973, Augusti 3 2001
- [6] M. A. Furman, K. Y. Ng, A. W. Chao, A Symplectic Model of Coherent Beam-Beam Quadrupole Modes, SSC Central Design Group, April 1988.

- [7] V. Ziemann, Beyond Bassetti and Erskine: Beam-Beam Deflections for Non-Gaussian Beams, Stanford Linear Accelerator Center, Stanford University, Stanford CA 94309, June 1991
- [8] private communication, V. Ziemann